Η ΣΥΝΕΧΗΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ GALERKIN

Ευλιάτης Αναστάσιος

Πτυχιακή εργασία

Περιεχόμενα

Η ΣΥΝΕΧΗΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ GALERKIN

1.1 Προκαταρκτικα

Ξεκινώντας να δουλεύουμε με τη συνεχή μέθοδο του Galerkin για να λύσουμε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις θα πρέπει να ορίσουμε ένα πεδίο συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $[a,b]$.Αυτές είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού και πολυώνυμα βαθμού το πολύ q-1,με $q\epsilon\ \mathbb{N}$, $q \geq 1$ σε κάθε υποδιάστημα $I_n = (t^n, t^{n+1}]$

Το S_h^σ *ορίζεται ως εξής :*

$$S_h^\sigma = \{u\epsilon C[a,b]: (u\,|\,I_n)(t) = \sum_{i=0}^{q-1} a_i\, t^i,\ a_i\ \epsilon\mathbb{R}\}\ .$$

Γνωρίζοντας ότι $Y\epsilon S_h^\sigma$ είναι η προσέγγιση της λύσης y του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & ,t\epsilon[a,b] \\ \quad y(a) = y_0 \end{cases}$$

η συνεχής μέθοδος του Galerkin διατυπώνεται ως εξής :

$$\int_{I_n} Y'(t)x(t) = \int_{I_n} f\big(t, Y(t)\big)x(t)\, dt\ \forall x\epsilon\mathbb{P}_{q-2}(I_n)\ \text{ με } n = 0,..,N-1$$

Η ακριβής λύση y,με δεδομένη την τιμή της στο t^n,ικανοποιεί στο $(t^n,t^{n+1}]$ την εξής σχέση :

$$\int_{I_n} y'(t)u(t)dt = \int_{I_n} f(t,y(t))u(t)dt \quad \forall$$ *συνεχή συνάρτηση u στο δοθέν διάστημα.*

Παράδειγμα

Το ευκολότερο παράδειγμα για να κατανοήσουμε τη συνεχή μέθοδο είναι η περίπτωση που η προσέγγιση γίνεται με κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις ,δηλαδή πολυώνυμα πρώτου βαθμού. Στην περίπτωση q=2 οι συνεχείς συναρτήσεις δοκιμής ,όπως ονομάζουμε τα x , είναι κατά τμήματα σταθερές καθώς η διάσταση του χώρου δοκιμής είναι $\mathbb{P}_{q-2}(I_n)$ οπότε έχουμε

$$\int_{I_n} Y'(t)x(t) = \int_{I_n} f\big(t, Y(t)\big)x(t)\, dt$$

δηλαδή,

$$\int_{I_n} Y'(t)dt = \int_{I_n} f\big(t, Y(t)\big)dt\quad .$$

Άρα, $Y^{n+1} - Y^n = \int_{I_n} f\big(t, Y(t)\big)dt$. *(Π1)*

Θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε το δευτερό μελος χρησιμοποιώντας τον τύπο του μέσου οποτε έχουμε :

$$Y^{n+1} - Y^n = hf\left(t^{n+\frac{1}{2}}, Y\left(t^{n+\frac{1}{2}}\right)\right) \qquad n = 0, \dots, N-1$$

όπου $t^{n+\frac{1}{2}} \coloneqq (t^n + t^{n+1})/2 = t^n + \frac{h}{2}$,h η διαμέριση.

Όμως το Y είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ ένα, άρα η τιμή στο μέσο του $\mathrm{I_n}$ είναι ο μέσος όρος των τιμών της στα άκρα του διαστήματος ,άρα

$$Y\left(t^{n+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}[Y(t^n) + Y(t^{n+1})] = \frac{1}{2}(Y^n + Y^{n+1}) =: Y^{n+\frac{1}{2}} \quad .$$

Επομένως η (Π1) μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$Y^{n+1} - Y^n = hf\left(t^{n+\frac{1}{2}}, Y^{n+\frac{1}{2}}\right).$$

Θα εξετάσουμε τώρα τη συνεχή μέθοδο του Galerkin στην περίπτωση γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές δηλαδή

$y' = ay + f(t), a\epsilon\mathbb{R}$.

Τότε η συνεχής μέθοδος του Galerkin δίνει ότι :

$$Y^{\mathrm{n}+1} - \mathrm{Y^n} = a\int_{I_n} Y(t)dt + \int_{I_n} f(t)dt = haY^{n+\frac{1}{2}} + \int_{I_n} f(t)dt\ .$$

1.2 ΤΟ ΣΦΑΛΜΑ

Ένα χρήσιμο βήμα είναι η εκτίμηση του σφάλματος στη συνεχή μέθοδο. Αναγκαία για την επίτευξη είναι η εισαγωγή μιας κατάλληλης προβολής $\hat{\mathrm{y}}$ της ακριβούς λύσης y στον $\mathrm{S_h^\sigma}$.Για τον ευκολότερο προσδιορισμό του σφάλματος θα το διασπάσουμε σε 2 μέρη,$e = \rho + \theta$, ορίζοντας $\rho = y - \hat{\mathrm{y}}$ και $\theta = \hat{\mathrm{y}} - Y$ και θα τα εκτιμήσουμε με τη σειρά. Το $\theta\epsilon S_h^\sigma$, ενώ το ρ όχι αναγκαστικά. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\hat{\mathrm{y}}\ \epsilon\mathrm{S_h^\sigma}$,με τις ιδιότητες :

$$\hat{\mathrm{y}}^0 := \hat{\mathrm{y}}(a) = y_0$$

(δηλαδή στο πρωταρχικό σημείο η προβολή και η ακριβής λύση να συμπίπτουν)

και

$\int_{\alpha}^{b}(\mathrm{y}-\hat{y})'(\mathrm{t})\,\mathrm{v}'(\mathrm{t})dt=0, \quad \forall\, \mathrm{v}\in S_h^{\sigma}$ συναρτηση δοκιμης

Επιλέγοντας ως v την $\mathrm{v(t)} := \begin{cases} [y(t^n)-\hat{y}(t^n)]t & ,\alpha \le t \le t^n \\ [y(t^n)-\hat{y}(t^n)]t^n & ,t^n \le t \le b \end{cases}$

έχουμε

$$\int_{\alpha}^{b}(\mathrm{y}-\hat{y})'(\mathrm{t})\,\mathrm{v}'(\mathrm{t})dt=\int_{\alpha}^{t^n}(\mathrm{y}-\hat{\mathrm{y}})'(\mathrm{t})\,\mathrm{v}'(\mathrm{t})\mathrm{dt}+\int_{t^n}^{b}(\mathrm{y}-\hat{\mathrm{y}})'(\mathrm{t})\,\mathrm{v}'(\mathrm{t})\mathrm{dt}=0$$

$$\Longrightarrow \qquad \int_{\alpha}^{t^n}(\mathrm{y}-\hat{\mathrm{y}})'(\mathrm{t})([\mathrm{y}(\mathrm{t}^n)-\hat{\mathrm{y}}(\mathrm{t}^n)]\mathrm{t})'\mathrm{dt}=0$$

Το παραπάνω μηδενιζεται όταν $\quad ([\mathrm{y}(\mathrm{t}^n)-\hat{\mathrm{y}}(\mathrm{t}^n)]\mathrm{t})'=0$

συνεπώς ,

$$\hat{\mathrm{y}}(\mathrm{t}^n)=\mathrm{y}(\mathrm{t}^n), \mathrm{n}=0,1,\dots,\mathrm{N}\,.$$

οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφτούν και ως εξής :

$$\begin{cases} \hat{\mathrm{y}}^n=\mathrm{y}^n, \hat{\mathrm{y}}^{n+1}=\mathrm{y}^{n+1} & (1) \\ \int_{\mathrm{I}_n}(\mathrm{y}-\hat{\mathrm{y}})'(\mathrm{t})u(\mathrm{t})\mathrm{dt}=0, \forall u \in \mathrm{P}_{q-2}(\mathrm{I}_n) & (2) \end{cases} \quad (\mathrm{E}^*)$$

1.3 ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ $\hat{\mathrm{y}}$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η $\hat{y}$ είναι καλώς ορισμένη στο S_h^{σ} και ότι μόνο ένα στοιχείο έχει τις επιθυμητές ιδιότητες.

Για q=2 η $\hat{y}$ προβολή υπολογίζεται μόνο μέσω της σχέσης (1) οπότε η $\hat{y}$ είναι η συνεχής , κατα τμήματα γραμμική παρεμβάλουσα της y στους κόμβους $t^0,\dots,t^N$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $q>2$.

