Νίκος Ε. Αγγουρίδης

Το Θεώρημα του Sarkovskii

Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών

Την κριτική επιτροπή αποτέλεσαν οι
Αθανασόπουλος Κωνσταντίνος
Κατσοπρινάκης Εμμανουήλ
Κωστάκης Γεώργιος (επιβλέπων)
τους οποίους και ευχαριστώ θερμά.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγικές Έννοιες

Στην παρούσα εργασία, πραγματευόμαστε συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες έχουν σαν πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα, υποσύνολο της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Στο εξής λοιπόν, με $C^0(I, I)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων απο το I στον εαυτό του, όπου $I = [a, b]$ για κάποια $a, b \in \mathbb{R}$.

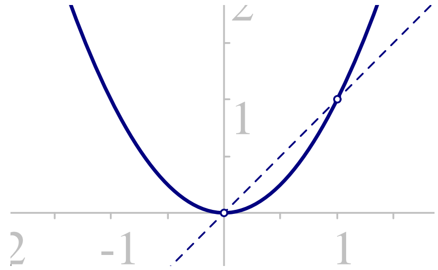
Ορισμός 1.1.1. *Έστω $f \in C^0(I, I)$. Το $x \in I$ θα λέγεται σταθερό σημείο της f στο I αν $f(x) = x$.*

Γεωμετρικά, το σταθερό σημείο είναι το σημείο τομής της συνάρτησης f με την διχοτόμο 1ης - 3ης γωνίας, δηλαδή την ευθεία $y = x$.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f : [0, 1] \to [0, 1]$ με τύπο $f(x) = x^2$. Για να βρούμε τα σταθερά σημεία της αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

$$f(x) = x \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0,$$

απο το οποίο συμπεραίνουμε ότι $x = 0$ ή $x = 1$.



Σχήμα 1.1: Σταθερά σημεία της $f(x) = x^2$, στο $[0, 1]$

Ορισμός 1.1.2. *Ορίζουμε την n-οστή συνθεση μιας $f \in C^0(I, I)$ ως την συνάρτηση $f^n \in C^0(I, I)$, για την οποία ισχύει ότι $f^n = f \circ f^{n-1}$ και $f^0(x) = x$, για κάθε $x \in I$.*

Ορισμός 1.1.3. *Έστω $f \in C^0(I, I)$. Το σημείο $x \in I$ θα λέγεται περιοδικό με περίοδο $n \in \mathbb{N}$, αν $f^n(x) = x$, ενώ $f^\kappa(x) \neq x$, για $\kappa = 1, 2, ..., n-1$.*

Ορισμός 1.1.4. *Αν $f \in C^0(I, I)$ τότε για κάθε $x \in I$ ορίζουμε την τροχιά του x ως προς την f, να είναι το σύνολο*

$$Orb(x) = \{x, f(x), f^2(x), ...\}.$$

Ας σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι για κάθε σημείο $x \in I$ μπορούμε να πάρουμε την $Orb(x)$. Προφανώς, αν η τροχιά είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε το x είναι περιοδικό σημείο, και αντίστροφα.

Ορισμός 1.1.5. *Αν το $p \in I$ είναι ένα περιοδικό σημείο μιας $f \in C^0(I, I)$ τότε ορίζουμε τον **ασταθή υπόχωρο** να είναι το σύνολο,*

$$W^u(p, f) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n \geq 0} f^n(p - \epsilon, p + \epsilon).$$

Με άλλα λόγια, αν $x \in W^u(p, f)$, έπεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $n \geq 0$ ώστε $x \in f^n(p - \epsilon, p + \epsilon)$.
Ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με το να πούμε ότι αν $x \in W^u(p, f)$, τότε υπάρχουν ακολουθίες y_κ στοιχείων του I και m_κ με $y_\kappa \to p$, ώστε $x = f^{m_k}(y_k)$.

Ορισμός 1.1.6. *Αν το $p \in I$ είναι ένα περιοδικό σημείο μιας $f \in C^0(I, I)$ τότε ορίζουμε τον **+ ασταθή υπόχωρο** να είναι το σύνολο,*

$$W^u(p, f, +) = \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcup_{n \geq 0} f^n[p, p + \epsilon).$$

Με άλλα λόγια, αν $x \in W^u(p, f, +)$, έπεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $n \geq 0$, ώστε $x \in f^n[p, p+\epsilon)$.
Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι υπάρχουν ακολουθίες y_κ στοιχείων του I και m_κ με $y_\kappa \to p$ και $y_\kappa \geq p$, ώστε $x = f^{m_\kappa}(y_\kappa)$.

Ορισμός 1.1.7. *Αν το $p \in I$ είναι ένα περιοδικό σημείο μιας $f \in C^0(I, I)$ τότε ορίζουμε τον* **- ασταθή υπόχωρο** *να είναι το σύνολο,*

$$W^u(p, f, -) = \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{n\geq 0} f^n(p-\epsilon, p].$$

Εντελώς αντίστοιχα με παραπάνω, αν $x \in W^u(p, f, -)$, έπεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $n \geq 0$, ώστε $x \in f^n(p-\epsilon, p]$.
Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι υπάρχουν ακολουθίες y_κ στοιχείων του I και m_κ με $y_\kappa \to p$ και $y_\kappa \leq p$, ώστε $x = f^{m_\kappa}(y_\kappa)$.

Προφανώς ισχύει ότι

$$W^u(p, f) = W^u(p, f, -) \cup W^u(p, f, +)$$

1.2 Ύπαρξη και Μοναδικότητα Σταθερού Σημείου

Ορισμός 1.2.1. *Έστω $f \in C^0(I, I)$. Η f θα λέγεται συστολή στο I αν υπάρχει $L \in (0, 1)$ ώστε για κάθε $x, y \in I$, ισχύει ότι*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Θεώρημα 1.2.2. ***(Σταθερού σημείου του Banach)*** *Έστω $f \in C^0(I, I)$ και υποθέτουμε ότι η f είναι συστολή. Τότε η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο I.*

Απόδειξη. Έστω $z \in I$. Θεωρούμε την ακολουθία

$$a_n = f^n(z), n = 1, 2, ...$$

Η $\{a_n\}$ είναι $Cauchy$ καθώς για m, n με $m > n$,

$$|a_n - a_m| \leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + ...|a_{n+1} - a_n|$$

$$\leq L^{m-2}|a_2 - a_1| + L^{m-3}|a_2 - a_1| + ... + L^{n-1}|a_2 - a_1|$$

$$= |a_2 - a_1|(L^{n-1} + L^n + ...L^{m-3} + L^{m-2})$$

$$= |a_2 - a_1|(L^{n-1}\frac{1 - L^{m-n-1}}{1 - L})$$

$$\leq |a_2 - a_1|\frac{L^{n-1}}{1 - L} \to 0$$

καθώς $m, n \to \infty$.

Άρα, η $\{a_n\}$ συγκλίνει σε κάποιο $a \in I$. Από συνέχεια της f, έπεται ότι $f(a_n) \to f(a)$. Όμως $f(a_n) = a_{n+1}$ και

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}.$$

Τελικά, $f(a) = a$. Τώρα θα αποδείξουμε ότι αυτό το a είναι μοναδικό.
Έστω οτι η f έχει δύο σταθερά σημεία x, y με $x \neq y$.
Τότε, $|x - y| = |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ και άρα, $L \geq 1$ το οποίο είναι άτοπο. □

Πρόταση 1.2.3. *Έστω $f \in C^0(I, I)$, και υποθέτουμε ότι η f είναι συστολή. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η f^n έχει μοναδικό σταθερό σημείο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = f^n(z)$, για κάποιο $z \in I$, όπως και παραπάνω. Αποδείξαμε ότι $a_n \to a, a \in I$. Από συνέχεια της f^n έπεται ότι,

$$f^n(a_n) \to f^n(a)$$

Όμως, $f^n(a_n) = a_{2n}$ και $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{2n}$. Τελικά,

$$f^n(a) = a.$$

Τώρα θα αποδείξουμε ότι αυτό το a είναι μοναδικό.
Έστω ότι η f^n έχει δύο σταθερά σημεία x, y με $x \neq y$. Τότε,
$|x - y| = |f^n(x) - f^n(y)| \leq L^n|x - y|$ και έχουμε

$$L^n \geq 1$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Θεώρημα 1.2.4. *Έστω $f : I \to I$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο I^o με*

$$|f'(x)| \leq L < 1$$

και αυτό για κάθε $x \in I^o$. Τότε η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο I.

Απόδειξη. Έστω $x, y \in I$ με $x < y$.
Η f είναι συνεχής στο $[x, y] \subseteq I$
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x, y) \subseteq I^o$

Από το *Θεώρημα Μέσης Τιμής*, έπεται ότι υπάρχει $x_0 \in (x, y)$ ώστε,

$$f(x) - f(y) = f'(x_0)(x - y)$$
$$|f(x) - f(y)| = |f'(x_0)||x - y|$$
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

με $0 \leq L < 1$.
Άρα η f είναι συστολή, και το ζητούμενο έπεται απο το *Θεώρημα Σταθερού σημείου.* □

Με το πέρας της παραπάνω απόδειξης γεννιούνται κάποια ερωτήματα της μορφής: Αν $|f'(x)| = 1$ ή $|f'(x)| \geq 1$ τότε μπορούμε να συμπεράνουμε την ύπαρξη ή ακόμα και την μοναδικότητα κάποιου σταθερού σημείου;
Το μόνο σίγουρο είναι ότι δεν μπορούμε να μιλήσουμε για μοναδικότητα (όποιος επιχειρήσει να δείξει κάτι τέτοιο θα καταλήξει στο ίδιο συμπέρασμα). Τι γίνεται όμως για την ύπαρξη; Σε τούτο το σημείο έρχεται το επόμενο θεώρημα για να δώσει απαντήσεις στα ερωτήματά μας.

Θεώρημα 1.2.5. *Έστω $f \in C^0(I, I)$ και έστω $K \subseteq I$ ένα κλειστό διάστημα για το οποίο ισχύει ότι $K \subseteq f(K)$.*
Τότε η f έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο στο K.

Απόδειξη. Έστω $K = [a, b]$, και λόγω του ότι $K \subseteq f(K)$, έχουμε ότι $[a, b] \subset f([a, b])$. Θεωρούμε την συνεχή στο I συνάρτηση με τύπο, $g(x) = f(x) - x$ και διακρίνουμε τις εξής 2 περιπτώσεις:

α) Αν $[a, b] \subseteq [f(a), f(b)]$.

Έχουμε λοιπόν ότι $f(a) \leq a$ και $f(b) \geq b$.
$g(a) = f(a) - a \leq 0$
$g(b) = f(b) - b \geq 0$
Από τα παραπάνω έχουμε ότι,

$$g(a)g(b) \leq 0.$$

Αν ισχύει η ισότητα έχουμε ότι ένα απο τα a, b ειναι σταθερό σημείο και τελειώνουμε. Αν ισχύει η ανίσωση, τότε απο το *Θεώρημα Bolzano* έχουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε,

$$g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$$

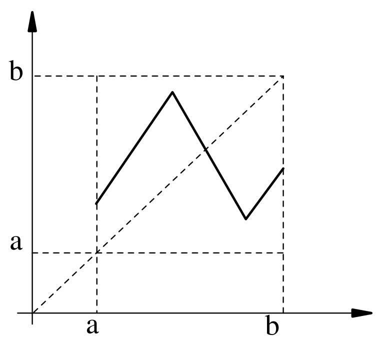
β) Αν $[a, b] \subseteq [f(b), f(a)]$
Έχουμε λοιπόν ότι $f(a) \geq b$ και $f(b) \leq a$.
$g(a) = f(a) - a \geq b - a > 0$
$g(b) = f(b) - b \leq a - b < 0$
Από τα παραπάνω έχουμε ότι,

$$g(a)g(b) < 0.$$

Ξανά από το *Θεώρημα Bolzano* έχουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (a,b)$, τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0.$$

Σε όλες τις περιπτώσεις αποδείξαμε την ύπαρξη σταθερού σημείου. □



Σχήμα 1.2: Γεωμετρική Ερμηνεία του Θεωρήματος 1.2.5

Το Θεώρημα 1.2.5. μας εξασφαλίζει την ύπαρξη σταθερού σημείου υπό τις προυποθέσεις τις οποίες αναφέραμε.
Υπάρχουν και άλλες συνθήκες, οι οποίες σε συνδυασμό με το παραπάνω Θεώρημα μας εξασφαλίζουν και την μοναδικότητα, όπως για παράδειγμα η γνήσια μονοτονία.