Γράφουμε την ŷ στην μορφή :

$$\hat{y}\,(t) = [y^n + \frac{t-t^n}{h}(y^{n+1}\text{-}y^n)] + (t - t^n)(t^{n+1} - t)\sum_{i=0}^{q-3} \alpha_i\, t^i, t\epsilon I_n\,.$$

Άν για $t = t^n$ αντικαταστήσω παρατηρώ :

$$\hat{y}(t^n) = y^n + \frac{t^n-t^n}{h}(y^{n+1} - y^n)\ + (t^n - t^n)(t^{n+1} - t)\sum_{i=0}^{q-3} a_i\, t^i = y^n$$

και για $t = t^{n+1}$:

$$\hat{y}(t^{n+1}) = \ y^n + \frac{t^{n+1}-t^n}{h}(y^{n+1} - y^n) + (t - t^n)(t^{n+1} - t^{n+1})\sum_{i=0}^{q-3} a_i\, t^i =$$

$$y^n + \frac{t^{n+1} - t^n}{h}y^{n+1} - \frac{t^{n+1} - t^n}{h}y^n = y^n + \frac{h}{h}y^{n+1} - \frac{h}{h}y^n = y^{n+1}$$

Δηλαδή ικανοποιεί την (1) .

Η δεύτερη συνθήκη της τώρα γράφεται ως εξής :

$\int_{I_n}(y - \hat{y})'(t)u_i(t)dt = 0$, $i = 1,2,\ldots,q - 2$ όπου $\{u_1,\ldots\ldots u_{q-1}\}$ μια βάση του $\mathbb{P}_{q-2}\,(I_n)$.

Επιλέγοντας $u_i(t) = t^{i-1}, i = 1,2,\ldots,q - 1$ προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα με q-2 εξισώσεις και q-2 αγνώστους. Για να δείξουμε ότι αυτο το σύστημα έχει ακριβώς μια λύση αρκεί να δείξουμε ότι το ομογενές έχει μόνο την τετριμμένη λύση.Υποθέτω ότι $y = 0,\ y^n = y^{n+1} = 0$,οπότε ,

$$\hat{y}(t) = (t - t^n)(t^{n+1} - t)\sum_{i=0}^{q-3} a_i t^i = (t - t^n)(t^{n+1} - t)v(t)$$

$$\text{με } v(t) := \sum_{i=0}^{q-3} a_i t^i\,, t \in I_n.$$

Προφανως, $v \in \mathbb{P}_{q-3}(I_n)$ και αφου κανω ολοκληρωση κατα μερη στην δευτερη σχεση της (Ε*) λαμβάνω

$$\int_{\alpha}^{b}(y - \hat{y})(t)v(t)dt = 0\ \ \forall v \in \mathbb{P}_{q-3}(I_n)$$

Αντικαθιστωντας τον τυπο της ŷ και χρησιμοποιώντας οτι y=0 στην επανω σχέση ,

$$\int_{I_n} (t-t^n)(t^{n+1}-t)v^2(t)\,dt = 0$$

Συνεπως v=0,δηλαδη $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{q-3} = 0$ ετσι το αντίστοιχο ομογενες γραμμικο συστημα εχει μονο την τετριμμενη λυση και η $\hat{y}$ υπαρχει και ειναι μοναδικη.

1.4 Εκτιμηση σφαλματος ρ=y- $\hat{y}$

Για την εκτιμηση του σφαλματος ρ καλο θα ηταν να διακρινω 2 περιπτωσεις,την q=2 και q>2.Στην πρωτη περιπτωση q=2 η αποδειξη που ακολουθει ειναι ευκολη σε αντιθεση με αυτην της q>2,που χρειαζονται επιχειρηματα λημματος *Bramble-Hilbert* οπως θα δουμε στη συνεχεια.

Για q=2 το $\hat{y}$ ανηκει στο I_n, ειναι πολυωνημο βαθμου το πολυ ενα και παρεμβαλεται στην y στα ακρα t^n,t^{n+1}.Ετσι,

$$\hat{y}(t) = y(t^n) + \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}(t-t^n), t\epsilon I_n$$

Επομενως για $t\epsilon I_n$ εχουμε

$$\begin{aligned}
\rho(t) = y(t) - \ y(t^n) - \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}(t-t^n) \\
&= \int_{t^n}^{t} y'(\sigma)d\varsigma \\
&- \int_{t^n}^{t} \frac{y(t^{n+1)} - y(t^n)}{t^{n+1} - t^n} d\sigma \\
&= \frac{t^{n+1} - t^n}{t^{n+1} - t^n} \int_{t^n}^{t} y'(\sigma)d\sigma - \frac{1}{t^{n+1} - t^n} \int_{t^n}^{t} (\,y(t^{n+1}) - y(t^n))d\sigma \\
&= \frac{1}{t^{n+1} - t^n} \int_{t^n}^{t} [(\,t^{n+1} - t^n)y'(\sigma) - (y(t^{n+1}) - y(t^n)]d\sigma \\
&= \frac{1}{h} \int_{t^n}^{t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} [y'(\sigma) - y'(\tau)]d\tau d\sigma = \frac{1}{h} \int_{t^n}^{t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\tau}^{\sigma} y''(s)dsd\tau d\sigma
\end{aligned}$$

Αν δω προσεκτικα τα διαστήματα ολοκληρωσης θα συμπαιρανω οτι ολα περιεχονται στο I_n

$$\begin{aligned}
|\rho(t)| \le \frac{1}{h} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |y''(s)| dsd\tau d\sigma = \frac{1}{h} hh \int_{t^n}^{t^{n+1}} |y''(s)| ds \\
&= h \int_{t^n}^{t^{n+1}} |y''(s)| ds
\end{aligned}$$

Αν χρησιμοποιήσω ανισοτητα Cauchy-Schwartz θα εχω

$$|\rho(t)|^2 \leq h^3 \int_{t^n}^{t^{n+1}} |y''(s)|^2 ds$$

Αρα, $\sup_{t\epsilon I_n} |\rho(t)|^2 \leq h^3 \int_{t^n}^{t^{n+1}} |y''(s)|^2 ds$.

Αφου ρ(t) ειναι συνεχης μπορω να εκφρασω το supremum ως max και καταληγω:

$$\max|\rho(t)| \leq h^2 \sup_{t\epsilon I_n} |y''(t)|$$

Για q>2, στην περιπτωση αυτη χρησιμοποιω για την αποδειξη το εξης **λημμα:**

*Λήμμα :***Εστω $\mathbf{I_n} = (\mathbf{t^n}, \mathbf{t^{n+1}}]$ ενα φραγμενο διαστημα μηκους h και q$\epsilon\mathbb{N}$ με q>1, y$\epsilon \boldsymbol{C^q}[\mathbf{t^n}, \mathbf{t^{n+1}}]$ και**

$\hat{y}\epsilon\mathbf{P_{q-1}}$ ($\mathbf{I_n}$) το στοιχειο που ικανοποιει την (2)

Τοτε,υπαρχει σταθερα c που εξαρταται μονο απο το q, τετοια ωστε για το σφαλμα <u>ρ=y- ŷ να ισχυει:</u>

$$\boldsymbol{max_{t\in I_n} |\rho(t)|^2 \leq ch^{2q-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |y^{(q)}(s) ds}$$

ιδιαιτερα εχουμε

$$\mathbf{max_{t\in I_n} |\rho(t)| \leq \sqrt{c} h^q sup_{t\epsilon I_n} |y^{(q)}(t)|}$$

(Για q=2 το εχω ηδη αποδειξει οπότε θα υποθεσω οτι q>2 και θα προχωρησω στην απόδειξη του λήμματος)

Η πρωτη θεμελιωδης ιδιοτητα της γραμμικης απεικονισης y→ ŷ ειναι οτι στην περιπτωση $\hat{y} \in \mathbb{P}_{q-1}$ (I_n) οι ŷ και y ταυτιζονται ($\hat{y} = y$) δηλαδή η απεικονιση αφηνει τα στοιχεια του $\mathbb{P}_{q-1}$ αναλλοιωτα.

Σ'αυτή την περίπτωση έχουμε ότι

$$\rho = y - \hat{y} = 0.$$

Η ιδιοτητα αυτη ειναι αποτελεσμα του παραπανω ορισμου(2) και του οτι η ŷ ειναι καλα ορισμενη.

Για να προχωρισουμε τωρα στη δευτερη θεμελιωδη ιδιοτητα θα δωσουμε καποια αλλα δεδομενα στο προβλημα μας, το διαστημα αναφορας $\mathrm{I} \coloneqq [0,1]$ το χωρο πολυωνυμων $\mathbb{P}_{\nu}$ που περιεχει πολυωνυμα βαθμου το πολυ ν στο διάστημα I .