Κεφάλαιο 2

Ασταθείς Υπόχωροι

2.1 Βασικές Ιδιότητες του $W^u(p,f)$

Λήμμα 2.1.1. *Έστω $f \in C^0(I,I)$, και έστω p ένα σταθερό σημείο της f στο I. Τότε τα σύνολα $W^u(p,f)$, $W^u(p,f,+)$, $W^u(p,f,-)$ είναι συνεκτικά.*

Απόδειξη. Θα δώσουμε απόδειξη μονάχα για τον υπόχωρο $W^u(p,f)$. Για τους + και - ασταθείς υπόχωρους η απόδειξη κινείται στα ίδια ακριβώς πλαίσια. Έστω $b, c \in W^u(p,f)$ και υποθέτουμε οτι $b < x < c$. Αρκεί να δείξουμε οτι $x \in W^u(p,f)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p \leq x$. Θεωρούμε την ϵ-περιοχή του p, $V = (p-\epsilon, p+\epsilon)$. Έχουμε ότι $c \in W^u(p,f)$ και άρα $c \in f^n(V)$, για κάποιο $n > 0$. Όμως η f είναι συνεχής, και άρα η f^n συνεχής. Επίσης το σύνολο V είναι διάστημα και τελικά συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $f^n(V)$ είναι επίσης διάστημα.
Έχουμε λοιπόν,
$c \in f^n(V)$
$p \in f^n(V)$
$p \leq x < c$
από τα οποία έπεται $x \in f^n(V)$, δηλαδή $x \in W^u(p,f)$, το οποίο είναι και το ζητούμενο. □

Πόρισμα 2.1.2. *Έστω $f \in C^0(I,I)$, και έστω p ένα σταθερό σημείο της f στο I. Τότε καθένα από τα σύνολα $W^u(p,f)$, $W^u(p,f,+)$, $W^u(p,f,-)$ είναι είτε διάστημα, είτε το μονοσύνολο $\{p\}$.*

Απόδειξη. Θα δώσουμε απόδειξη μονάχα για τον $W^u(p,f)$. Για τους + και - ασταθείς υπόχωρους, η απόδειξη είναι όμοια. Απο το Λήμμα 2.1.1., έχουμε ότι

ο $W^u(p,f)$ είναι συνεκτικό συνολο. Είναι σωστό ότι $p \in W^u(p,f)$ καθώς το p είναι σταθερό σημείο και άρα,
$p \in f^n(p-\epsilon, p+\epsilon)$. Όμως τα μόνα συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, είναι τα μονοσύνολα και τα διαστήματα. Αν ο $W^u(p,f)$ περιέχει μονάχα το p, τότε προφανώς $W^u(p,f) = \{p\}$, το οποίο είναι συνεκτικό. Αν τώρα περιέχει και άλλο σημείο εκτός του p, τότε θα περιέχει και όλα τα σημεία μεταξύ τους καθώς είναι συνεκτικό, και άρα θα είναι διάστημα. □

Πρόταση 2.1.3. *Έστω $f \in C^0(I,I)$, και έστω p ένα σταθερό σημείο της f στο I.*
Αν το $W^u(p,f,-)$ περιέχει σημείο μεγαλύτερο του p, τότε
$W^u(p,f,+) \subseteq W^u(p,f,-)$.
Αν το $W^u(p,f,-)$ δεν περιέχει σημείο μικρότερο του p,τότε
$W^u(p,f,-) = \{p\}$ *ή* $W^u(p,f,-) = W^u(p,f,+)$
Αν το $W^u(p,f,+)$ περιέχει σημείο μικρότερο του p, τότε
$W^u(p,f,-) \subseteq W^u(p,f,+)$.
Αν το $W^u(p,f,+)$ δεν περιέχει σημείο μεγαλύτερο του p, τότε
$W^u(p,f,+) = \{p\}$ *ή* $W^u(p,f,+) = W^u(p,f,-)$

Απόδειξη. Θα δείξουμε μονάχα τους δυο πρώτους ισχυρισμούς, καθώς η απόδειξη των άλλων δυο κινείται σε εντελώς αντίστοιχα πλαίσια.
Για την πρώτη πρόταση έχουμε τα εξής:
Έστω ότι ο $W^u(p,f,-)$, περιέχει ένα σημείο $c > p$. Αυτό, σε συνδυασμό με το ότι $p \in W^u(p,f,-)$, μας δίνει ότι $[p,c] \subseteq W^u(p,f,-)$.
Ας θεωρήσουμε τώρα ένα $x \in W^u(p,f,+)$. Έχουμε λοιπόν εξ ορισμού ότι, $x = f^{m_\kappa}(y_\kappa)$ όπου $y_\kappa \to p$ και $y_\kappa \geq p$. Για μεγάλα κ, ισχύει ότι
$y_\kappa \in W^u(p,f,-)$ δηλαδή $x \in W^u(p,f,-)$ και άρα έχουμε ότι
$W^u(p,f,+) \subseteq W^u(p,f,-)$, το οποίο είναι και το ζητούμενο. Για τον δεύτερο ισχυρισμό έχουμε τα εξής:
Έστω ξανά ότι ο $W^u(p,f,-)$, περιέχει ένα σημείο $c > p$, και υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει σημείο μικρότερο του p. Θεωρούμε ένα $d \in (p,c)$ και επιλέγουμε ένα $\alpha < p$ τέτοιο ώστε $f(x) < d$, για κάθε $x \in (\alpha,p)$. Ισχύει ότι
$\alpha \notin W^u(p,f,-))$ από το οποίο έπεται ότι υπάρχει $b \in (\alpha,p)$ ώστε αν $x \in (b,p)$ τότε $f^n(x) \neq \alpha$, για κάθε $n \geq 0$. Έχουμε επίσης ότι υπάρχει $y \in (b,p)$ και $n > 0$ ώστε $c = f^n(y)$.
Έστω $m \leq n$ ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος που ικανοποιεί την σχέση
$f^\kappa(y) \in (\alpha,p), \quad \kappa = 0,1,2,...,m-1$. Αν $f^m(y) < p$, τότε $f^m(y) \leq \alpha$ και άρα $\alpha = f^m(w)$ για κάποιο $w \in (b,p)$, πράγμα το οποίο αποτελεί αντίφαση και άρα

$p < f^m(y) < d$.
Εφόσον το d είναι αυθαίρετα κοντά στο p, έπεται ότι $c \in W^u(p,f,+)$, το οποίο σημαίνει ότι $W^u(p,f,-) \subseteq W^u(p,f,+)$. Τα συμπεράσματά μας σε συνδυασμό με τον ισχυρισμό παραπάνω μας δίνουν ότι

$$W^u(p,f,-) = W^u(p,f,+).$$

$\square$

Πρόταση 2.1.4. *Έστω $f \in C^0(I,I)$, και έστω p ένα σταθερό σημείο της f στο I.*
Αν $f(x) < x$ για κάθε $a \leq x < p$, τότε $[\alpha,p] \subseteq W^u(p,f,-)$.
Αν $f(x) > x$ για κάθε $p < x \leq b$, τότε $[p,b] \subseteq W^u(p,f,+)$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μονάχα τον πρώτο ισχυρισμό καθώς ξανά οι δυο αποδείξεις κινούνται στα ίδια πλαίσια.
Για κάθε $x_0 \in [\alpha,p]$ υπάρχει ένα $x_1 \in (x_0,p)$ με $f(x_1) = x_0$. Αν ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία παίρνουμε μια ακολουθία $\{x_\kappa\}$ η οποία είναι αύξουσα, άνω φραγμένη από το p και ισχύει $f(x_{\kappa+1}) = x_\kappa$, για κάθε κ. Επίσης, $x_\kappa \to p$ καθώς $\kappa \to \infty$, και αυτό διότι η x_κ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη απο το p.
Έχουμε λοιπόν ότι $x_0 = f^\kappa(x_\kappa)$ με $x_\kappa \to p$ και $x_\kappa \leq p$ άρα $x_0 \in W^u(p,f,-)$.
Όμως $x_0 \in [\alpha,p]$ και τελικά

$$[\alpha,p] \subseteq W^u(p,f,-).$$

$\square$

Λήμμα 2.1.5. *Έστω $f \in C^0(I,I)$ και έστω $\{p_1,p_2,...,p_n\}$ μια περιοδική τροχιά της f. Τότε,*

$$W^u(p_1,f) = W^u(p_1,f^n) \cup W^u(p_2,f^n) \cup ... \cup W^u(p_n,f^n)$$

Απόδειξη. Ισχύει ότι $f(p_i) = p_{i+1}$, $i = 1,2,...,n$ και ότι $f(p_n) = p_1$. Η απόδειξη χωρίζεται σε δύο μέρη.
Αρχικά θα δείξουμε ότι,

$$W^u(p_1,f) \subseteq W^u(p_1,f^n) \cup W^u(p_2,f^n) \cup ... \cup W^u(p_n,f^n).$$

Έστω $z \in W^u(p_1,f)$ και έστω

$$z \notin W^u(p_1,f^n) \cup W^u(p_2,f^n) \cup ... \cup W^u(p_n,f^n).$$

Για κάθε p_i θα συμβολίζουμε με V_i την ε-περιοχή αυτού. Έτσι έχουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε,

$$z \notin \bigcup_{m=0}^{\infty} f^{mn}(V_i)$$

για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Θεωρούμε $W_1 = V_1$, ενώ για $j = 2, ..., n$ ορίζουμε W_j να είναι μια γειτονία του p_j για την οποία ισχύει ότι $f^{j-1}(W_j) \subset V_j$.
Επίσης ορίζουμε $W_0 = W_1 \cap W_2 \cap ... \cap W_n$.
Είναι σωστό ότι $z \notin \bigcup_{m=0}^{\infty} f^m(W_0)$ διότι αν $z \in f^j(W_0)$ για κάποιο j, τότε $z \in f^j(W_1) = f^j(V_1)$. Όμως $z \notin f^{jn}(V_1)$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
Αν $j = n$, έχουμε $z \in f^n(W_0)$ το οποίο είναι άτοπο.
Αν $j > n$ τότε, $j = \kappa n + (i-1)$ για κάποίο $\kappa \in (Z)$. Γνωρίζουμε ότι $f^{j-1}(W_i) \subseteq V_i$. Άρα θα έχουμε $z \in f^j(W_i) = f^{j+1-i}(f^{i-1}(W_i)) \subseteq f^{j+1-i}(V_i) = f^{n\kappa}(V_i)$ το οποίο είναι άτοπο.
Αν $j < n$ τότε $z \in f^j(W_0) \subseteq f^j(W_{j+1}) \subseteq V_{j+1}$ το οποίο είναι επίσης άτοπο.
Έχουμε λοπόν ότι, $z \notin \bigcup_{m=0}^{\infty} f^m(W_0)$, δηλαδή $z \notin \bigcup_{m=0}^{\infty} f^m(W_1)$ και τελικά $z \notin W^u(p_1, f)$ πράγμα το οποίο αντιβαίνει στην αρχική μας υπόθεση.
Άρα, έχουμε ότι

$$W^u(p_1, f) \subseteq W^u(p_1, f^n) \cup W^u(p_2, f^n) \cup ... \cup W^u(p_n, f^n).$$

Θα δείξουμε τώρα ότι,

$$W^u(p_1, f^n) \cup W^u(p_2, f^n) \cup ... \cup W^u(p_n, f^n) \subseteq W^u(p_1, f).$$

Έστω ότι $z \in W^u(p_k, f^n)$ για κάποιο $k = 1, 2, ..., n$.
Έστω V μια ϵ-περιοχή του p_1.
Ορίζουμε για $k = 1$ (δηλαδή μιλάμε για το p_1), τότε $V = N$, ενώ για $k > 1$ ορίζουμε N να είναι μια γειτονιά του p_k για την οποία ισχύει ότι $f^{n-(k-1)}(N) \subset V$.
Τότε θα έχουμε, $z \in f^r(V)$ απο το οποίο έπεται ότι $z \in W^u(p_1, f)$
όπου,
$r = mn$ όταν $k = 1$
ενώ,
$r = mn + (n - k + 1)$ για $k > 1$.
Τελικά,

$$W^u(p_1, f^n) \cup W^u(p_2, f^n) \cup ... \cup W^u(p_n, f^n) \subseteq W^u(p_1, f)$$

και συμπεραίνουμε το ζητούμενο. $\square$

Λήμμα 2.1.6. *Έστω $f \in C^0(I, I)$ και έστω p ένα περιοδικό σημείο της f. Θέτουμε $J = W^u(p, f)$. Τότε $f(J) = J$*

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι $f(J) \subseteq J$. Έστω $x \in J$. Τότε για κάθε W γειτονιά του p έχουμε, $x \in J$ ή ισοδύναμα $x \in W^u(p, f)$, δηλαδή $x \in f^m(W)$ για κάποιο $m \geq 0$, απο το οποίο έπεται ότι $f(x) \in f^{m+1}(W)$. Άρα, $f(J) \subseteq J$. Θα δείξουμε τώρα ότι,$J \subseteq f(J)$. Υποθέτουμε ότι το $f(J)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του J και θα καταλήξουμε σε άτοπο.
Έστω $z \in J \backslash f(J)$ και έστω n η περίοδος του p.
Από το Λήμμα 2.1.5, έχουμε ότι υπάρχει $p_0 \in Orb(p)$, ώστε $z \in W^u(p_0, f^n)$.
Θέτουμε $K = W^u(p_0, f^n)$, και διακρινουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:
α) Το K είναι μια γειτονιά του p_0.
Τότε έχουμε , $z \in W^u(p_0, f^n)$ ή αλλιώς $z \in f^{mn}(K)$ για κάποιο $m > 0$.
Ισχύει ότι $f(J) \subseteq J$ το οποίο μας δίνει $f^2(J) \subseteq J$, δηλαδή $f^r(J) \subseteq J$, για κάθε $r > 0$. Έτσι, $f^{mn}(K) \subseteq f^{mn}(J)$ και άρα $z \in f(J)$, το οποίο είναι άτοπο καθώς υποθέσαμε ότι $z \in J \backslash f(J)$.
β) Το K δεν είναι γειτονιά του p_0.
Τότε απο το Λήμμα 2.1.1. θα είναι ένα διάστημα με άκρο το p_0. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $K = [p_0, b]$ για κάποιο $b \in I$.
Επιλέγουμε ένα $c < p_0$ τέτοιο ώστε $f^n(x) \neq z$,για κάθε $x \in [c, p_0]$. Η επιλογή ενός τέτοιου σημείου είναι εφικτή καθώς η f είναι συνεχής και $f^n(p_0) = p_0$. Καθώς $c < p_0$, συμπεραίνουμε ότι $c \notin K$.
Έτσι, υπάρχει μια γειτονιά του p_0 έστω $V = (a, d)$ με $c < a < p_0 < d < z$, ώστε

$$c \notin \bigcup_{m=0}^{\infty} f^{mn}(V)$$

Ας σημειώσουμε ότι $z \notin f^{mn}(K)$ καθώς,
$f^{mn}(K) \subset f(J)$, και $z \in J \backslash f(J)$.
Έπίσης, $c \notin \bigcup_{m=0}^{\infty} f^{mn}(V)$, και άρα

$$c \notin f^n(V).$$

Ισχύει ότι $z \notin f^n((a, p_0))$, και αυτό διότι, $z \notin f^n([c, p_0])$, και $(a, p_0) \subseteq [c, p_0]$.
Ένας άλλος σωστός ισχυρισμός είναι ότι $z \notin f^n([p_0, d])$ διότι, $[p_0, d) \subset K$, και άρα $f^n([p_0, d]) \subset f^n(K)$.
Συγκεντρώνοντας τα παραπάνω έχουμε ότι $z \notin f^n((a, p_0) \cup [p_0, d))$,απο το οποίο έπεται ότι

$$z \notin f^n(V).$$

Άρα $f^n(V) \subset (c,z)$. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία επαγωγικά έπεται ότι για κάθε $m > 0, z \notin f^{mn}(V)$, με άλλα λόγια $z \notin W^u(p_0, f^n)$ και άρα $z \notin K$, το οποίο είναι άτοπο. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήξαμε σε άτοπο. Άρα η υπόθεσή μας ήταν εσφαλμένη.
Τελικά, έχουμε ότι $f(J) = J$. $\square$

Ας σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι αυτό που ισχύει στο Λήμμα 2.1.6. για τον ασταθή υπόχωρο $W^u(p,f)$, ισχύει και και για τους + και - ασταθείς υπόχωρους. Ισχύει δηλαδή ότι,

$$W^u(p,f,+) = f(W^u(p,f,+))$$
και
$$W^u(p,f,-) = f(W^u(p,f,-))$$

Λήμμα 2.1.7. *Έστω $f \in C^0(I,I)$ και έστω p ένα περιοδικό σημείο της f.Αν θέσουμε $J = W^u(p,f)$, ενώ με $\overline{J}$ συμβολίσουμε την κλειστότητα του J, τότε έχουμε ότι κάθε στοιχείο του $\overline{J} \setminus J$, είναι περιοδικό.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \overline{J} \setminus J$.Απο το Λήμμα 2.1.6., έχουμε ότι $f(\overline{J}) = \overline{J}$.
Άρα, υπάρχει $y \in \overline{J}$, τέτοιο ώστε, $y = f(x)$.Όμως, $f(J) = J$, και άρα $y \in \overline{J} \setminus J$, δηλαδή $f(x) \in \overline{J} \setminus J$. Συγκεντρώνοντας τα παραπάνω έχουμε ότι,

$$\overline{J} \setminus J \subset f(\overline{J} \setminus J).$$

Απο το Λήμμα 2.1.1. ότι το σύνολο J είναι συνεκτικό και συμπεραίνουμε ότι και το σύνολο $\overline{J}$, είναι επίσης συνεκτικό. Απο το Λήμμα 2.1.5. έχουμε ότι $J = W^u(p_1, f) = \bigcup_{i=1}^n W^u(p_i, f^n)$. Άρα το σύνολο $\overline{J} \setminus J$, περιέχει τα άκρα των διαστημάτων $W^u(p_i, f^n)$. Εφόσον το πλήθος αυτών των διαστημάτων είναι πεπερασμένο, έχουμε ότι και το σύνολο $\overline{J} \setminus J$ έχει πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία(πλήθος μικρότερο ή ίσο με $2n$).
Τελικά, κάθε στοιχείο του συνόλου $\overline{J} \setminus J$ είναι περιοδικό και αυτό διότι, αν υπήρχε ένα $a \in \overline{J} \setminus J$ το οποίο δεν είναι περιοδικό, τότε το σύνολο

$$Orb(a) = \{a, f(a), f^2(a), ...\}$$

θα είχε άπειρα το πλήθος στοιχεία το οποίο είναι άτοπο καθώς

$$Orb(a) \subseteq \overline{J} \setminus J$$

$\square$

2.2 Το σύνολο $\Omega(f)$

Ορισμός 2.2.1. *Ένα σημείο $x \in I$ θα λεγεται wandering αν υπάρχει σύνολο V που να είναι ϵ-περιοχή του x, ώστε για κάθε $n > 0$ να ισχύει*

$$f^n(V) \cap V = \emptyset.$$

Αν πάρουμε την άρνηση της παραπάνω πρότασης προκύπτει ο παρακάτω ορισμός για το nonwandering σημείο.

Ορισμός 2.2.2. *Ένα σημείο $x \in I$ θα λεγεται nonwandering αν για κάθε σύνολο V που να είναι ϵ-περιοχή του x να υπάρχει $n > 0$ ώστε*

$$f^n(V) \cap V \neq \emptyset.$$

Στο εξής με $\Omega(f)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των nonwandering σημείων. Ας σημειώσουμε ότι το $\Omega(f)$ είναι μη κενό σύνολο και ότι ισχύει $f(\Omega(f)) \subseteq \Omega(f)$.

Λήμμα 2.2.3. *Έστω $f \in C^0(I, I)$ και υποθέτουμε ότι η f έχει πεπερασμένου πλήθους περιοδικά σημεία, ενώ p είναι ένα σταθερό σημείο. Έστω επίσης ότι $x \in W^u(p, f)$. Αν $x > p$ τότε $x \in W^u(p, f, +)$, ενώ αν $x < p$ τότε $x \in W^u(p, f, -)$.*

Απόδειξη. Οι δύο αποδείξεις είναι ανάλογες και άρα, είναι αρκετό να δείξουμε μονάχα το πρώτο. Έστω $x \in W^u(p, f)$ με $x > p$. Υποθέτουμε ότι $x \notin W^u(p, f, +)$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Εφόσον $x \notin W^u(p, f, +)$ έπεται ότι $x \in W^u(p, f, -)$. Έστω p_1 το κοντινότερο σταθερό σημείο στα αριστερά του p. Σε περίπτωση που το p είναι μοναδικό, σαν p_1 επιλέγουμε το αριστερό άκρο του I. Τότε για κάθε $y \in (p_1, p)$ ισχύει ότι $f(y) < y$ ή $f(y) > y$ και αυτό διότι μεταξύ δυο διαδοχικών σταθερών σημείων της f, η ποσότητα $f(y) - y$ αναγκαστικά θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Όμως αν $f(y) > y$ έπεται ότι $W^u(p, f, -) \subseteq W^u(p, f, +)$, απο την Πρόταση 2.1.4, και άρα $x \in W^u(p, f, +)$ το οποίο αντιβαίνει στη υπόθεσή μας. Τελικά, για κάθε $y \in (p_1, p)$, $f(y) < y$. Ας θεωρήσουμε τώρα το σύνολο,

$$A = \{y < p_1 : f(y) = p\}.$$

Το σύνολο αυτό είναι μη κενό διότι $x \in W^u(p, f, -)$. Έστω $z = \sup A$. Τότε ισχύει ότι $z < p_1$ και $f(z) = p$.

Έστω $y \in (z, p_1)$. Το $f([z,y])$ είναι το διάστημα $[f(y), f(z)]$, δηλαδή $[f(y), p]$. Εφόσον $x \in W^u(p, f, -)$ αντιλαμβανόμαστε ότι $z \in W^u(p, f, -)$ το οποίο σημαίνει ότι $z \in f^n(f([z,y]))$, για κάποιο $n > 0$, δηλαδή

$$z \in f^{n+1}[z, y].$$

Επίσης, $y \in f^{n+1}([z,y])$ και συμπεραίνουμε ότι το $f^{n+1}([z,y])$ είναι διάστημα που περιέχει τα y, z. Έχουμε λοιπόν ότι $[z,y] \subseteq f^{n+1}([z,y])$ το οποίο, μας εγγυάται την ύπαρξη σταθερού σημείου της f^{n+1} στο $[z,y]$. Με άλλα λόγια, η f έχει περιοδικό σημείο στο $[z,y]$. Ωστόσο, το y επιλέχθηκε τυχαία, πράγμα απο το οποίο έπεται ότι για κάθε τιμη που το y μπορεί να πάρει, υπάρχει και τουλάχιστον ένα περιοδικό σημείο. Συνεπώς η f έχει άπειρα περιοδικά σημεία, το οποίο είναι άτοπο. Άρα,

$$x \in W^u(p, f, +).$$

□

Θεώρημα 2.2.4. *Έστω $f \in C^0(I, I)$ και υποθέτουμε ότι η f έχει πεπερασμένου πλήθους περιοδικά σημεία, ενώ p είναι ένα σταθερό σημείο.*
Αν $x \in W^u(p, f)$ με $f(x) = p$, τότε $x = p$.

Απόδειξη. Έστω $x \in W^u(p, f)$ με $f(x) = p$ και υποθέτουμε ότι $x \neq p$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x > p$. Τότε απο το Λήμμα 2.2.3. έχουμε ότι $x \in W^u(p, f, +)$. Για κάποιο διάστημα $(q, z) \subseteq (p, x)$ ισχύει ότι $f^{-1}(p) \cap (q, z) = \emptyset$ και $f(z) = p$. Για κάθε $a \in I$ με $a < z$, το $f([a, z])$ είναι διάστημα που περιέχει το p. Ισχύει ότι για κάθε $a < z$, το $f([a,z])$ περιέχει διάστημα της μορφής $[b, p]$. Αν όχι, θα έπρεπε για κάθε $a < z$ το $f([a,z])$ να περιέχει ένα διάστημα της μορφής $[p, b]$, το οποίο είναι αδύνατο. Αν $p < a < z$, τότε $[p, b] \subseteq f([a, z])$.
Καθώς $z \in W^u(p, f, +)$, έπεται ότι για κάποιο $n > 0$, $z \in f^n([p, b])$ το οποίο μας δίνει ότι $z \in f^{n+1}([a,z])$. Έχουμε λοιπόν ότι τα a, z ανήκουν στο διάστημα $f^{n+1}([a,z])$, δηλαδή $[a,z] \subseteq f^{n+1}([a,z])$ το οποίο μας λέει ότι η f έχει περιοδικό σημείο στο $[a,z]$. Όμως το a επιλέχθηκε τυχαία και άρα η f έχει άπειρα περιοδικά σημεία, πράγμα το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεσή μας.
Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει ένα $y \in (p, z)$ ώστε να ισχύει ότι $f(y) > p$, και αυτό διότι αν υποθέσουμε ότι για κάθε $y \in (p, z)$ ισχύει ότι $f(y) \leq p$, θα καταλήξουμε σε άτοπο. Πράγματι, καθώς $z \in W^u(p, f, +)$ παίρνουμε ότι για κάποιο $n > 0$, $z \in f^n([a, z])$ απο την Πρόταση 2.1.3. Επίσης, $a \in f^n([a, z])$. Συνεπώς

$[a,z] \subseteq f^n([a,z])$, το οποίο μας εγγυάται την ύπαρξη περιοδικού σημείου της f. Όμως το a επιλέχθηκε τυχαία, και άρα η f έχει άπειρα περιοδικά σημεία, το οποίο είναι άτοπο.
Άρα υπάρχει $y \in (p,z)$ ώστε $f(y) > p$.
Θεωρούμε το σύνολο,

$$A = \{w > y : f(w) = p\}$$

και θέτουμε $d = \inf A$. Ισχύει ότι $f(d) = p$ και $y < d < z$. Θεωρούμε ένα $a \in I$ με $p < a < d$. Σύμφωνα με τον ισχυρισμό τον οποίο δείξαμε παραπάνω, $[p,b] \subseteq f([a,d])$ για κάποιο $b \in I$. Όμως $d \in W^u(p,f,+)$ απο το οποίο συμπεραίνουμε ότι για κάποιο $n > 0$ ισχύει ότι $d \in f^n([p,b])$, δηλαδή $d \in f^{n+1}([a,d])$. Συνοψίζοντας, έχουμε ότι τα a, d ανήκουν στο διάστημα $f^{n+1}([a,d])$, δηλαδή $[a,d] \subseteq f^{n+1}([a,d])$ πράγμα το οποίο μας εγγυάται την ύπαρξη περιοδικού σημείου της f στο διάστημα $[a,d]$. Εφόσον το a επιλέχθηκε τυχαία συμπεραίνουμε ότι η f έχει άπειρα περιοδικά σημεία, πράγμα το οποίο είναι άτοπο.
Άρα $x = p$. □