Ετσι το προβλημα μας στο συγκεκριμενο διαστημα γράφεται :

Για $u \in C[0,1]$,ζητειται συναρτηση $\tilde{u} \in \mathbb{P}_{q-1}$ τετοια ωστε

$$\begin{cases} \tilde{u}(0) = u(0), \tilde{u}(1) = u(1) \\ \int_0^1 (u - \tilde{u})(t)\hat{v}(t)dt = 0 \ \forall \hat{v} \in \mathbb{P}_{q-3} \end{cases} \quad \text{(E3).}$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω σχέση, με ολοκλήρωση κατα μέλη, γράφεται ισοδύναμα ως εξής :

$$\begin{cases} \tilde{u}(0) = u(0), \tilde{u}(1) = u(1) \\ \int_0^1 (u - \tilde{u})'(t)\hat{v}(t)dt = 0 \quad \forall \hat{v} \in \mathbb{P}_{q-2} \end{cases}$$

Θα αποδειξω τωρα οτι η $u \to \tilde{u}$ ειναι ευσταθης γραμμικη απεικονιση,δηλαδη υπαρχει σταθερα c,που εξαρταται απο το βαθμο q αλλα οχι απο τη u,τετοια ωστε:

$$max_{0 \le t \le 1} \left| \tilde{u}(t) \right| \le c \ max_{0 \le t \le 1} \left| u(t) \right|$$

Θα υποθεσω προσωρινα οτι οι τιμες στα ακρα ειναι 0,δηλαδη $u(0) = u(1) = 0$ και ετσι $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0$,οποτε η $\tilde{u}$ ειναι της μορφης $\tilde{u}(t) = t(1-t)\hat{v}(t)$ με $\hat{v} \in \mathbb{P}_{q-3}$. Τώρα έχουμε

$$\int_0^1 \left| \tilde{u}(t) \right|^2 dt = \int_0^1 t^2(1-t^2) \left| \hat{v}(t) \right|^2 dt \le \int_0^1 t(1-t) \ \left| \hat{v}(t) \right|^2 dt$$
$$= \int_0^1 \tilde{u}\,(t)\hat{v}(t)dt = \int_0^1 u\hat{v}(t)dt$$

Από την (E3) . Άρα

$$\int_0^1 \left| \tilde{u}(t) \right|^2 dt \le max_{0 \le t \le 1} \left| u(t) \right| \int_0^1 \left| \ \hat{v}(t) \right| dt$$

Το αριστερο μελος της ανισοτητας ειναι το τετραγωνο μιας νορμας της $\tilde{u}$ και ο δευτερος παραγοντας του δεξιου μελους μια νορμα της $\tilde{u}$.Αλλα επειδη δουλευουμε σε χωρο πεπερασμενης διαστασης ($\mathbb{P}_{q-1}$) οι νορμες ειναι ισοδυναμες,δηλαδη υπαρχει σταθερα c^* τετοια ωστε:

$max_{0\le t\le 1}\left|\,\widetilde{u}(t)\right| \le c^* max_{0\le t\le 1}\left|u(t)\right|$ (E2)

στην περιπτωση που $u(0)=0=u(1)$.

Τωρα στην γενικη περιπτωση ισχυει

$$max_{0\le t\le 1}\left|\,\widetilde{u}(t)\right| \le c\, max_{0\le t\le 1}\left|u(t)\right|$$

(οπως ειδαμε προηγουμενως) με $c=2c^*+1$.

Οντως ,αν ορισω $w(x) \coloneqq u(x)-u(0)-[u(1)-u(0)]x$ παρατηρω οτι

$$w(0)=u(0)-u(0)-[u(1)-u(0)]0=0$$

$$w(1)=u(1)-u(0)-[u(1)-u(0)]=0$$

Δηλαδη

$w(0)=w(1)$ και

$\widetilde{w}(x)=\tilde{u}(x)-u(0)-[u(1)-u(0)]x.$

Αν τοποθετησω τωρα στην (E3) τα w και $\widetilde{w}$ θα δω οτι ικανοποιειται διότι

$\int_0^1 (\mathrm{w}-\widetilde{\mathrm{w}})(\mathrm{t})\hat{\mathrm{v}}(\mathrm{t})\mathrm{dt}=$

$\int_0^1 (\mathrm{u}(\mathrm{x})-\mathrm{u}(0)-[\mathrm{u}(1)-\mathrm{u}(0)]\mathrm{x}-\tilde{\mathrm{u}}\,(\mathrm{x})+\mathrm{u}(0)+[\mathrm{u}(1)-\mathrm{u}(0)]\mathrm{x})\mathrm{dx}=$
$=\int_0^1 (\mathrm{u}-\tilde{\mathrm{u}})(\mathrm{t})\hat{\mathrm{v}}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$

που ισχυει απο την υποθεση.

Επισης παρατηρούμε ότι η $\widetilde{\mathrm{w}}(\mathrm{x})$ ειναι το αθροισμα ενος πολυωνυμου στο $\mathbb{P}_{\mathrm{q}-1}$(την $\tilde{\mathrm{u}}(\mathrm{x})$ δηλαδη) και ενος πολυωνυμου πρωτου βαθμου ($-\mathrm{u}(0)-[\mathrm{u}(1)-\mathrm{u}(0)]\mathrm{x}$) αρα ανηκει στο $\mathbb{P}_{\mathrm{q}-1}$.

Επιπλεον,

$\widetilde{\mathrm{w}}(\mathrm{x})=\tilde{\mathrm{u}}(\mathrm{x})-\mathrm{u}(0)-[\mathrm{u}(1)-\mathrm{u}(0)]\mathrm{x} \Leftrightarrow$

$\tilde{\mathrm{u}}(\mathrm{x})=\widetilde{\mathrm{w}}(\mathrm{x})+\mathrm{u}(0)+[\mathrm{u}(1)-\mathrm{u}(0)]\mathrm{x}$

Υπολογιζω τωρα το $max\left|\tilde{u}(x)\right|$ που θα ειναι μικροτερο ή ισο των max των δυο αλλων ορων(ο δευτερος ορος ειναι πολυωνυμο πρωτου βαθμου αρα το max το εμφανιζει στα ακρα u(1) , u(0))

Αρα

$\max_{0\le t\le 1}\left|\tilde{u}(x)\right| \le \max\left(\left|u(0)\right|, \left|u(1)\right|\right) + \max_{0\le t\le 1}\left|\tilde{w}(t)\right| \le$
$\max\left(\left|u(0)\right|, \left|u(1)\right|\right) + c^{*}\max_{0\le t\le 1}\left|w(t)\right|$ (αντικατεστησα το $\tilde{w}(t)$ με $w(t)$οπως στην (E2))

$$\le \max\left(\left|u(0)\right|, \left|u(1)\right|\right) + c^{*}\max\left(\left|u(0)\right|, \left|u(1)\right|\right) + c^{*}\max_{0\le t\le 1}\left|u(t)\right|$$

$$\le (c^{*}+1)\max\left(\left|u(0)\right|, \left|u(1)\right|\right) + c^{*}\max_{0\le t\le 1}\left|u(t)\right| \le (2c^{*}+1)\max_{0\le t\le 1}\left|u(t)\right|$$

Απεδειξα ηδη την ευσταθεια στο διαστηνα αναφορας και τωρα θα αποδειξω ευσταθεια της γραμμικης απεικονισης y→ $\hat{y}$ για το γενικο διαστημα $\mathrm{I_n}$.

Δηλαδη στοχος μου ειναι να δειξω οτι η εκτιμηση

$$\max_{0\le t\le 1}\left|\tilde{u}(x)\right| \le c\max_{0\le t\le 1}\left|u(t)\right|$$

που ισχυει για το διαστημα αναφορας I,ισχυει και για τυχαιο διάστημα $\mathrm{I_n}$ και η σταθερα c δεν εξαρταται απο το διαστημα $\mathrm{I_n}$.

Ισχυριζομαι οτι για συναρτησεις $y \in C[t^n, t^{n+1}]$ ισχυει η εκτιμηση :

$$\max_{t^n\le t\le t^{n+1}}\left|\tilde{y}(t)\right| \le \max_{t^n\le t\le t^{n+1}}\left|y(t)\right|$$

Έιναι σημαντικο να επισημανω οτι η απεικονιση

$$\mathbb{P}_{q-3}(\mathrm{I_n}) \to \mathbb{P}_{q-3}, v \to \hat{v},\ \hat{v}(s) \coloneqq v(t^n + (t^n - t^n)s),$$

ειναι αμφιμονοσημαντη Ορίζοντας τις συναρτήσεις $u, \tilde{u}: I \to \mathbb{R}$, $u(s) \coloneqq y(t^n + (t^{n+1} - t^n)s)$ και

$$\tilde{u}(s) \coloneqq \tilde{y}(t^n + (t^{n+1} - t^n)s)$$

διαπιστώνουμε αμέσως τα ακόλουθα :

$\tilde{u} \in \mathbb{P}_{q-1}$, $\tilde{u}(0) = u(0), \tilde{u}(1) = u(1)$ και

$$\int_0^1 (u - \tilde{u})(s)\hat{v}(s)ds = \int_0^1 (y - \tilde{y})(t^n + (t^{n+1} - t^n)s)v(t^n + (t^{n+1} - t^n)s)ds$$

$$= \frac{1}{t^{n+1} - t^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (y - \tilde{y}) v(t) dt = 0$$

Αλλαξα το ολοκληρωμα θετοντας $t = t^n + (t^{n+1} - t^n)s$ αρα $dt = (t^{n+1} - t^n)ds$.