Θεώρημα 2.2.5. *Έστω $f \in C^0(I,I)$ και υποθέτουμε ότι η f έχει πεπερασμένου πλήθους περιοδικά σημεία. Έστω $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ μια περιοδική τροχιά της f περιόδου n. Αν p_i και p_j είναι διακεκριμένα στοιχεία της παραπάνω τροχιάς, τότε $p_j \notin W^u(p_i, f^n)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα $p_i, p_j \in \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ με $p_i \neq p_j$ και $p_j \in W^u(p_i, f^n)$. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $\kappa = 1, 2, \ldots, n$ το σύνολο $W^u(p_\kappa, f^n)$, περιέχει ένα στοιχείο του συνόλου $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \backslash \{p_\kappa\}$. Πράγματι, ας θεωρήσουμε μια ε-περιοχή του p_κ έστω V. Έστω r ο μικρότερος θετικός ακέραιος με $f^r(p_i) = p_\kappa$. Έστω W μια γειτονιά του p_i ώστε $f^r(W) \subseteq V$. Υπάρχει $m > 0$ ώστε $p_j \in f^{mn}(W)$ και αυτό διότι $p_j \in W^u(p_i, f^n)$. Έχουμε λοιπόν, $f^r(p_j) \in f^r(f^{mn}(W)) = f^{mn}(f^r(W)) \subseteq f^{mn}(V)$, δηλαδή $f^r(p_j) \in f^{mn}(V)$. Εφόσον όμως το V είναι τυχαίο έπεται ότι $f^r(p_j) \in W^u(p_\kappa, f^n)$. Επίσης $f^r(p_i) = p_\kappa$. Όμως $p_i \neq p_j$ το οποίο μας δίνει $f^r(p_i) \neq f^r(p_j)$,διότι τα p_i, p_j είναι σημεία της τροχιάς. Άρα $p_\kappa \neq f^r(p_j)$, και η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$. Το $W^u(p_1, f^n)$ είναι διάστημα που περιέχει το p_1 και κάποιο άλλο στοιχείο του $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \backslash \{p_1\}$. Άρα $p_2 \in W^u(p_1, f^n)$. Παρόμοια, είτε $p_1 \in W^u(p_2, f^n)$ είτε $p_3 \in W^u(p_2, f^n)$. Ας υποθέσουμε ότι
$p_1 \in W^u(p_2, f^n)$. Συμπεραίνουμε ότι $p_1 \in W^u(p_2, f^n, -)$ και ότι
$p_2 \in W^u(p_1, f^n, +)$ καθώς $p_1 < p_2$ σε συνδυασμό με το Λήμμα 2.2.3. Τα p_1, p_2

είναι στοιχεία του $W^u(p_1, f^n)$ και άρα $[p_1, p_2] \subseteq W^u(p_1, f^n)$. Απο το Θεώρημα 2.2.4. έπεται ότι για κάθε $x \in (p_1, p_2), f^n(x) > p_1$. Καθώς $p_2 \in W^u(p_1, f^n, +)$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x \in (p_1, p_2)$, ώστε $f^n(x) = p_2$.
Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{x \in (p_1, p_2) : f^n(x) = p_2\}$$

και θέτουμε $z = infA$. Τότε $z \in (p_1, p_2)$ και $f^n(z) = p_2$. Θεωρούμε ένα $a \in I$ με $p_1 < a < z$. Το $f^n([a, z])$ περιέχει ένα διάστημα της μορφής $[b, p_2]$ για κάποιο $b \in I$. Αναφέραμε παραπάνω ότι $p_1 \in W^u(p_2, f^n, -)$, δηλαδή $p_1 \in f^{mn}([a, p_2])$ και άρα $[a, z] \subseteq f^{mn}([a, z])$. Αυτό όμως μας λέει ότι η f έχει περιοδικό σημείο στο $[a, z]$. Όμως το a επιλέχθηκε τυχαία και άρα η f έχει άπειρα περιοδικά σημεία το οποίο είναι άτοπο.
Άρα $p_1 \notin W^u(p_2, f^n)$, δηλαδή $p_3 \in W^u(p_2, f^n)$. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία με παραπάνω καταλήγουμε στο ότι $p_{i+1} \in W^u(p_i, f^n)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ισχύει ότι $p_{n-1} \in W^u(p_n, f^n)$ καθώς το σύνολο $W^u(p_n, f^n)$ περιέχει ένα στοιχείο του $\{p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\}$. Έχουμε επίσης ότι
$p_n \in W^u(p_n, f^n)$. Άρα $[p_1, p_2] \subseteq W^u(p_n, f^n)$.
Ξανά απο Θεώρημα 2.2.4. έχουμε ότι $f^n(x) > p_{n-1}$ για κάθε $x \in (p_{n-1}, p_n)$. Ισχύει ότι $p_n \in W^u(p_{n-1}, f^n)$ και ότι $p_n > p_{n-1}$ απο τα οποία, σε συνδυασμό με το Λήμμα 2.2.3. συμπεραίνουμε ότι $p_n \in W^u(p_{n-1}, f^n, +)$, δηλαδή υπάρχει $x \in (p_{n-1}, p_n)$ τέτοιο ώστε $f^n(x) = p_n$. Θεωρούμε το σύνολο
$B = \{x \in (p_{n-1}, p_n) : f^n(x) = p_n\}$ και θέτουμε $z = infB$. Ισχύει ότι
$z \in (p_{n-1}, p_n)$ και ότι $f^n(z) = p_n$. Έστω $a \in I$ με $p_{n-1} < a < z < p_n$. Το $f^n([a, z])$ περιέχει ένα διάστημα της μορφής $[a, p_n]$. Έχουμε λοιπόν ότι
$[a, z] \subseteq [a, p_n] \subseteq f^n([a, z])$ το οποίο μας εγγυάται την ύπαρξη περιοδικού σημείου της f στο $[a, z]$. Η επιλογή όμως του a έγινε τυχαία και άρα η f έχει άπειρα περιοδικα σημεία το οποίο είναι άτοπο. Τελικά, $p_j \notin W^u(p_i, f^n)$. □

Θεώρημα 2.2.6. *Έστω $f \in C^0(I, I)$. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\Omega(f)$ είναι πεπερασμένο και ότι το $x \in \Omega(f)$ δεν είναι περιοδικό. Τότε για κάποιο περιοδικό σημείο p της f, υπάρχει $z \in W^u(p, f)$ τέτοιο ώστε $f(z) = p$ ενώ το z δεν είναι περιοδικό.*

Απόδειξη. Απο το γεγονός ότι $x \in \Omega(f)$ έπεται ότι $f^m(x) \in \Omega(f)$ και αυτό για κάθε $m > 0$. Όμως το $\Omega(f)$ είναι πεπερασμένο. Συνεπώς, υπάρχει κάποιο $z \in Orb(x)$ για το οποίο $f(z) = p$ όπου το p είναι περιοδικό σημείο, ενώ το z όχι. Ισχύει επίσης ότι $z \in \Omega(f)$, καθώς $z \in Orb(x)$.
Για να δείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε ότι $z \in \overline{W^u(p, f)}$, και αυτό

απο το Λήμμα 2.1.7. Υποθέτουμε ότι $z \notin \overline{W^u(p,f)}$.
Έστω $(a,b) \subseteq I$ ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το z, για το οποίο ισχύει ότι $[a,b] \cap W^u(p,f) = \emptyset$. Απο την τελευταία πρόταση προκύπτει ότι $\{a,b\} \cap f^m(N) = \emptyset$, όπου N μια γειτονιά του p, και αυτό για κάθε $m > 0$.
Έχουμε επίσης ότι για κάθε $m > 0$ το σύνολο $f^m(N)$ είναι διάστημα που περιέχει κάποιο στοιχείο της τροχιάς του p δηλαδή του κύκλου $Orb(p)$. Επειδή όμως $Orb(p) \subseteq W^u(p,f)$, έχουμε ότι $Orb(p) \cap (a,b) = \emptyset$, απο το οποίο έπεται ότι $f(N) \cap (a,b) = \emptyset$, και αυτό για κάθε $m > 0$.
Μπορούμε να επιλέξουμε το N να είναι μικρότερο, εφόσον αυτό είναι αναγκαίο, ώστε να υποθέσουμε ότι $N \cap (a,b) = \emptyset$.
Ας θεωρήσουμε τώρα V να είναι μια ε-περιοχή του z, για την οποία ισχύει ότι $V \subseteq (a,b)$ και $f(V) \subseteq N$. Τότε για κάθε $m > 0$ θα έχουμε ότι $f^m(N) \cap (a,b) = \emptyset$, δηλαδή $f^m(f(V)) \cap V = \emptyset$ και τελικά, $f^{m+1}(V) \cap V = \emptyset$.
Αυτό όμως σημαίνει ότι το z είναι wandering, δηλαδή $z \notin \Omega(f)$ το οποίο φυσικά είναι άτοπο.
Άρα $z \in \overline{W^u(p,f)}$ δηλαδή $z \in \overline{W^u(p,f)} \setminus W^u(p,f)$ και απο το Λήμμα 2.1.7 έχουμε ότι το z δεν είναι περιοδικό. □

Θεώρημα 2.2.7. ***(L.S.Block** [2])* *Έστω $f \in C^0(I,I)$ και υποθέτουμε ότι το σύνολο $\Omega(f)$ είναι πεπερασμένο. Τότε το $\Omega(f)$ είναι το σύνολο των περιοδικών σημείων της f.*

Απόδειξη. Έστω $z \in \Omega(f)$ και υποθέτουμε ότι δεν είναι περιοδικό. Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έστω $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ μια περιοδική τροχιά της f. Απο το Θεώρημα 2.2.6 έχουμε ότι υπάρχει $z \in W^u(p_1,f)$ ώστε $f(z) = p_1$, ενώ το z να μην είναι περιοδικό σημείο. Εφόσον λοιπόν $z \in W^u(p_1,f)$, απο το Λήμμα 2.1.5 έχουμε ότι $z \in W^u(p_1,f^n) \cup W^u(p_2,f^n) \cup \ldots \cup W^u(p_n,f^n)$, δηλαδή $z \in W^u(p_\kappa,f^n)$ για κάποιο $p_\kappa \in \{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$.
Αναφέραμε παραπάνω ότι $f(z) = p_1$, δηλαδή $f^n(z) = f^{n-1}(p_1)$, απο το οποίο τελικά έπεται ότι,

$$f^n(z) \in Orb(p_1).$$

Απο το Λήμμα 2.1.6 έχουμε ότι $f(W^u(p_\kappa,f^n)) = W^u(p_\kappa,f^n)$ και επειδή $z \in W^u(p_\kappa,f^n)$ καταλαβαίνουμε ότι $f^n(z) \in W^u(p_\kappa,f^n)$. Τότε απο το Θεώρημα 2.2.5 έπεται ότι $f^n(z) = p_\kappa$ και λόγω του ότι $z \in W^u(p_\kappa,f^n)$ συμπεραίνουμε ότι $p_\kappa = z$ και αυτό απο το Θεώρημα 2.2.4. Αυτό όμως είναι άτοπο καθώς το z δεν είναι περιοδικό. Τελικά, το $\Omega(f)$ είναι το σύνολο των περιοδικών σημεών της f. □

Κεφάλαιο 3

Το Θεώρημα του *Sarkovskii*

3.1 Μία ειδική περίπτωση

Λήμμα 3.1.1. *Έστω $f \in C^0(I, I)$ και υποθέτουμε ότι η f έχει περιοδική τροχιά $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, με $p_i < p_{i+1}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ορίζουμε I_κ να είναι τα κλειστά διαστήματα με άκρα p_κ και $p_{\kappa+1}$, δηλαδή $I_\kappa = [p_\kappa, p_{\kappa+1}]$, $\kappa = 1, 2, \ldots .n-1$. Τότε για κάθε κ, υπάρχει j ώστε $I_j \subseteq f(I_\kappa)$, με $\kappa \neq j$.*

Απόδειξη. Έστω I_κ ένα διάστημα όπως παραπάνω. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $j = 1, 2, \ldots .n-1$, ώστε να ισχύει ότι $I_j \subseteq f(I_\kappa)$.
$f(I_\kappa) = f([p_\kappa, p_{\kappa+1}]) \subseteq < f(p_\kappa), f(p_{\kappa+1}) >$, όπου με $< f(p_\kappa), f(p_{\kappa+1}) >$ συμβολίζουμε το κλειστό διάστημα με άκρα $f(p_\kappa)$ και $f(p_{\kappa+1})$. Χωρίς βλαβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $< f(p_\kappa), f(p_{\kappa+1}) >= [f(p_\kappa), f(p_{\kappa+1})]$ (με όμοιο σκεπτικό λειτουργούμε και όταν ισχύει το αντίθετο).
Δεν μπορεί να ισχύει ότι $f(p_\kappa) = f(p_{\kappa+1})$ και αυτό διότι τα $f(p_\kappa), f(p_{\kappa+1})$ είναι στοιχεία του συνόλου $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.
Αν τα $f(p_\kappa)$ και $f(p_{\kappa+1})$ έχουν μεταξύ τους δύο και άνω στοιχεία της τροχιάς, τότε σαν p_j επιλέγουμε να είναι το κοντινότερο σημείο απο τα δεξιά του $f(p_\kappa)$ το οποίο ανήκει στην τροχιά $\{p_1, p_2, \ldots .p_n\}$, ενώ σαν p_{j+1} επιλέγουμε να είναι το κοντινότερο σημείο απο τα αριστερά του $f(p_{\kappa+1})$ το οποίο ανήκει στην τροχιά $\{p_1, p_2, \ldots .p_n\}$.
Αν τα $f(p_\kappa)$ και $f(p_{\kappa+1})$ έχουν μεταξύ τους ένα στοιχείο της τροχιάς,έστω α, επιλέγουμε $p_j = \alpha$ και $p_{j+1} = f(p_{\kappa+1})$.
Αν τα $f(p_\kappa)$ και $f(p_{\kappa+1})$ δεν έχουν μεταξύ τους κάποιο στοιχείο της τροχιάς τότε επιλέγουμε $p_j = f(p_\kappa)$ και $p_{j+1} = f(p_{\kappa+1})$.
Και στις 3 περιπτώσεις η επιλογή ενός I_j για το οποίο ισχύει ότι $I_j \subseteq f(I_\kappa)$