Και για τα ακρα οταν $s \to 0, t \to t^n, s \to 1, t \to t^n + (t^{n+1} - t^n) = t^{n+1}$ οποτε η $\tilde{u}$ ικανοποιει την (E3) και προφανως :

$$\max_{0 \le s \le 1} |u(s)| = \max_{t^n \le t \le t^{n+1}} |y(t)| \quad \text{(E4)}$$

Αφου εχουν αποδειχθει πλεον οι δυο θεμελιωδεις ιδιοτητες της γραμμικης απεικονισης $y \to \tilde{y}$, ειμαστε τωρα ετοιμοι να αποδειξουμε την παρακάτω εκτίμηση

$$\max_{t \in I_n} |\rho(t)|^{\mathbf{2}} \le c h^{2q-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |y^{(q)}(s)|^2 ds.$$

Εστω y μια συναρτηση οπως στο **λημμα** και $p_{q-1} \in \mathbb{P}_{q-1}(I_n)$ ενα πολυωνυμο.Προφανώς ισχύει $\tilde{p}_{q-1} = p_{q-1}$ και συμφωνα με την (E4):

$$\max_{t^n \le t \le t^{n+1}} |(\tilde{y} - p_{q-1})(t)| \le c \max_{t^n \le t \le t^{n+1}} |(y - p_{q-1})(t)|$$

Τωρα $y - \tilde{y} = (y - p_{q-1}) - (\tilde{y} - p_{q-1})$ και εφαρμοζω τη τριγωνικη ανισοτητα ως εξης :

$|y - \tilde{y}| \le |y - p_{q-1}| + |\tilde{y} - p_{q-1}|$ οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \max|y - \tilde{y}| &\le \max|y - p_{q-1}| + \max|\tilde{y} - p_{q-1}| \\ &\le \max|y - p_{q-1}| + c\max|y - p_{q-1}| = (c+1)\max|y - p_{q-1}|. \end{aligned}$$

Ισοδύναμα

$$\max_{t^n \le t \le t^{n+1}} |(y - \tilde{y})(t)| \le (1 + c)\max_{t^n \le t \le t^{n+1}} |(y - p_{q-1})(t)|.$$

Η αποδειξη εχει τελειωσει επιλεγοντας ως $p_{q-1} \in \mathbb{P}_{q-1}(I_n)$ το πολυωνυμο Taylor της y ως προς το σημειο t^{n+1}.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ

Θα εξετάσω τώρα το σφάλμα συνέπειας για την προβολή $\hat{y} \in S_h^\sigma$.

Έστω $E \in \mathrm{P}_{q-2}(I_n)$

$$\int_{I_n} E(t)x(t)dt = \int_{I_n} \left[\hat{y}' - f\big(t, \hat{y}(t)\big)\right]x(t)dt, \forall\, x \in \ \mathbb{P}_{q-2}(I_n)$$

Γνωρίζω επίσης ότι x ∈ $\mathrm{P}_{q-2}(I_n)$ και σύμφωνα με την σχέση

$$\int_{I_n} (y - \hat{y})'(t)u(t)dt = 0 \ \forall u \in \mathbb{P}_{q-2}(I_n)$$

έχω ότι

$\int_{I_n} \hat{y}'\,(t)x(t)dt = \int_{I_n} y'\,(t)x(t)dt$ (με το x να παίρνει το ρόλο του u(t))

Από τις πάνω σχέσεις προκύπτει ότι :

$$\int_{I_n} E(t)x(t)dt = \int_{I_n} \left[f\big(t, y(t)\big) - f\big(t, \hat{y}(t)\big)\right]x(t)dt \ \forall x \in \ \mathbb{P}_{q-2}(I_n)$$

Επιλέγω $x(t) = E(t)$ και έτσι λαμβάνω :

$$\int_{I_n} E^2\,(t)dt = \int_{I_n} (f\big(t, y(t)\big) - f(t, \hat{y}\,(t))E(t)dt \quad \forall x \ \in \ \mathbb{P}_{q-2}(I_n)$$

Δηλαδή ,

$$\int_{I_n} |E\,(t)|^2 dt = \int_{I_n} (f\big(t, y(t)\big) - f(t, \hat{y}\,(t))E(t)dt.$$

Για το δεύτερο μέλος θα χρησιμοποιήσω αρχικά τη συνθήκη Lipschitz οπότε

$$\int_{I_n} |(f\big(t, y(t)\big) - f(t, \hat{y}\,(t))|\,|E(t)|dt \leq$$

$$L \int_{I_n} |y(t) - \hat{y}(t)\,|\,|E(t)|dt$$

$\leq L(\int_{I_n} |y(t) - \hat{y}(t)|^2\, dt)^{\frac{1}{2}} (\int_{I_n} |E(t)|^2\, dt)^{\frac{1}{2}}$ λόγω ανισότητας Cauchy-Schwarz.

Και τώρα από αριθμητική-γεωμετρική ανισότητα η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$\int_{I_n} |E(t)|^2 dt \le \frac{((L\int_{I_n} |y(t)-\hat{y}(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}})^2 + (\int_{I_n} |E(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}})^2}{2} =$$

$$= \frac{L^2}{2}\int_{I_n} |y(t)-\hat{y}(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_{I_n} |E(t)|^2 dt$$

Οπότε τελικά έχω :

$$\int_{I_n} |E(t)|^2 dt \le \frac{L^2}{2}\int_{I_n} |y(t)-\hat{y}|^2 dt + \frac{1}{2}\int_{I_n} |E(t)|^2 dt \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\int_{I_n} |E(t)|^2 dt \le \frac{L^2}{2}\int_{I_n} |y(t)-\hat{y}|^2 dt$$

Έχω αποδείξει ήδη ότι :

$$max_{t\in I_n} |p(t)|^2 \le Ch^{2q-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |y^{(q)}(s)|^2 ds$$

Έτσι από τις 2 πάνω σχέσεις έχω :

$$\frac{1}{2}\int_{I_n} |E(t)|^2 dt \le L^2 \int_{t^n}^{t^{n+1}} Ch^{2q-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |y^{(q)}|^2 ds dt$$

$$= L^2(t^{n+1}-t^n)Ch^{2q-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |y^{(q)}|^2 ds$$

$$= L^2 h C h^{2q-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |y^{(q)}|^2 ds = C' h^{2q} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |y^{(q)}|^2 ds \ .$$

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Τώρα θα αποδείξω την ευστάθεια της συνεχής μεθόδου του Galerkin

Έστω $Y \epsilon S_h^\sigma$ η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών όπως ήδη έχει οριστεί με προκαθορισμένη αρχική τιμή $Y(\alpha) = y_0$ και $Z \epsilon S_h^\sigma$ μία άλλη λύση του ίδιου προβλήματος με αρχική τιμη $Z(\alpha) = z_0$ τέτοια ώστε

$\int_{I_n} Z'(t)x(t)dt = \int_{I_n} f\big(t, Z(t)\big)x(t)dt \quad \forall x \in \mathbb{P}_{q-2}(I_n)$ για $n = 0,1, \dots, N-1$ και θεωρώ τη διαφορά $\zeta := Y - Z$.

Αφαιρώ κατά μελή τις εξής σχέσεις :

$\int_{I_n} Y'(t)x(t)dt = \int_{I_n} f\big(t, Y(t)\big)x(t)dt$
$\int_{I_n} Z'(t)x(t)dt = \int_{I_n} f\big(t, Z(t)\big)x(t)dt$

και λαμβάνω

$$\int_{I_n} (Y'(t) - Z'(t))x(t)dt = \int_{I_n} (f\big(t, Y(t)\big) - f\big(t, Z(t)\big))x(t)dt \Rightarrow$$

$$\int_{I_n} \zeta'(t)x(t)dt = \int_{I_n} (f\big(t, Y(t)\big) - f\big(t, Z(t)\big))x(t)dt.$$

Για να συνεχίσω την απόδειξη ευστάθειας πρέπει να αναφέρω τους τύπους ολοκλήρωσης Gauss και να προχωρήσω λύνοντας με τη βοήθειά τους.

Έστω $q \in \mathbb{N}$ με q>1 και οι κόμβοι $0<\tau_1<\dots.<\tau_{q-1}<1$,τα σημεία Legendre στο διάστημα (0,1), και $w_1, \dots., w_{q-1}$ τα βάρη τέτοια ώστε ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης $Q_{q-1}(f)$,

$$Q_{q-1}(f) = \sum_{i=1}^{q-1} w_i f(\tau_i)$$

να ολοκληρώνει στο [0,1] πολυώνυμα βαθμού έως και 2q-3 ακριβώς, δηλαδή

$$Q_{q-1}(p) = \int_0^1 p(t)dt \quad \forall p \epsilon \mathrm{P}_{q-3}$$

Σημεία Legendre σε ένα διάστημα $\mathrm{I_n}=(\mathrm{t^n}, \mathrm{t^{n+1}}]$ με μήκος h,ορίζονται ως εξής

$\mathrm{t^{n,i}} := \mathrm{t^n} + \mathrm{h}\tau_\mathrm{i}, \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{q} - 1$ και τα βάρη τους τώρα είναι $\mathrm{hw_i}$, $\mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{q} - 1$,δηλαδή ο τύπος του Gauss στο $\mathrm{I_n}$ γράφεται :

$$\mathrm{Q_{q-1}(f)} = \mathrm{h} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{q}-1} \mathrm{w_i f(t^{n,i})}$$

και αυτός ο τύπος ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού έως και 2q-3 στο $\mathrm{I_n}$ (δηλαδή βαθμός γινομένου ενός πολυωνύμου βαθμού q-1 με την πρώτη του παράγωγο).

Λημμα:

Εστω 0<τ_1<$\tau_{2<\cdots<}\tau_{q-1}$<1 τα σημεια του Legendre στο διαστημα [0,1] και $t^{n,i} = t^n$+hτ_i, i=1,2,...,q-1, τα αντιστοιχα σημεια στο I_n= (t^n,t^{n+1}].Υπαρχει $\Theta\epsilon\mathbb{P}_{q-2}$($I_n$) και $\Theta_1, \Theta_2\epsilon\mathbb{P}_{q-2}$($I_n$) πολυωνυμα παρεμβολης των συναρτησεων Θ και φ με φ(t) :=$h\Theta(t)\big/(t-t^n)$, tϵI_n,στους κομβους

$t^{n,i}, i = 1, 2 \ldots, q-1$.Τοτε ισχυουν

$\int_{I_n}\Theta'(t)\Theta_1(t)dt$ =$\int_{I_n}\Theta'(t)\Theta(t)dt$ και

$$h\int_{I_n}\Theta'(t)\Theta_2(t)dt \ \geq \frac{1}{5}\int_{I_n}|\Theta(t)|^2\,dt - ch\,(|\Theta(t^{n+1})|^2+|\Theta(t^n)|^2)$$

Με τη βοηθεια του λημματος συνεχιζω την αποδειξη επιλεγοντας $\chi := \tilde{\zeta}$ (δηλαδη $\tilde{\zeta}\ \epsilon\mathbb{P}_{q-2}(\mathrm{I_n})$ ειναι το πολυωνυμο παρεμβολης του ζ στους κομβους στα σημεια $t^{n,i}, i = 1,2, \ldots, q-1$)και ετσι εχω:

$$\int_{I_n}\zeta'(t)\zeta(t)dt = \int_{I_n}[f(t,Y(t)) - f(t,Z(t)]\tilde{\zeta}(t)dt \quad (E0)$$

$$\int_{I_n}(\frac{1}{2}\zeta^2(t))'dt = \int_{I_n}[f(t,Y(t) - f(t,Z(t))]\tilde{\zeta}(t)dt$$

$$|\zeta^{n+1}|^2=|\zeta^n|^2+2\int_{I_n}[f(t,Y(t) - f(t,Z(t))]\tilde{\zeta}(t)dt$$

Τωρα με τη βοηθεια της συνθηκης Lipschitz :

$$[f(t,Y(t)) - f(t,Z(t))]\,\tilde{\zeta}(t) \leq L|Y(t) - Z(t)|\,|\tilde{\zeta}(t)| = \mathrm{L}\,|\zeta(t)|\,|\tilde{\zeta}(\mathrm{t})|$$

Και χρησιμοποιώντας την αριθμητικη-γεωμετρικη ανισοτητα λαμβάνουμε:

$$L|\zeta(t)|\,|\tilde{\zeta}(\mathrm{t})| \leq \frac{L}{2}(|\zeta(t)|^2 + |\tilde{\zeta}(\mathrm{t})|^2).$$

Αρα η (Ε0) λογω των παραπανω γινεται:

$$|\zeta^{n+1}|^2 \leq |\zeta^n|^2 + 2\int_{I_n} \frac{L}{2}\left(|\zeta(t)|^2 + |\tilde{\zeta}(t)|^2\right)dt =$$

$$= |\zeta^n|^2 + L\int_{I_n} |\zeta(t)|^2\, dt + L\int_{I_n} |\tilde{\zeta}(t)|^2 dt.$$

Τωρα σκοπος μου ειναι να εκφρασω το $|\tilde{\zeta}(t)|$ως προς το $|\zeta(t)|$.

Γνωριζω οτι το ζ^2 ειναι βαθμού $2q-2$ (καθως το ζ ειναι βαθμου $q-1$) και εχει μεγιστοβαθμιο όρο με μη αρνητικο συντελεστη,συνεπώς:

$$h\sum_{i=1}^{q-1} w_i |\zeta(t^{n,i})|^2 \leq \int_{I_n} |\zeta(t)|^2 dt \quad \text{(E1)}.$$

Και το $\tilde{\zeta}^2$ ολοκληρωνεται ακριβώς συμφωνα με τον τυπο του Gauss οπότε έχουμε:

$$\int_{I_n} |\tilde{\zeta}(t)|^2\, dt = h\sum_{i=1}^{q-1} w_i |\zeta(t^{n,i})|^2.$$

Αρα

$$\int_{I_n} |\tilde{\zeta}(t)|^2\, dt \leq \int_{I_n} |\zeta(t)|^2\, dt \quad \text{(η ζητούμενη σχέση)}$$

Και τωρα η (Ε0) γινεται :

$$|\zeta^{n+1}|^2 \leq |\zeta^n|^2 + 2L\int_{I_n} |\zeta(t)|^2\, dt \quad .$$

Συνεχιζω πλεον με σκοπο να αναλυσω και τον δευτερο ορο του δεξιού μελους της παραπανω σχέσης οπότε χρησιμοποιω τη δευτερη σχεση του λημματος .Επιλέγω $\chi := \tilde{\zeta}$, δηλαδή $\tilde{\zeta} \in \mathbb{P}_{q-2}(I_n)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της συνάρτησης $h\zeta(t)\big/(t-t^n)$ στα σημεία $t^{n,i}, i = 1, \ldots, q-1$

και έχω

$$h\int_{I_n} \zeta'(t)\tilde{\zeta}(t)dt \geq \frac{1}{5}\int_{I_n} |\zeta(t)|^2 dt - ch\,(|\zeta(t^{n+1})|^2 + |\zeta(t^n)|^2)$$

ισοδύναμα

$$\frac{1}{5}\int_{I_n} |\zeta(t)|^2 \leq h\int_{I_n} \zeta'(t)\tilde{\zeta}(t)dt + ch\left(|\zeta(t^{n+1})|^2 + |\zeta(t^n)|^2\right)$$, c σταθερά

$$\frac{1}{5}\int_{I_n} |\zeta(t)|^2 \leq h\int_{I_n}[f(t,Y(t)) - f(t,Z(t))]\tilde{\zeta}(t)dt + ch\,(|\zeta(t^{n+1})|^2 + |\zeta(t^n)|^2).$$

Ομοια με πριν λογω των συνθηκων Lipschitz και αριθμητικης-γεωμετρικης ανισοτητας :

$$[f(t,Y(t)) - f(t,Z(t))]\tilde{\zeta}(t) \le L|\zeta(t)||\tilde{\zeta}(t)| \le \frac{L}{2}(|\zeta(t)|^2 + |\tilde{\zeta}(t)|^2)$$

$\frac{1}{5}\int_{I_n}|\zeta(t)|^2 dt \le h\int_{I_n}[f(t,Y(t)) - f(t,Z(t))]\tilde{\zeta}(t)dt + ch(|\zeta(t^{n+1})|^2 + |\zeta(t^n)|^2) \Rightarrow$