είναι εφικτή.
Επίσης αναφέραμε ότι πρέπει $j \neq \kappa$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε κ ισχύει ότι $I_\kappa \nsubseteq f(I_\kappa)$.
Έστω ότι $I_\kappa \subseteq f(I_\kappa)$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Απο αυτό που υποθέσαμε, έπεται ότι $[p_\kappa, p_{\kappa+1}] \subseteq < f(p_\kappa), f(p_{\kappa+1}) >$. Ξανά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $< f(p_\kappa), f(p_{\kappa+1}) >= [f(p_\kappa), f(p_{\kappa+1})]$ και άρα έχουμε
$[p_\kappa, p_{\kappa+1}] \subseteq [f(p_\kappa), f(p_{\kappa+1})]$, το οποίο τελικά μας δίνει ότι $f(p_\kappa) \leq p_\kappa$ και $f(p_{\kappa+1}) \geq p_{\kappa+1}$.Εφόσον $f(p_\kappa) \leq p_\kappa$ και $f(p_\kappa) = p_i$ για κάποιο
$p_i \in \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, έχουμε ότι $p_i = p_\kappa$, πράγμα το οποίο είναι αδύνατο αν $i \neq \kappa$ ενώ αν $i = \kappa$ θα είχαμε $f(p_\kappa) = p_\kappa$ το οποίο είναι επίσης αδύνατο. □

Θεώρημα 3.1.2. *Έστω $f \in C^0(I, I)$ και υποθέτουμε ότι η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου $n > 1$. Τότε η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου 2.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το μη σταθερό περιοδικό σημείο της f, έχει περίοδο μεγαλύτερη απο δύο, αλλιώς τότε έχουμε αμέσως το ζητούμενο. Έστω λοιπόν n το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου $\{l \geq 3 : l$ περίοδος περιοδικού σημείου της $f\}$. Ας θεωρήσουμε μία περιοδική τροχιά της f, έστω
$\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ με $p_i < p_{i+1}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ορίζουμε I_κ να είναι τα κλειστά διαστήματα με άκρα p_κ και $p_{\kappa+1}$, δηλαδή
$I_\kappa = [p_\kappa, p_{\kappa+1}]$, $\kappa = 1, 2, \ldots .n-1$. Απο το Λήμμα 3.1.1, έχουμε ότι για κάθε κ, υπάρχει j, τέτοιο ώστε $I_j \subseteq f(I_\kappa)$. Βάζουμε κάποια διαστήματα σε σειρά, $\{I_{\kappa_1}, I_{\kappa_2}, \ldots, I_{\kappa_m}\}$ με $m = 2, 3, \ldots, n-1$ ώστε να ισχύει ότι, $I_{\kappa_{i+1}} \subseteq f(I_{\kappa_i})$, για $i = 1, 2, \ldots, m-1$ και $I_{\kappa_1} \subseteq f(I_{\kappa_m})$.
Θεωρούμε την ακολουθία κλειστών διαστημάτων J_{κ_m} για την οποία ισχύει ότι για $i = 1, 2, \ldots, m-1$ έχουμε $J_{\kappa_i} \subseteq I_{\kappa_i}$ και $f(J_{\kappa_i}) = J_{\kappa_{i+1}}$, ενώ $f(J_{\kappa_m}) = I_{\kappa_1}$. Τότε θα έχουμε

$$f^m(J_{\kappa_1}) = f^{m-1}(f(J_{\kappa_1})) = f^{m-1}(J_{\kappa_2}) = \ldots = f(J_{\kappa_m}) = I_{\kappa_1}$$

το οποίο με άλλα λόγια μας λέει ότι $f^m(J_{\kappa_1}) = I_{\kappa_1}$. Όμως $J_{\kappa_1} \subseteq I_{\kappa_1}$, απο το οποίο έπεται ότι $J_{k_1} \subseteq f^m(J_{\kappa_1})$. Απο το Λήμμα 1.2.5 συμπεραίνουμε ότι η f^m, έχει σταθερό σημείο στο διάστημα J_{κ_1}, έστω y.
Έχουμε δηλαδή ότι υπάρχει $y \in J_{\kappa_1}$ με την ιδιότητα $f^m(y) = y$. Έχουμε επίσης ότι $m < n$ και άρα

$$Orb(y) \cap \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} = \emptyset$$

και αυτό διότι αν δεν ίσχυε, θα υπήρχαν i, j τέτοια ώστε $y_i = p_j$. Όμως $f^m(y_i) = y_i$ δηλαδή $f^m(p_j) = p_j$ το οποίο είναι άτοπο διότι $m < n$. Έχουμε τελικά ότι $Orb(y) \cap \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} = \emptyset$ το οποίο μας δίνει ότι $f^i(y) \in I_{\kappa_{i+1}}$

για $i = 1, 2, \ldots, m-1$. Τελικά ο αριθμός m είναι η περίοδος του περιοδικού σημείου y. Όμως $m < n = min\{l \geq 3 : l$ περίοδος της $f\}$ και έχουμε ότι $m = 2$. □

Θεώρημα 3.1.3. *Έστω $f \in C^0(I, I)$ και υποθέτουμε ότι η f έχει περιοδικό σημείο του οποίου η περίοδος δεν είναι δύναμη του 2. Τότε για κάθε $\kappa = 1, 2, \ldots, n$, η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου 2^κ. Συνεπώς, η f έχει άπειρα περιοδικά σημεία.*

Απόδειξη. Προχωράμε με επαγωγή. Έστω κ ένας θετικός ακέραιος και ορίζουμε $n = 2^{\kappa-1}$. Τότε η f^n έχει περιοδικό σημείο το οποίο δεν είναι σταθερό. Από το Θεώρημα 3.1.2 έχουμε ότι η f^n έχει περιοδικό σημείο p περιόδου 2. Δηλαδή το περιοδικό σημείο p της f έχει περίοδο 2^κ. □

Ορισμός 3.1.4. *Ορίζουμε το σύνολο $P(f)$ να είναι το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων οι οποίοι είναι περίοδοι των περιοδικών σημείων της f.*

Θεώρημα 3.1.5. *(**L.S.Block** [2]) Έστω $f \in C^0(I, I)$ και υποθέτουμε ότι η f έχει πεπερασμένου πλήθους περιοδικά σημεία. Τότε για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο n, έχουμε ότι $P(f) = \{2^\kappa : \kappa = 1, 2, \ldots, n\}$*

Απόδειξη. Απο το Θεώρημα 3.1.3. έχουμε ότι υπάρχει κάποιος θετικός ακέραιος n ώστε,

$$P(f) \subseteq \{2^\kappa : \kappa = 0, 1, 2, \ldots, n\}$$

και $2^n \in P(f)$. Αν $n = 0, 1$ το συμπέρασμα έπεται αμέσως, άρα υποθέτουμε ότι $n \geq 2$. Έστω $j = 2^{n-2}$. Τότε η f^j, έχει περιοδικό σημείο περιόδου 4. Απο το Θεώρημα 3.1.2. έπεται ότι έχει περιοδικό σημείο περιόδου 2. Έτσι η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου 2^{n-1}. Επαναλαμβάνοντας αυτήν την διαδικασία καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

3.2 Το Θεώρημα του *Sarkovskii*

Λήμμα 3.2.1. *Έστω $f \in C^0(I, I)$ και $K, J \subseteq I$ συμπαγή διαστήματα, τέτοια ώστε $K \subseteq f(J)$. Τότε υπάρχει συμπαγές διάστημα $L \subseteq J$ τέτοιο ώστε $f(L) = K$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $J \subseteq K$. Έστω $K = [a, b]$ και $J = [x_1, x_2]$. Αφού $K \subseteq f(J)$ έχουμε ότι $[a, b] \subseteq < f(x_1), f(x_2) >$. Υπενθυμίζουμε ότι με $< f(x_1), f(x_2) >$ συμβολίζουμε το κλείστο διάστημα με άκρα $f(x_1)$ και $f(x_2)$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $< f(x_1), f(x_2) >= [f(x_1), f(x_2)]$ και τότε έχουμε ότι $f(x_1) < a$ και $f(x_2) > b$.
Όμως η f είναι συνεχής και άρα απο το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών έπεται ότι υπάρχουν $c, d \in J$ τέτοια ώστε $f(c) = a$ και $f(d) = b$. Αυτό όμως μας δίνει ότι $f([c, d]) \subseteq [a, b]$ δηλαδή $f([c, d]) \subseteq K$. Αν επιλέξουμε $L = [c, d]$, η απόδειξη τελειώνει. □

Λήμμα 3.2.2. *Έστω $f \in C^0(I, I)$ και υποθέτουμε ότι τα $J_0, J_1, \ldots, J_m$ είναι συμπαγή διαστήματα με $J_i \subseteq I$, για κάθε $i = 0, 1, \ldots, m$, τέτοια ώστε $J_\kappa \subseteq f(J_{\kappa-1})$, για $\kappa = 1, 2, \ldots, m$. Τότε υπάρχει συμπαγές διάστημα $L \subseteq J_0$ τέτοιο ώστε $f^m(L) = J_m$ και $f^\kappa(L) \subseteq J_\kappa$, για $\kappa = 1, 2, \ldots, m$. Αν επίσης $J_0 \subseteq J_m$, τότε υπάρχει σημείο y ώστε $f^m(y) = y$ και $f^\kappa(y) \in J_\kappa$ για $\kappa = 0, 1, \ldots, m$.*

Απόδειξη. Στην περίπτωση όπου $m = 1$ έχουμε το προηγούμενο Λήμμα αν θέσουμε $J = J_0$ και $K = J_1$.
Ας υποθέσουμε ότι το Λήμμα ισχύει για κάθε τιμή αυστηρά μικρότερη απο m. Θα έχουμε λοιπόν ότι υπάρχει συμπαγές διάστημα $A \subseteq J_0$ ώστε $f^{m-1}(A) = J_m$ και $f^{\kappa-1}(A) \subseteq J_\kappa$, για κάθε $\kappa = 1, 2, \ldots, m-1$. Όμως αν επιλέξουμε $A = f(L)$ έχουμε ότι υπάρχει $L \subseteq J_0$ ώστε $f^{m-1}(f(L)) = J_m$, δηλαδή

$$f^m(L) = J_m$$

και $f^{\kappa-1}(f(L)) \subseteq J_\kappa$, δηλαδή

$$f^\kappa(L) \subseteq J_\kappa$$

για κάθε $\kappa = 1, 2, \ldots, m-1$.
Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $J_0 \subseteq J_m$ τότε θα έχουμε

$$J_0 \subseteq J_m \subseteq f(J_{m-1}) \subseteq f^2(J_{m-2}) \subseteq \ldots \subseteq f^m(J_0)$$

δηλαδή $J_0 \subseteq f^m(J_0)$ απο το οποίο έπεται ότι η f^m έχει σταθερο σημείο στο J_0. Με άλλα λόγια, υπάρχει $y \in J_0$ με

$$f^m(y) = y$$

ενώ ισχύει επίσης ότι

$$f^\kappa(y) \in J_\kappa$$

για κάθε $\kappa = 1, 2, \ldots, m-1$, και αυτό διότι $y \in J_0$ και $f^\kappa(J_0) \subseteq J_\kappa$. □

Πρόταση 3.2.3. *Μεταξύ δύο τυχαίων σημείων μιας περιοδικής τροχιάς περιόδου $n > 1$, υπάρχει περιοδικό σημείο με περίοδο μικρότερη απο n.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μια περιοδική τροχιά της f περιόδου n και επιλέγουμε δύο διαδοχικά στοιχεία της, έστω a, b με $a < b$. Ισχύει ότι $f^m(a) > a$ και $f^m(b) < b$ για κάποιο $m < n$ και αυτό διότι, αν δεν ίσχυε αυτή η πρόταση, θα ίσχυε η άρνηση αυτής η οποία μας λέει ότι, για κάθε $m > n$ έχουμε ότι $f^m(a) \leq a$ ή $f^m(b) \geq b$, το οποίο είναι αδύνατο διότι τότε η τροχιά θα είχε περίοδο $n+1$. Θεωρούμε τώρα την ακολουθία κλειστών διαστημάτων,

$$J_\kappa =< f^\kappa(a), f^\kappa(b) >$$

με άκρα $f^\kappa(a)$ και $f^\kappa(b)$, διότι δεν μπορούμε να γνωρίζουμε μέσω ποιάς διάταξης σχετίζονται τα $f^\kappa(a)$ και $f^\kappa(b)$ για τις διάφορες τιμές του κ.
Αφού $f^m(a) > a$ και $f^m(b) < b$ για κάποιο $m < n$, ισχύει ότι $J_0 \subseteq J_m$.