$\frac{1}{5}\int_{I_n}|\zeta(t)|^2 dt \le \frac{hL}{2}\int_{I_n}|\zeta(t)|^2 + \frac{hL}{2}\int_{I_n}|\tilde{\zeta}(t)|^2 + ch(|\zeta(t^{n+1})|^2 + |\zeta(t^n)|^2)$
(E2)

Και μέσω της (E1) εχω

$$\begin{aligned}\int_{I_n}|\tilde{\zeta}(t)|^2 dt &= h\sum_{i=1}^{q-1} w_i|\tilde{\zeta}(t^{n,i})|^2 = h\sum_{i=1}^{q-1} w_i\frac{h^2|\zeta(t^{n,i})|^2}{(t^{n,i}-t^n)^2}\\ &= h\sum_{i=1}^{q-1} w_i\frac{h^2|\zeta(t^{n,i})|^2}{h^2\tau_i^2} \le \frac{1}{\tau_1^2}\left(h\sum_{i=1}^{q-1} w_i|\zeta(t^{n,i})|^2\right)\\ &\le \frac{1}{\tau_1^2}\int_{I_n}|\zeta(t)|^2 dt\end{aligned}$$

Και ετσι η (E2) δινει :

$$\frac{1}{5}\int_{I_n}|\zeta(t)|^2 dt \le ch(|\zeta(t^{n+1})|^2 + |\zeta(t^n)|^2) + \frac{hL}{2}\int_{I_n}|\zeta(t)|^2 dt + \frac{hL}{2\tau_1^2}\int_{I_n}|\zeta(t)|^2 dt$$

$$\left(\frac{1}{5} - \frac{hL}{2}\left(1+\frac{1}{\tau_1^2}\right)\right)\int_{I_n}|\zeta(t)|^2 dt \le ch(|\zeta(t^{n+1})|^2 + |\zeta(t^n)|^2)$$

Για αρκετα μικρο h οπως h$\le 1/[5L\left(1+\frac{1}{\tau_1^2}\right)]$,εχουμε οτι :

$$\begin{aligned}\int_{I_n}|\zeta(t)|^2 dt &\le \frac{ch}{\frac{1}{5} - \frac{hL}{2}\left(1+\frac{1}{\tau_1^2}\right)}(|\zeta(t^{n+1})|^2 + |\zeta(t^n)|^2)\\ &\le \frac{ch}{\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\frac{L\left(1+\frac{1}{\tau_1^2}\right)}{5L\left(1+\frac{1}{\tau_1^2}\right)}}(|\zeta(t^{n+1})|^2 + |\zeta(t^n)|^2)\\ &= 10ch(|\zeta(t^{n+1})|^2 + |\zeta(t^n)|^2)\end{aligned}$$

Απο την (E0) και την παραπάνω σχέση εχω:

$$\int_{I_n} |\zeta(t)|^2 dt \leq 10ch\left(|\zeta(t^{n+1})|^2 + |\zeta(t^n)|^2\right)$$

$|\zeta^{n+1}|^2 \leq |\zeta^n|^2 + 2L\int_{I_n} |\zeta(t)|^2 \, dt$

$|\zeta^{n+1}|^2 \leq |\zeta^n|^2 + 2L10ch\left(|\zeta(t^{n+1})|^2 + |\zeta(t^n)|^2\right)$

$$(1-20chL)|\zeta^{n+1}|^2 \leq (1+20chL)|\zeta^n|^2$$

Επιλεγω για ευκολια $C = 20cL$ και για συγκεκριμενο h$< {}^{1}/_{2C}$ ισχύει

$$(1-Ch)|\zeta^{n+1}|^2 \leq (1+Ch)|\zeta^n|^2$$

$$|\zeta^{n+1}|^2 \leq \frac{(1+Ch)}{(1-Ch)}|\zeta^n|^2 \leq (1+4Ch)|\zeta^n|^2.$$

Γνωριζω απο το **λημμα :**

Αν $\mathbf{d_{i+1} \leq (1+\delta)d_i + k}$ **τοτε** $\mathbf{d_i \leq e^{n\delta}d_0 + k\frac{e^{n\delta}-1}{\delta}}$

Εδω $d_{i+1} = |\zeta^{n+1}|$, $d_i = |\zeta^n|$ επεται $d_0 = \zeta^0$ και δ=4C, k=0

$|\zeta^n| \leq |\zeta^0| e^{4Chn} = |\zeta^0| e^{4C(t^n - a)}$

Οποτε βαζοντας τετραγωνικη ριζα και γνωρίζοντας οτι $t^n - \alpha \leq b - \alpha$ (αφου το t^nβρισκεται αναμεσα στα ακρα α, b) λαμβάνουμε

$$\max_{0\leq n\leq N}|\zeta^n| \leq e^{2C(b-\alpha)}|\zeta^0|$$

$$\max_{0\leq n\leq N}|Y(t^n) - Z(t^n)| \leq e^{2C(b-\alpha)}|Y(\alpha) - Z(\alpha)|$$

που ειναι η επιθυμητη ιδιοτητα ευσταθειας στους κομβους.

Γενικα γνωριζω απο την αριθμητικη αναλυση οτι σε καθε χωρο πεπερασμενης διαστασης , οπως ο $\mathbb{P}_q$ στον οποίο δουλευουμε, οι νορμες ειναι ισοδυναμες.

Αλλιώς

$\forall x$ ∈X υπαρχει θετικη σταθερα Μ τετοια ωστε $\|x\|_{L_2} \leq M\|x\|_{L_\infty}$. Έτσι προκυπτει η εξής σχέση:

$$\max_{\alpha\le x\le b}|u(x)|^2 \le \frac{c}{b-\alpha}\int_\alpha^b |u(x)|^2\,dx$$

Για να αποδειξω την ευσταθεια σε ολοκληρο το διαστημα [α,b] εχω οτι :

$$\sup_{t\in I_n}|\zeta(t)|^2 \le \frac{\tilde{c}}{h}\int_{I_n}|\zeta(t)|^2\,dt \le \frac{\tilde{c}}{h}10ch\left(|\zeta(t^{n+1})|^2 + |\zeta(t^n)|^2\right)$$
$$= 10c\tilde{c}\left(|\zeta(t^{n+1})|^2 + |\zeta(t^n)|^2\right)$$

Βαζοντας ριζα και αφου λαβουμε υποψιν μας την ευσταθεια στους κομβους οδηγουμαστε στην $\max_{\alpha\le t\le b}|\zeta(t)| \le \sqrt{20c\tilde{c}}e^{2C(b-\alpha)}|\zeta^0|$

$$\max_{\alpha\le t\le b}|Y(t)-Z(t)| \le 2\sqrt{20c\tilde{c}}e^{2C(b-\alpha)}|Y(\alpha)-Z(\alpha)|.$$

Η επιθυμητη ιδιοτητα ευσταθειας σε ολο το διαστημα [α,b].

Θα δειξω τωρα οτι η συνεχης μεθοδος ειναι Α-ευσταθης. θεωρω τη διαφορικη εξισωση

$$\begin{cases} y' = f(t,y) = \lambda y, \lambda < 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$ (άκαμπτο σύστημα)

τοτε $|\zeta^{n+1}|^2 \le |\zeta^n|^2 + 2\lambda\int_{I_n}\zeta(t)\tilde{\zeta}(t)\,dt$.

Το $\zeta \in \mathbb{P}_{q-1}$ και $\tilde{\zeta} \in \mathbb{P}_{q-2}$ αρα το γινομενο τους $\zeta\tilde{\zeta} \in \mathbb{P}_{2q-3}$ επομενως μπορω να το ολοκληρωσω συμφωνα με τον τυπο του Gauss. Συνεπως ,αφου οι τιμες στους κομβους ειναι ιδιες,τα ολοκληρωματα τους ειναι ιδια. Επομενως,

$|\zeta^{n+1}|^2 \le |\zeta^n|^2 + 2\lambda\int_{I_n}|\tilde{\zeta}(t)|^2 dt \le |\zeta^n|^2$,αφου $\lambda < 0$

$$|Y(t^{n+1}) - Z(t^{n+1})| \le |Y(t^n) - Z(t^n)|$$

Το ιδιο γενικευεται και αν το λ ειναι μιγαδικος με αρνητικο πραγματικο μελος. Τοτε θα στηριζομουν στην ολοκληρωση της διαφορικης εξισωσης $y' = -\lambda y$ με $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$

ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Θα αποδείξω τη σύγκλιση για τη συνεχή μέθοδο του Galerkin.