Δηλαδή έχουμε επίσης ότι $J_0 \subseteq J_m$. Απο το Λήμμα 3.2.2 έπεται ότι υπάρχει $y \in J_0$ τέτοιο ώστε $f^m(y) = y$ και $f^\kappa(y) \subseteq J_\kappa$ για κάθε $\kappa = 0, 1, \ldots, m-1$. Το σημείο y έχει περίοδο $m < n$ και έτσι η απόδειξη τελειώνει. □

Υποθέτουμε για άλλη μια φορά ότι $f \in C^0(I, I)$, και θεωρούμε ότι η f έχει περιοδική τροχιά περιόδου n, έστω $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, με $p_i < p_{i+1}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ορίζουμε την ακολουθία διαστημάτων $I_\kappa = [p_\kappa, p_{\kappa+1}]$, για $\kappa = 1, 2, \ldots, n-1$.

Ορισμός 3.2.4. *Ορίζουμε ώς* ***διατεταγμένο γράφημα*** *(directed graph) την σχέση που συνδέει δύο διαστήματα I_i και I_j, και συμβολίζουμε ότι $I_i \to I_j$, η οποία είναι ότι το διάστημα I_j περιέχεται στο κλειστό διάστημα $< f(x_i), f(x_{i+1}) >$, όπου x_i, x_{i+1} τα άκρα του I_i. Στο εξής τα σύνολα I_κ θα ονομάζονται κορυφές του γραφήματος.*

Ορισμός 3.2.5. *Ο κύκλος μήκους n,*

$$J_0 \to J_1 \to J_2 \ldots \to J_{n-1} \to J_0$$

θα ονομάζεται ***θεμελιώδης κύκλος*** *εφόσον, αν το a είναι άκρο του J_0, τότε $f^\kappa(a)$, θα είναι άκρο του διαστήματος J_κ, για κάθε $\kappa = 1, 2, \ldots, n-1$.*

Ο θεμελιώδης κύκλος πάντα υπάρχει και είναι μοναδικός. Πράγματι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας πάρουμε $a = x_1$, ώστε $J_0 = J_1$. Ας υποθέσουμε ότι τα $J_0, /ldots, J_{i-1}$, έχουν ορισθεί. Αν $J_{i-1} = [z_1, z_2]$, έτσι ώστε το $f^{i-1}(a)$ να είναι είτε το a είτε το b, τότε πρέπει να πάρουμε σαν J_i το $I_\kappa \subseteq < f(z_1), f(z_2) >$, το οποίο είναι •με μοναδικό τρόπο ορισμένο και έχει άκρο το $f^i(a)$. Τότε $J_n = J_0$. Μεσα σ'αυτόν, κάθε κορυφή εμφανίζεται το πολύ δυο φορές, καθώς η κάθε κορυφή έχει δύο άκρα. Αν ένας θεμελιώδης κύκλος περιέχει μια κορυφή δύο φορές, τότε μπορεί να αποσυντεθεί σε δύο άλλους κύκλους, ωστε ο καθένας να περιέχει αυτή την κορυφή μονάχα μια φορά.

Ορισμός 3.2.6. *Ένας θεμελιώδης κύκλος θα λέγεται* **αρχικός**, *αν δεν αποτελείται εξ'ολοκλήρου απο έναν κύκλο μικρότερου μήκους ο οποίος επαναλαμβάνεται κάποιες φορές.*

Η ύπαρξη αρχικού θεμελιώδους κύκλου μήκους m, μας δίνει την δυνατότητα να συμπεράνουμε την ύπαρξη μιας περιοδικής τροχιάς περιόδου m.

Λήμμα 3.2.7. *Έστω $f \in C^0(I, I)$ και υποθέτουμε ότι η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου $n > 1$. Αν το σχετιζόμενο διατεταγμένο γράφημα περιέχει ένα αρχικό κύκλο μήκους m έστω $J_0 \to J_1 \to \ldots \to J_{m-1} \to J_0$, τότε η f έχει περιοδικό σημείο y περιόδου m ώστε, $f^\kappa(y) \in J_\kappa$ για κάθε $\kappa = 0, 1, 2, \ldots, m-1$.*

Απόδειξη. Επειδή, $J_{\kappa-1} \to J_\kappa$, αντιλαμβανόμαστε ότι

$$J_\kappa \subseteq < f(x_{\kappa-1}), f(x_\kappa) > \subseteq f(< x_{\kappa-1}, x_\kappa >) \subseteq f(J_{\kappa-1})$$

για κάθε $\kappa = 1, 2, \ldots, m-1$. Έχουμε επίσης ότι
$J_0 \subseteq f(J_{m-1}) \subseteq \ldots \subseteq f^m(J_0)$. Απο το Λήμμα 3.2.2. έπεται ότι υπάρχει $y \in J_0$ ώστε, $f^m(y) = y$ και $f^\kappa(y) \in J_\kappa$ για κάθε $\kappa = 0, 1, \ldots, m-1$. Δηλαδή η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου m. □

Πρόταση 3.2.8. *Έστω $f \in C^0(I, I)$ και υποθέτουμε ότι η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου $n > 1$. Τότε σίγουρα έχει σταθερό σημείο.*

Απόδειξη. Το διατεταγμένο γράφημα περιέχει σίγουρα μια επανάληψη. Πράγματι, αν $x_1 < \ldots < x_n$ είναι μια περιοδική τροχιά και $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, τοτε σίγουρα θα ισχύει ότι $f(x_1) > x_1$ και $f(x_n) < x_n$. Απο αυτό έπεται ότι για κάποιο $j = 1, 2, \ldots, n-1$ ισχύει ότι $f(x_j) > x_j$ και $f(x_{j+1}) < x_{j+1}$. Τότε, $f(x_j) \geq x_{j+1}$ και $f(x_{j+1}) \leq x_j$ το οποίο μας λέει ότι $I_j \to I_j$. Με άλλα λόγια υπάρχει σίγουρα $\kappa \in 1, 2, \ldots, n-1$ ώστε, $I_\kappa \subseteq f(I_\kappa)$. Απο το Λήμμα 1.2.5 έπεται ότι η f έχει σταθερό σημείο στο I_κ και κατα συνέπεια στο I. □

Πρόταση 3.2.9. *Έστω $f \in C^0(I, I)$ και υποθέτουμε ότι η f έχει περιοδικό σημείο περιττής περιόδου $n > 1$, ενώ δεν έχει περιοδικό σημείο περιττής περιόδου μικρότερης απο n. Αν a είναι το μέσο της τροχιάς του περιοδικού σημείου περιττής περιόδου n τότε τα στοιχεία της τροχιάς έχουν είτε την διάταξη,*

$$f^{n-1}(a) < f^{n-3}(a) < \ldots < f^2(a) < a < f(a) < \ldots < f^{n-4}(a) < f^{n-2}(a)$$

είτε την διάταξη,

$$f^{n-2}(a) < f^{n-4}(a) < \ldots < f(a) < a < f^2(a) < \ldots < f^{n-3}(a) < f^{n-1}(a)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά. Αν $n = 3$, τότε είναι προφανές. Στην περίπτωση όπου $n = 5$, έχουμε ότι η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου 5, ενώ δεν έχει περιοδικό σημείο περιόδου 3 και αν a το μέσο της τροχιάς τότε ισχύει είτε η διάταξη,

$$f^4(a) < f^2(a) < a < f(a) < f^3(a)$$

είτε η διάταξη,

$$f^3(a) < f(a) < a < f^2(a) < f^4(a).$$

Υποθέτουμε ότι τα $f(a), f^2(a)$ βρίσκονται και τα δύο στην μία μεριά του a και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Τότε σίγουρα τα $f^3(a)$ και $f^4(a)$ θα βρίσκονται στήν άλλη μερια του a. Υποθέτουμε δηλαδή ότι ισχύει

$$< f^2(a), f(a) > \subseteq < f^2(a), f^3(a) > .$$

Όμως ισχύει $f^2(a) \in f(< f^2(a), f(a) >)$ και $f^3(a) \in f(< f^2(a), f(a) >)$ απο τα οποία συμπεραίνουμε ότι $< f^2(a), f^3(a) > \subseteq f(< f^2(a), f(a) >)$ δηλαδή $< f^2(a), f^3(a) > \subseteq f(< f^2(a), f^3(a) >)$, πράγμα το οποίο είναι αδύνατο όπως μας λέει το Λήμμα 3.1.1. Άρα τα $f(a), f^2(a)$ βρίσκονται εκατέρωθεν του a. Το έπόμενο πράγμα το οποίο πρέπει να δείξουμε είναι ότι τα $f(a)$ και $f^4(a)$ (άρα και τα $f^3(a)$ και $f^2(a)$) δεν βρίσκονται στην ίδια μεριά του a. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $< f^2(a), a > \subseteq < f^3(a), f(a) >$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έχουμε λοιπόν ότι $f^3(a) \in f(< f^2(a), a >)$ και ότι $f(a) \in f(< f^2(a), a >)$, δηλαδή $< f(a), f^3(a) > \subseteq f(< f^2(a), a >)$ απο το οποίο έπεται ότι

$$< f(a), f^3(a) > \subseteq f(< f(a), f^3(a) >)$$

το οποίο ξανά απο το Λήμμα 3.1.1. είναι αδύνατο. Μέχρι στιγμής έχουμε δείξει ότι τα $f(a), f^3(a)$ είναι στην μία μεριά του a, ενώ τα $< f^2(a), f^4(a) >$

βρίσκονται στην άλλη μεριά του a. Το μόνο που απομένει να δείξουμε είναι ότι δεν μπορεί να ισχύει ούτε η διάταξη, $f(a) < f^3(a) < a < f^4(a) < f^2(a)$ αλλά ούτε και η διάταξη $f^2(a) < f^4(a) < a < f^3(a) < f(a)$, δηλαδή ότι δεν ισχύει ότι

$$< f^4(a), f^3(a) > \subseteq < f(a), f^2(a) > .$$

Υποθέτουμε ότι αυτό είναι σωστό και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έχουμε ότι $f(a) \in f^3(< f^4(a), f^3(a) >)$ και $f^2(a) \in f^3(< f^4(a), f^3(a) >)$,
δηλαδή $< f(a), f^2(a) > \subseteq f^3(< f^4(a), f^3(a) > \subseteq f^3(< f(a), f^2(a) >)$ το οποίο μας λέει ότι ότι η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου 3 το οποίο είναι αδύνατο. Τελικά οι πιθανές διατάξεις που μπορεί να ισχύουν είναι είτε,

$$f^4(a) < f^2(a) < a < f(a) < f^3(a)$$

είτε,

$$f^3(a) < f(a) < a < f^2(a) < f^4(a).$$

Αν τώρα $n = 7$, έχουμε ότι η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου 7, ενώ δεν έχει περιοδικό σημείο περιόδου 5 ή 3. Απο παραπάνω έχουμε ότι είτε,

$$f^4(a) < f^2(a) < a < f(a) < f^3(a)$$

είτε,

$$f^3(a) < f(a) < a < f^2(a) < f^4(a).$$

Θα δείξουμε ότι τα $f^3(a), f^6(a)$ (άρα και τα $f^4(a), f^5(a)$) δεν γίνεται να βρίσκονται στην μία μεριά του a.Υποθέτουμε ότι $< f^4(a), a > \subseteq < f^5(a), f(a) >$. Ισχύει ότι $f^5(a) \in f(< f^4(a), a >)$ και $f(a) \in f(< f^4(a), a >)$, απο τα οποία συμπεραίνουμε ότι $< f(a), f^5(a) > \subseteq f(< f^4(a), a >)$, δηλαδή

$$< f(a), f^5(a) > \subseteq f(< f(a), f^5(a) >)$$

το οποίο ξανά απο το Λήμμα 3.1.1. είναι αδύνατο. Άρα στην μία μεριά του a βρίσκονται τα $f^3(a), f(a)$ και $f^5(a)$, ενώ στην άλλη έχουμε τα $f^2(a), f^4(a)$ και $f^6(a)$.
Μένει να δείξουμε ότι δεν μπορεί να ισχύει ούτε η διάταξη

$$f^4(a) < f^6(a) < f^2(a) < a < f(a) < f^5(a) < f^3(a)$$

αλλα ούτε και η διάταξη

$$f^3(a) < f^5(a) < f(a) < a < f^2(a) < f^6(a) < f^4(a)$$

ή αλλιώς
$$< f^5(a), f^6(a) >\subseteq< f^3(a)f^4(a) > .$$
Υποθέτουμε ότι ισχύει και θα καταλήξουμε σε άτοπο.
Έχουμε $f^3(a) \in f^5(< f^5(a), f^6(a) >)$ και $f^4(a) \in f^5(< f^5(a), f^6(a) >)$. Άρα, $< f^3(a), f^4(a) >\subseteq f^5(< f^5(a), f^6(a) >)$ το οποίο μας δίνει ότι

$$< f^3(a), f^4(a) >\subseteq f^5(< f^3(a), f^4(a) >)$$

και τελικά συμπεραίνουμε ότι η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου 5 το οποίο δεν μπορεί να ισχύει. Τελικά οι πιθανές διατάξεις που μπορεί να ισχύουν είναι είτε,
$$f^6(a) < f^4(a) < f^2(a) < a < f(a) < f^3(a) < f^5(a)$$
είτε,
$$f^5(a) < f^3(a) < f(a) < a < f^2(a) < f^4(a) < f^6(a).$$
Υπθέτουμε ότι η πρότασή μας είναι ορθή στην περίπτωση όπου $n = \kappa$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου κ, ενώ δεν έχει περιοδικό σημείο περιόδου $\kappa - 2, \kappa - 4, \ldots$, και γνωρίζουμε ότι ισχύει, είτε η διάταξη

$$f^{\kappa-1}(a) < f^{\kappa-3}(a) < \ldots < f^2(a) < a < f(a) < \ldots < f^{\kappa-4}(a) < f^{\kappa-2}(a)$$

είτε την διάταξη,

$$f^{\kappa-2}(a) < f^{\kappa-4}(a) < \ldots < f(a) < a < f^2(a) < \ldots < f^{\kappa-3}(a) < f^{\kappa-1}(a).$$

Κάνοντας χρήση αυτού, θα δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει και για $n = \kappa + 2$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου $\kappa + 2$, ενώ δεν έχει περιοδικό σημείο περιόδου $\kappa, \kappa - 2, \kappa - 4, \ldots$, και θα δείξουμε ότι ισχύει, είτε η διάταξη

$$f^{\kappa+1}(a) < f^{\kappa-1}(a) < \ldots < f^2(a) < a < f(a) < \ldots < f^{\kappa-2}(a) < f^{\kappa}(a)$$

είτε την διάταξη,

$$f^{\kappa}(a) < f^{\kappa-2}(a) < \ldots < f(a) < a < f^2(a) < \ldots < f^{\kappa-1}(a) < f^{\kappa+1}(a).$$

Αρχικά θα δείξουμε ότι δεν μπορεί να ισχύει η διάταξη

$$f^{\kappa}(a) < f^{\kappa-1}(a) < \ldots < f^2(a) < a < f(a) < \ldots < f^{\kappa-2}(a) < f^{\kappa+1}(a)$$

αλλα ούτε και η διάταξη,

$$f^{\kappa+1}(a) < f^{\kappa-2}(a) < \ldots < f(a) < a < f^2(a) < \ldots < f^{\kappa-1}(a) < f^{\kappa}(a)$$

Με άλλα λόγια δεν μπορεί ποτέ να είναι σωστό ότι

$$< f^{\kappa-1}(a), a > \subseteq < f^{\kappa}(a), f(a) > .$$

Υποθέτουμε ότι αυτό είναι σωστο και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έχουμε ότι $f^{\kappa}(a) \in f(< f^{\kappa-1}(a), a >)$ και $f(a) \in f(< f^{\kappa-1}(a), a >)$ τα οποία μας δίνουν ότι $< f^{\kappa}(a), f(a) > \subseteq f(< f^{\kappa-1}(a), a) > \subseteq f(< f^{\kappa}(a), f(a) >)$, το οποίο φυσικά είναι αδύνατο. Αποδείξαμε ότι τα $f^{\kappa}(a), f^{\kappa-1}(a)$ δεν βρίσκονται και τα δύο στην μία μεριά του a. Για να τελειώσουμε αρκεί να δείξουμε ότι δεν μπορεί να ισχύει ούτε η διάταξη,

$$f^{\kappa-1}(a) < f^{\kappa+1}(a) < \ldots < f^2(a) < a < f(a) < \ldots < f^{\kappa}(a) < f^{\kappa-2}(a)$$

αλλά ούτε και η διάταξη,

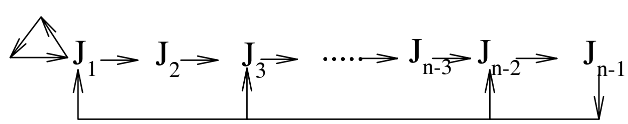
$$f^{\kappa-2}(a) < f^{\kappa}(a) < \ldots < f(a) < a < f^2(a) < \ldots < f^{\kappa+1}(a) < f^{\kappa-1}(a).$$

Με άλλα λόγια, αρκεί να δείξουμε ότι δεν είναι δυνατό να ισχύει ότι

$$< f^{\kappa+1}(a), f^{\kappa}(a) > \subseteq < f^{\kappa-1}(a), f^{\kappa-2}(a) > .$$

Υποθέτουμε ότι αυτό είναι σωστό και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έχουμε $f^{\kappa-1}(a) \in f^{\kappa}(< f^{\kappa+1}(a), f^{\kappa}(a) >)$, διότι $(2\kappa+1) \mod (\kappa+2) = \kappa - 1$, και $f^{\kappa-2}(a) \in f^{\kappa}(< f^{\kappa+1}(a), f^{\kappa}(a) >)$, διότι $2\kappa \mod (\kappa+2) = \kappa - 2$. Άρα $< f^{\kappa-1}(a), f^{\kappa-2}(a) > \subseteq f^{\kappa}(< f^{\kappa+1}(a), f^{\kappa}(a) >) \subseteq f^{\kappa}(< f^{\kappa-1}(a), f^{\kappa-2}(a) >)$ το οποίο μας λέει ότι η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου κ το οποίο φυσικά είναι άτοπο. Η απόδειξη είναι πλέον πλήρης. □

Η παραπάνω πρόταση ουσιαστικά μας λέει ότι το σχετιζόμενο διατεταγμένο γράφημα για $J_1 =< \alpha, f(\alpha) >$, $J_{\kappa} =< f^{\kappa-2}(\alpha), f^{\kappa}(\alpha) >$ και $\kappa = 1, \ldots, n-1$, φαίνεται ώς εξής:



Οι τροχιές περιττής περιόδου οι οποίες ακολουθούν μια απο τις δύο διατάξεις στην Πρόταση 3.2.9. ονομάζονται ***τροχιές Stefan***.

Πρόταση 3.2.10. *Έστω $f \in C^0(I,I)$ και υποθέτουμε ότι η f έχει περιοδικό σημείο περιττής περιόδου $n > 1$. Τότε η f, έχει περιοδικό σημείο όλων των άρτιων περιόδων, και περιοδικό σημείο όλων των περιττών περιόδων μεγαλύτερης απο n.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f έχει περιοδικό σημείο περιττής περιόδου n και ότι το n αυτό είναι η μικρότερη δυνατή περιττή περίοδος, ώστε η τροχιά να έχει το σχετιζόμενο διατεταγμένο γράφημα της Πρότασης 3.2.9. Έστω $m < n$ και υποθέτουμε ότι ο m είναι περιττός. Τότε ο κύκλος,

$$J_{n-1} \to J_{n-m} \to J_{n-m+1} \ldots \to J_{n-1}$$

είναι ένας αρχικός κύκλος μήκους m και άρα η f έχει περιοδικό σημείο περιττής περιόδου m. Έστω $m > n$ είτε άρτιος είτε περιττός. Τότε ο κύκλος,

$$J_1 \to J_2 \to \ldots J_{n-1} \to J_1 \to J_1 \ldots \to J_1$$

είναι αρχικός κύκλος μήκους m και άρα η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου m και σε αυτήν την περίπτωση. □

Λήμμα 3.2.11. *Έστω $f \in C^0(I,I)$ και θεωρούμε τους θετικούς ακέραιους, κ, m, n και s. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς:*

(1) Αν το x_0 είναι περιοδικό σημείο της f περιόδου m, τότε είναι και περιοδικό σημείο της f^n περιόδου $\frac{m}{(m,n)}$, όπου (m,n) ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των m, n.

(2) Αν το x_0 είναι περιοδικό σημείο της f^n περιόδου κ, τότε είναι και περιοδικό σημείο της f περιόδου $\frac{\kappa n}{s}$, όπου το s διαιρεί το n και $(s,\kappa) = 1$.

Απόδειξη. (1) Έστω t η περίοδος του περιοδικού σημείου x_0 της f^n. Το x_0 είναι περιοδικό σημείο της f^n, καθώς $(f^n)^m(x_0) = (f^m)^n(x_0) = x_0$. Αρκεί να δείξουμε ότι $t = \frac{m}{(m,n)}$. Έχουμε ότι $f^{nt}(x_0) = (f^t)^n(x_0) = x_0$ και άρα το m διαιρεί το nt, δηλαδή $nt = am$ για κάποιο $a \in \mathbb{N}$, απο το οποίο έπεται ότι το $\frac{nt}{(m,n)} = a\frac{m}{(m,n)}$ και τελικά το $\frac{n}{(m,n)}$ διαιρεί το $\frac{nt}{(m,n)}$. Εφόσον οι $\frac{m}{(m,n)}$ και $\frac{n}{(m,n)}$ είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε σίγουρα ο $\frac{m}{(m,n)}$ διαιρεί το t.

Έχουμε επίσης ότι ${f^{\frac{m}{(m,n)}}}^n(x_0) = \left(f^{\frac{n}{(m,n)}}\right)^m(x_0) = x_0$ απο το οποίο έπεται ότι το t διαιρεί το $\frac{m}{(m,n)}$. Τελικά έχουμε ότι $t = \frac{m}{(m,n)}$.

(2) Εφόσον $x_0 = (f^\kappa)^n(x_0) = f^{n\kappa}(x_0)$, η περίοδος του x_0 της f είναι $\frac{n\kappa}{s}$, για κάποιό θετικό ακέραιο s. Από την (1) έχουμε ότι $\frac{\frac{n\kappa}{s}}{((\frac{n\kappa}{s}),n)} = \kappa$. Έτσι,

$$\frac{n}{s} = ((\frac{n}{s})\kappa, n) = ((\frac{n}{s})\kappa, (\frac{n}{s})s) = (\frac{n}{s})(\kappa, s)$$

απο το οποίο έπεται ότι το s διαιρεί το n και $(s, \kappa) = 1$, το οποίο είναι και το ζητούμενο. □

Θεώρημα 3.2.12. ***(Sarkovskii** [1])* *Ας θεωρήσουμε τους φυσικούς αριθμούς με την διάταξη,*

$$3 \prec 5 \prec \ldots \prec 2.3 \prec 2.5 \prec \ldots \prec 2^\kappa(2\lambda+1) \prec \ldots \prec 2^2 \prec 2 \prec 1.$$

Έστω $f \in C^0(I, I)$ και υποθέτουμε ότι η f έχει περιοδική τροχιά, περιόδου n. Τότε έχει περιοδική τροχιά περιόδου m, για όλα τα $n \prec m$.

Απόδειξη. Έστω ότι $n = 2^d q$ και q περιττός. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
Αν $q = 1$, έχουμε $n = 2^d$. Τότε, $m = 2^e$ όπου $0 \leq e < d$. Αν $e = 0$ έχουμε ότι $m = 1$ το οποίο ισχύει καθώς γνωρίζουμε ότι άν έχουμε περιοδικό σημείο περιόδου μεγαλύτερης του 1, τότε σίγουρα έχουμε και σταθερό σημείο (Πρόταση 3.2.8.). Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $e > 0$. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $g = f^{\frac{m}{2}}$. Απο το Λήμμα 3.2.11. έπεται ότι η g έχει περιοδικό σημείο περιόδου,

$$\frac{n}{(n, \frac{m}{2})} = \frac{2^d}{(2^d, 2^{e-1})} = \frac{2^d}{2^{e-1}} = 2^{d-e+1}.$$

Παραπάνω αναφέραμε ότι $(2^{e-1}, 2^d) = 2^{e-1}$. Αυτό είναι σωστό διότι $e - 1 < d$. Απο την Πρόταση 3.1.2. έχουμε ότι η g έχει περιοδικό σημείο περιόδου 2. Ξανά απο το 3.2.11., έχουμε ότι η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου $2\frac{m}{2} = m$, το οποίο είναι και το ζητούμενο.
Αν τώρα $q > 1$, υποθέτουμε ότι $m = 2^d r$. Απομένει να εξετάσουμε τις περιπτώσεις όπου πρώτον ο r είναι άρτιος και ο r να είναι περιττός μεγαλύτερος του q. Θεωρούμε την συνάρτηση $g = f^{2^d}$. Γνωρίζουμε ότι η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου $2^d q$. Έτσι, απο το Λήμμα 3.2.11., έπεται ότι η $g = f^{2^d}$ έχει περιοδικό σημείο περιόδου,

$$\frac{2^d q}{(2^d q, 2^d)} = \frac{2^d q}{2^d (q, 1)} = \frac{q}{(q, 1)} = q.$$

Απο την Πρόταση 3.2.10. συμπεραίνουμε ότι η g έχει και περιοδικό σημείο περιόδου r.
Στην πρώτη περίπτωση, όπου ο r είναι άρτιος, η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου $\frac{2^d r}{s}$ όπου $(2^d, s) = 1$, δηλαδή $s = 1$. Με άλλα λόγια, η f έχει περιοδικό σημείο περιόδου $m = 2^d r$, το οποίο είναι και το ζητούμενο.
Στην δεύτερη περίπτωση, όπου ο $r > q$ είναι περιττός, η περίοδος αυτού του σημείου ως προς την f, είναι $2^e r$, για κάποιο $e \leq d$. Αν $e = d$, τότε το ζητούμενο έπεται άμεσα. Αν $e < d$, τότε αρκει να δουλέψουμε με το $n = 2^e r$ αντι για $n = 2^d q$. Τότε μπορούμε να γράψουμε $m = 2^e(r2^{d-e})$,δηλαδή έχουμε ότι ο m είναι γινόμενο δύναμης του 2 επι έναν άρτιο. Τότε έχουμε απο την παραπάνω περίπτωση ότι ξανά η f, έχει περιοδικό σημείο περιόδου m. $\square$

Για διάφορες αποδείξεις του Θεωρήματος του Sarkovskii παραπέμπουμε στο πρόσφατο άρθρο [4].