Έχω ορίσει ως y την ακριβή λύση και ως Y την προσέγγιση και θέλω να εκτιμήσω το σφάλμα $e := y - Y$,έχοντας θέσει όπως παραπάνω $\rho := y - \hat{y}$ και $\theta := \hat{y} - Y$ για να γράψω το e σε μορφή $e = \rho + \theta$.Το ρ το έχω ήδη υπολογίσει οπότε απομένει να εκτιμήσω το θ.

Ξεκινάω αφαιρώντας τις εξής σχέσεις τις οποίες έχω προαναφέρει (έχοντας ως σκοπό στη σχέση μου να εμφανίσω το θ').

$$\int_{I_n} E(t)x(t)dt = \int_{I_n} \left[\hat{y}'(t) - f\big(t, \hat{y}(t)\big)\right]x(t)dt$$

$$\int_{I_n} f\big(t, Y(t)\big)x(t)dt = \int_{I_n} Y'(t)x(t)dt$$

οπότε λαμβάνουμε τα εξής :

$$\int_{I_n} E(t)x(t)dt - \int_{I_n} f\big(t, Y(t)\big)x(t)dt$$
$$= \int_{I_n} y'(t)x(t)dt - \int_{I_n} f\big(t, \hat{y}(t)\big)x(t)dt - \int_{I_n} Y'(t)x(t)dt$$

ισοδύναμα

$$\int_{I_n} E(t)x(t)dt + \int_{I_n} f\big(t, \hat{y}(t)\big)x(t)dt$$
$$- \int_{I_n} f\big(t, Y(t)\big)x(t)dt = \int_{I_n} \big(y'(t) - Y'(t)\big)x(t)dt \quad \Rightarrow$$

$$\int_{I_n} E(t)x(t)dt + \int_{I_n} [f\big(t, \hat{y}(t) - f\big(t, Y(t)\big)\big]x(t)dt$$
$$= \int_{I_n} \theta'(t)x(t)dt \,(1) \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{P}_{q-2}\,(I_n).$$

Θέτοντας τώρα x=$\tilde{\theta}$ και κάνοντας τα ίδια με αυτά που έκανα στην απόδειξη της ευστάθειας βρίσκουμε ότι :

$$|\theta^{n+1}|^2 \leq |\theta^n|^2 + 2L\int_{I_n} |\theta(t)|^2\,dt + \int_{I_n} E(t)\tilde{\theta}(t)dt \ (2)$$

Θέλω τώρα να υπολογίσω τον τελευταίο όρο του δεύτερου μέλους της παραπάνω σχέσης .

Από ανισότητα Cauchy-Schwartz :

$$\int_{I_n} E(t)\tilde{\theta}(t)dt \leq (\int_{I_n} |E(t)|^2\,dt)^{\frac{1}{2}}(\int_{I_n} |\tilde{\theta}(t)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Και τώρα από αριθμητική-γεωμετρική ανισότητα:

$$\left(\sqrt{\int_{I_n} |E(t)|^2 dt \int_{I_n} |\tilde{\theta}(t)dt}\right)^2 \leq \frac{\int_{I_n} |E(t)|^2 + \int_{I_n} |\tilde{\theta}(t)|^2 dt}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{I_n} |E(t)|^2 dt+\frac{1}{2}\int_{I_n} |\tilde{\theta}(t)|^2 dt$$

Συνεπώς λαμβάνουμε τελικά:

$$|\theta^{n+1}|^2 \leq |\theta^n|^2 + 2L\int_{I_n} |\theta(t)|^2\,dt + \int_{I_n} E(t)\tilde{\theta}(t)dt$$

$$\leq |\theta^n|^2 + 2L\int_{I_n} |\theta(t)|^2\,dt + \frac{1}{2}\int_{I_n} |\theta(t)|^2 + \frac{1}{2}\int_{I_n} |E(t)|^2 dt=$$

$$=|\theta^n|^2 + (2L + \frac{1}{2})\int_{I_n} |\theta(t)|^2 + \frac{1}{2}\int_{I_n} |E(t)|^2 dt \quad (2)$$

Τώρα θα εκτιμήσω τον δεύτερο όρο της (2)

Οπως στην αποδειξη της ευσταθειας :

$$\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{2}hL\left(1 + \frac{1}{{\tau_1}^2}\right)\right]\int_{I_n} |\theta(t)|^2 dt \leq ch(|\theta^{n+1}|^2 + |\theta^n|^2) + h\int_{I_n} E(t)\tilde{\theta}(t)dt$$

προσπαθω να μετατρεψω το $E(t)\tilde{\theta}(t)dt$ με τη βοηθεια της αριθμητικης-γεωμετρικης ανισοτητας :

$$\int_{I_n} E(t)\tilde{\theta}(t)dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{I_n} |E(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_{I_n} |\tilde{\theta}(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\int_{I_n} |E(t)|^2 dt + \frac{1}{2{\tau_1}^2}\int_{I_n} |\theta(t)|^2 dt$$

Αρα :

$$\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{2}hL\left(1 + \frac{1}{{\tau_1}^2}\right)\right]\int_{I_n} |\theta(t)|^2 dt \leq$$

$$\leq ch(|\theta^{n+1}|^2 + |\theta^n|^2) + \frac{h}{2}\int_{I_n} |E(t)|^2 dt + \frac{h}{2{\tau_1}^2}\int_{I_n} |\theta(t)|^2 dt \Rightarrow$$

$$\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{2}h\left(L + \frac{1}{{\tau_1}^2}(L+1)\right)\right]\int_{I_n} |\theta(t)|^2 dt \leq ch(|\theta^{n+1}|^2 + |\theta^n|^2) + \frac{h}{2}\int_{I_n} |E(t)|^2 dt.$$

Για αρκετα μικρο h($h \leq 1/[5(L + (L+1)/{\tau_1}^2)]$ οπως αυτο που επιλεχθηκε στην αποδειξη της ευσταθειας) έχουμε :

$$\int_{I_n} |\theta(t)|^2 dt \leq 10ch(|\theta^{n+1}|^2 + |\theta^n|^2) + 5h\int_{I_n} |E(t)|^2 dt \ (*)$$

Και απο πριν

$|\theta^{n+1}|^2 \leq |\theta^n|^2 + \left(2L + \frac{1}{2}\right)\int_{I_n} |\theta(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_{I_n} |E(t)|^2 dt.$

Αντικαθιστω το $\int_{I_n} |\theta(t)|^2 dt$ απο την παραπανω σχεση :

$|\theta^{n+1}|^2 \leq |\theta^n|^2 + \left(2L + \frac{1}{2}\right)\left[10ch(|\theta^{n+1}|^2 + |\theta^n|^2) + 5h\int_{I_n} |E(t)|^2 dt\right] + \frac{1}{2}\int_{I_n} |E(t)|^2 dt$

«Είναι φανερό ότι θα ακολουθήσω τα βήματα που ακολούθησα για την απόδειξη της ευστάθειας »

$|\theta^{n+1}|^2 \leq |\theta^n|^2 + (2L+\frac{1}{2})10ch|\theta^{n+1}|^2 + ch(2L+\frac{1}{2})\int_{I_n} |E(t)|^2\,dt + \frac{1}{2}\int_{I_n} |E(t)|^2 dt$

$(1-(2L+\frac{1}{2})10ch)|\theta^{n+1}|^2 \leq (1+(2L+\frac{1}{2})10ch)|\theta^n|^2 + (ch(2L+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\int_{I_n} |E(t)|^2\,dt$

Επιλέγω c:=$(2L+\frac{1}{2})10c$ (σταθερά τέτοια ώστε να μην εξαρτάται από το h) και έχω

$(1-ch)|\theta^{n+1}|^2 \leq (1+ch)|\theta^n|^2 + [\frac{1}{2}+s(2L+\frac{1}{2})h]\int_{I_n} |E(t)|^2\,dt.$

Για $h< {}^{1}/_{2c}$ έχω:

$|\theta^{n+1}|^2 \leq (1+4ch)|\theta^n|^2 + (1+2ch)[\frac{1}{2}+5(2L+\frac{1}{2})h]\int_{I_n} |E(t)|^2 dt.$

Οπότε για κάποια σταθερά $\tilde{c}$:

$|\theta^{n+1}|^2 \leq (1+\tilde{c}h)[|\theta^n|^2 + \int_{I_n} |E(t)|^2\,dt]$

Και τώρα εφαρμόζω το λήμμα (των d_{i+1}, d_i) για να έχω μόνο το $|\theta^n|$ έτσι :

$$|\theta^n|^2 \leq e^{\tilde{c}hn}[|\theta^o|^2 + \int_{\alpha}^{t^n} |E(t)|^2\,dt \qquad ,n=1,\ldots,N$$

$$|\theta^n|^2 \leq e^{\tilde{c}(t^n-\alpha)}[|\theta^o|^2 + \int_{\alpha}^{t^n} |E(t)|\,dt\,.$$

Όπως ορίστηκε $\theta^o=\tilde{y}(\alpha)-Y(\alpha)=y_o-y_o=0$.Επίσης, σύμφωνα με την εκτίμηση της συνέπειας έχω υπολογίσει το $\int_0^{t^n} |E(t)|^2\,dt \leq ch^{2q}\int_{\alpha}^{t^n} |y^{(q)}(t)|^2 dt$

Άρα

$$|\theta^n|^2 \leq e^{\tilde{c}(t^n-\alpha)}ch^{2q}\int_{\alpha}^{t^n} |y^{(q)}(t)|^2 dt$$

Βάζοντας τετραγωνική ρίζα:

$$|\theta^n| \leq e^{\tilde{c}(t^n-\alpha)/2}\sqrt{c}h^2(|\int_{\alpha}^{t^n} |y^{(q)}(t)|^2 dt)$$

Έπεται ,

$$\max |\theta^n| \leq e^{\tilde{c}(t^n-\alpha)/2}\sqrt{c}h^2(|\int_{\alpha}^{t^n} |y^{(q)}(t)|^2 dt) \ (1)$$

$$\max_{0\le n\le N}|y(t^n)\text{- }Y(t^n)|\le\ e^{\tilde{c}(t^n-a)}/_2\sqrt{c}h^2(|\int_{\alpha}^{t^n}|y^{(q)}(t)|^2dt)$$

επιθυμητή εκτίμηση του σφάλματος στους κόμβους.

Όπως και στην ευστάθεια , έτσι και εδώ θα αποδείξω την σύγκλιση σ'όλο το διάστημα ξεκινόντας από το ότι:

$$\sup_{t\in In}|\theta(t)|^2\le\frac{\tilde{c}}{h}\int_{I_n}|\theta(t)|^2dt\le\frac{\tilde{c}}{h}10ch[|\theta^{n+1}|^2+|\theta^n|^2+\int_{I_n}|E(t)|^2dt].$$

Συνδύαζοντας πλεον την πάνω σχεση μαζι με την (*) έχω οτι :

$$\sup_{t\in In}|\theta(t)|^2\le 10c\tilde{c}[(|\theta^{n+1}|^2+|\theta^n|^2+\int_{I_n}|E(t)|^2dt].$$

Αφού γνωριζουμε τωρα την εκτιμηση του σφαλματος στους κομβους και την εκτίμηση της συνέπειας του κεφαλαίου 2 οδηγούμαστε στο εξής :

$$\max_{a\le t\le b}|\theta(t)|\le\tilde{C}[\int_a^b|y^{(q)}|^2dt]^2h^q,$$

επιλέγοντας καταλληλη σταθερα $\tilde{C}$.

Τέλος η σχεση του λημματος μαζι με την απο πάνω δινουν :

$\max_{a\le t\le b}|y(t)-Y(t)|\le Ch^q$, για καταλληλη σταθερα C.

Αυτή ειναι η επιθυμητη εκτίμηση σφαλματος σε ολο το διαστημα [α,b].

ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ

Θα αποδείξω τώρα την ύπαρξη και τη μοναδικότητα των προσεγγιστικων λυσεων της συνεχους μεθοδου του Galerkin,για αρκετα μικρο h,δηλαδη οτι η προσεγγιση Y∈ S_h^σ ειναι οντως καλως ορισμενη.

Υποθετω οτι ειναι ηδη προσδιορισμενη η Y^n δηλαδη η τιμη της προσεγγισης Y και πλεον θα αποδειξω τη μοναδικοτητα της λυσης του προβληματος :

$\int_{I_n} Y'(t)x(t) = \int_{I_n} f\big(t, Y(t)\big)x(t)\mathrm{dt}\ \forall x \epsilon \mathrm{P}_{\mathrm{q}-2}(I_n)$

Γραφω την Y στο I_n:

$Y(t) = Y^n + (t - t^n)U(t), t \in I_n$ με $U\ \in \mathrm{P}_{\mathrm{q}-2}(I_n)$

Οποτε ως ζητουμενη πλεον θεωρηται η συναρτηση $U\ \in \mathrm{P}_{\mathrm{q}-2}$ και ολοκληρωνοντας τη παραπανω σχεση μεσω της μεθοδου μου

$$\int_{I_n} U(t)x(t)dt + \int_{I_n} (t - t^n)U'(t)x(t)dt =$$

$$\int_{I_n} f(t)Y^n + (t - t^n)U(t)x(t)dt$$

Θα θεωρησω τωρα δυο λυσεις του προβληματος, την U και V και θα προσπαθησω να δειξω οτι ταυτιζονται αποδεικνυοντας με αυτο το τροπο τη μοναδικοτητα .

Εστω η διαφορα v :=U-V $U\ \in \mathrm{P}_{\mathrm{q}-2}(I_n)$ (και οι δυο πολυωνυμα βαθμου το πολυ q-2)και επιλεγω χ=v

$$\int_{I_n} U(t)v(t)dt + \int_{I_n} (t - t^n)U'(t)v(t)dt =$$

$$\int_{I_n} f(t, Y^n + (t - t^n)U(t))v(t)dt$$

Και για τη V :

$$\int_{I_n} V(t)v(t)dt + \int_{I_n} (t-t^n)V'(t)v(t)dt =$$

$$\int_{I_n} f(t, Y^n + (t-t^n)V(t))v(t)dt$$

Και αφαιροντας κατα μελη εχω :

$$\int_{I_n} (U(t)-V(t))v(t)dt + \int_{I_n} (t-t^n)(U'(t)-V'(t))v(t)dt =$$

$$\int_{I_n} [f(t, Y^n + (t-t^n)U(t)) - f(t, Y^n + (t-t^n)V(t))]v(t)dt$$

$$\int_{I_n} |v(t)|^2 dt + \int_{I_n} (t-t^n)v'(t)v(t)dt =$$

$$\int_{I_n} [f(t, Y^n + (t-t^n)U(t)) - f(t, Y^n + (t-t^n)V(t))]v(t)dt$$

Απλοποιω τον δευτερο ορο του πρωτου μελους της πανω σχεσης :

(γενικα $[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x) <=> f(x)f'(x) = \frac{1}{2}[f^2(x)]'$)

$$\int_{I_n} (t-t^n)v'(t)v(t)dt = \frac{1}{2}\int_{I_n} (t-t^n)[|v^2(t)|]'dt =$$

$$\frac{1}{2}\int_{t^n}^{t^{n+1}} (t-t^n)[|v^2(t)|]'dt = \frac{1}{2}[(t-t^n)|v^2(t)|]_{t^n}^{t^{n+1}} - \frac{1}{2}\int_{t^n}^{t^{n+1}} |v^2(t)|dt$$

$$= \frac{1}{2}(t^{n+1}-t^n)|v(t^{n+1})|^2 - \frac{1}{2}(t^n-t^n)|v(t^n)|^2 - \frac{1}{2}\int_{t^n}^{t^{n+1}} |v^2(t)|dt$$

$$= \frac{1}{2}h\left|v(t^{n+1})\right|^2 - \frac{1}{2}\int_{t^n}^{t^{n+1}} |v^2(t)|dt$$

Και τωρα απλοποιω το δευτερο μελος χρησιμοποιοντας συνθηκη Lipschitz:

$\int_{I_n}\left[f\left(t, Y^n+(t-t^n)U(t)\right)-f\left(t, Y^n+(t-t^n)V(t)\right)\right]v(t)dt \leq L|Y^n+(t-t^n)U(t)-Y^n+(t-t^n)V(t)|$

$= L|(t-t^n)v(t)(U(t)-V(t)|=L(t-t^n)|v(t)|^2$

$$\leq Lh|v(t)|^2$$

Αρα ,

$$\int_{I_n}\left[f\left(t, Y^n+(t-t^n)U(t)\right)-f\left(t, Y^n+(t-t^n)V(t)\right)\right]v(t)dt$$

$\leq Lh|v(t)|^2$

Ετσι εχω :

$$\int_{I_n}|v(t)|^2dt+\frac{1}{2}h|v(t^{n+1})|^2-\frac{1}{2}\int_{t^n}^{t^{n+1}}|v^2(t)|dt$$

$\leq Lh|v(t)|^2$

$\frac{1}{2}\int_{I_n}|v(t)|^2dt+\frac{1}{2}h|v(t^{n+1})|^2 \leq Lh|v(t)|^2$

Αλλιως

$$Lh|v(t)|^2 \geq \frac{1}{2}\int_{I_n}|v(t)|^2dt$$

$$(1-2Lh)\int_{I_n}|v(t)|^2dt \leq 0$$

Αρα για $h<1/2L$ απο αυτη τη σχεση θα ειχα οτι v=0, δηλαδη U=V.