Κεφάλαιο 4

Χάος

4.1 Χαοτικές απεικονίσεις

Ορισμός 4.1.1. *Έστω $f \in C^0(I, I)$. Η f θα λέγεται **topologically transitive** αν για κάθε τυχαίο ζεύγος ανοικτών μη κενών συνόλων $U, V \subseteq I$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, ώστε*

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Ορισμός 4.1.2. *Έστω $f \in C^0(I, I)$. Η f έχει **ευαίσθητη εξάρτηση σε αρχικές συνθήκες** αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε $x \in I$ και για κάθε N περιοχή του x,υπάρχει $y \in N$ και $n \geq 0$ τέτοιο ώστε $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.*

Εντελώς αντίστοιχα, οι παραπάνω ορισμοί γενικεύονται σε νορμικό χώρο, ως εξής.

Ορισμός 4.1.3. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ νορμικός χώρος και $T : X \to X$ συνεχής γραμμική. Η T θα λέγεται topologically transitive αν για κάθε τυχαίο ζεύγος ανοικτών μη κενών συνόλων $U, V \subseteq X$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, ώστε*

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Ορισμός 4.1.4. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ νορμικός χώρος και $T : X \to X$ συνεχής γραμμική. Η T έχει ευαίσθητη εξάρτηση σε αρχικές συνθήκες αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε $x \in X$ και για κάθε N περιοχή του x,υπάρχει $y \in N$ και $n \geq 0$ τέτοιο ώστε $\|T^n(x) - T^n(y)\| > \delta$.*

Αν ο T είναι topologically transitive τότε, όπως θα δούμε παρακάτω, έχει αυτόματα ευαίσθητη εξάρτηση σε αρχικές συνθήκες. Μάλιστα, για κάθε $x \in X$

και για κάθε N περιοχή του x,υπάρχει $y \in N$ τέτοιο ώστε,

$$\limsup_{n\to+\infty} \|T^n(x) - T^n(y)\| = +\infty.$$

Οι έννοιες της πυκνότητας του συνόλου των περιοδικών σημείων, της ευαίσθητης εξάρτησης σε αρχικές συνθήκες και της topological transitivity είναι έννοιες οι οποίες απέχουν πολύ η μία απο την άλλη. Είναι εντυπωσιακό λοιπόν να βλέπουμε οτι υπάρχουν απεικονίσεις οι οποίες έχουν και τις τρείς αυτές ιδιότητες. Γιαυτό το λόγο άλλωστε και αυτές οι απεικονίσεις έχουν δικό τους όνομα και είναι ένα πολύ ενδιαφέρον αντικείμενο μελέτης.

Ορισμός 4.1.5. *Έστω X είτε κλειστό διάστημα, είτε νορμικός χώρος. Η $f : X \to X$ θα λέγεται* ***χαοτική απεικόνιση*** *αν,*
(1) είναι topologically transitive
(2) έχει ευαίσθητη εξάρτηση σε αρχικές συνθήκες, και
(3) έχει το σύνολο των περιοδικών της σημείων, πυκνό υποσύνολο του X.

Ο παραπάνω ορισμός οφείλεται στον R.Devaney, στο [3].

4.2 Συμπεράσματα

Αν $f \in C^0(I, I)$, το I είναι ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα υποσύνολο της πραγματικής ευθείας. Γνωρίζουμε ότι οι ρητοί του I είναι αριθμήσιμο σύνολο και έτσι θεωρούμε μία αρίθμηση αυτών $\{q_j \in I, j = 1, 2, \ldots\}$.

Λήμμα 4.2.1. *Αν $A = \{x \in I : \overline{Orb(x)} = I\}$ και $A(s, j, n) = \{x \in I : |f^n(x) - q_j| < \frac{1}{s}\}$ για $s, j, n \in \mathbb{N}$ τότε*

$$A = \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} A(s, j, n).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα χωριστεί σε δύο μέρη. Αρχικά υποθέτουμε ότι $x \in A$ και στόχος μας είναι να δείξουμε ότι $x \in \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} A(s, j, n)$. Έχουμε λοιπόν ότι $\overline{Orb(x)} = I$, το οποίο μεταφράζεται ως ότι υπάρχει ακολουθία $z_n \in Orb(x)$, ώστε $z_n \to q_j$, για κάθε $j > 1$. Ωστόσο, $z_n \in Orb(x)$, δηλαδή $z_n = f^{\kappa_n}(x)$ για κάποια $\kappa_n \in \mathbb{N}$ και τελικά $f^{\kappa_n}(x) \to q_j$. Με άλλα λόγια έχουμε ότι για κάθε $s, j > 1$, υπάρχει n_0 ώστε $|f^{\kappa_{n_0}}(x) - q_j| < \frac{1}{s}$ και άρα

$x \in \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} A(s, j, n)$.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι,

$$A \subseteq \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} A(s, j, n).$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι $x \in \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} A(s, j, n)$, και στόχος μας είναι να δείξουμε ότι $x \in A$. Θεωρούμε $y \in I$ και $\epsilon > 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι $|f^n(x) - y| < \epsilon$ για κάποιο $n > 0$. Καθώς οι ρητοί του I είναι πυκνό σύνολο, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $j > 1$ ώστε $|y - q_j| < \frac{\epsilon}{2}$. Επίσης,υπάρχουν $s, j > 1$ ώστε $\frac{1}{s} < \frac{\epsilon}{2}$ και $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A(s, j, n)$. Έχουμε λοιπόν ότι για κάποιο $n > 0$, $|f^n(x) - q_j| < \frac{1}{s} < \frac{\epsilon}{2}$. Άρα,

$$|f^n(x) - y| = |f^n(x) - q_j + q_j - y| < |f^n(x) - q_j| + |q_j - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Απο παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $x \in A$ και άρα,

$$\bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} A(s, j, n) \subseteq A.$$

Τελικά,

$$A = \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} A(s, j, n).$$

□

Λήμμα 4.2.2. *Το σύνολο $A(s, j, n)$ είναι ανοικτό.*

Απόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε,

$$A(s, j, n) = (f^n)^{-1}(q_j - \frac{1}{s}, q_j + \frac{1}{s}).$$

Όμως η f^n είναι συνεχής συνάρτηση, και η αντίστροφη εικόνα ανοικτού συνόλου μέσω συνεχούς συνάρτησης, είναι ανοικτό σύνολο. Με άλλα λόγια το

$$(f^n)^{-1}((q_j - \frac{1}{s}, q_j + \frac{1}{s}))$$

είναι ανοικτό και τελικά το $A(s, j, n)$ είναι ανοικτό. □

Λήμμα 4.2.3. *Αν η $f \in C^0(I, I)$ είναι topologically transitive, τότε το σύνολο $\bigcup_{n=0}^{\infty} A(s, j, n)$ είναι πυκνό υποσύνολο του I, δηλαδή*

$$\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} A(s, j, n)} = I$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $x \in I$, $\epsilon > 0$ και επιλέγουμε ότι $U = (x - \epsilon, x + \epsilon)$ ενώ, $V = (q_j - \frac{1}{s}, q_j + \frac{1}{s})$. Η f είναι topologically transitive το οποίο σημαίνει ότι για κάθε U, V ανοικτά μη κενά υποσύνολα του I, υπάρχει ένα $n > 0$, τέτοιο ώστε $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Άρα υπάρχει $y \in I$ τέτοιο ώστε $y \in U$ και $f^n(y) \in V$. Αυτό σημαίνει ότι $f^n(y) \in (q_j - \frac{1}{s}, q_j + \frac{1}{s})$, δηλαδή ότι υπάρχει $n > 0$ ώστε, $|f^n(y) - q_j| < \frac{1}{s}$ και τελικά

$$y \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A(s, j, n).$$

Επίσης, $y \in U$ το οποίο σημαίνει ότι $|x - y| < \epsilon$.
Συνοψίζοντας, έχουμε ότι για κάθε $x \in I$ και για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $y \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A(s, j, n)$ τέτοιο ώστε, $|x - y| < \epsilon$ το οποίο φυσικά μας λέει ότι το $\bigcup_{n=0}^{\infty} A(s, j, n)$ είναι πυκνό υποσύνολο του I, το οποίο είναι και το ζητούμενο. □

Πρόταση 4.2.4. *Έστω $f \in C^0(I, I)$. Η f είναι topologically transitive αν και μόνο εάν υπαρχει $x \in I$ τέτοιο ώστε $\overline{Orb(x)} = I$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη χωρίζεται σε δύο μέρη. Αρχικά υποθέτουμε ότι η f είναι topologically transitive και στόχος μας είναι να δείξουμε ότι υπαρχει $x \in I$ τέτοιο ώστε $\overline{Orb(x)} = I$. Θεωρούμε το σύνολο $A(s, j, n)$. Απο το Λήμμα 4.2.1 έχουμε ότι

$$\{x \in I : \overline{Orb(x)} = I\} = \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} A(s, j, n).$$

Απο το Λήμμα 4.2,2 παίρνουμε ότι το $A(s, j, n)$ είναι ανοικτό, ενώ το Λήμμα 4.2.3 μας δίνει ότι το $\bigcup_{n=0}^{\infty} A(s, j, n)$ είναι πυκνό υποσύνολο του I. Απο το Θεώρημα του Baire,το οποίο μας λέει ότι αριθμήσιμες τομές ανοικτών και πυκνών συνόλων είναι πυκνό σύνολο, συμπεραίνουμε ότι το

$$\bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} A(s, j, n)$$

είναι πυκνό σύνολο, δηλαδή το $A = \{x \in I : \overline{Orb(x)}\}$ είναι πυκνό, και άρα μη κενό. Συνεπώς, υπάρχει $x \in I$ τέτοιο ώστε $\overline{Orb(x)} = I$.
Κατόπιν, υποθέτουμε ότι υπάρχει $x \in I$ τέτοιο ώστε $\overline{Orb(x)} = I$, και θα δείξουμε ότι η f είναι topologically transitive. Έστω $U, V \subseteq I$ ανοικτά μη κενά. Έχουμε ότι $\overline{Orb(x)} = I$ απο το οποίο αντιλαμβανόμαστε ότι υπάρχει $\kappa = 1, 2, \ldots$ τέτοιο ώστε $f^{\kappa}(x) \in U$. Ωστόσο,έχουμε ακόμα ότι $\overline{Orb(f^{\kappa}(x))} = I$. Ακολουθώντας ακριβώς τον ίδιο συλλογισμό με πιο πάνω, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα $\lambda = 1, 2, \ldots$ τέτοιο ώστε $f^{\lambda}(f^{\kappa}(x)) \in V$. Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι για κάθε $U, V \subseteq I$ ανοικτά, υπάρχει $\lambda = 1, 2, \ldots$ τέτοιο ώστε $f^{\lambda}(U) \cap V \neq \emptyset$ το οποίο μας λέει ότι η f είναι topologically transitive. $\square$

Θέλοντας να γενικεύσουμε τα παραπάνω απο ένα συμπαγές διάστημα στο $\mathbb{R}$, σε τυχόντα μετρικό χώρο X, παραθέτουμε την επόμενη πρόταση, η οποία είναι ενισχυμένη με ένα ακόμα συμπέρασμα.

Πρόταση 4.2.5. *Έστω (X,ρ) ένας πλήρης, διαχωρίσιμος και χωρίς μεμονωμένα σημεία, μετρικός χώρος. Θεωρούμε $f : X \to X$ συνεχή. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(1) Η f είναι topologically transitive.
(2) Υπάρχει $x \in X$ με την ιδιότητα $\overline{Orb(x, f)} = X$.
(3) Το σύνολο $\{x \in X : \overline{Orb(x, f)} = X\}$ είναι G_δ (δηλαδή αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων) και πυκνό υποσύνολο του X, δηλαδή

$$\overline{\{x \in X : \overline{Orb(x, f)} = X\}} = X.$$

4.3 Χάος σε Πεπερασμένες Διαστάσεις

Η οικογένεια των απεικονίσεων $F_\mu : [0,1] \to [0,1]$ με $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ ονομάζεται τετραγωνική οικογένεια (quadratic family). Θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου $\mu = 4$.
Θα κάνουμε αρχικά μια προεργασία. Θεωρούμε $g : S^1 \to S^1$ με $g(\theta) = \theta^2$ (S^1 είναι ο μοναδιαίος κύκλος). Ορίζουμε επίσης τις εξής τρείς απεικονίσεις, $h_1 : S^1 \to [-1,1]$ με $h_1(e^{2\pi i\theta}) = \cos(\theta)$, $q : [-1,1] \to [-1,1]$ με $q(x) = 2x^2 - 1$ και $h_2 : [-1,1] \to [0,1]$ με $h_2(x) = \frac{1}{2}(1-x)$. Τότε θα έχουμε, $(h_1 \circ g)(\theta) = \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = (q \circ h_1)(e^{2\pi i\theta})$. Άρα,

$$h_1 \circ g = q \circ h_1.$$

Επίσης, $(F_4 \circ h_2)(x) = 4\frac{1}{2}(1-x)(1-\frac{1}{2}(1-x)) = 1 - x^2 = (h_2 \circ q)(x)$. Άρα,

$$F_4 \circ h_2 = h_2 \circ q.$$

Έχουμε λοιπόν το μεταθετικό διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_1"'] & S^1 \arrow[d, "h_1"] \\
{[-1,1]} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "h_2"'] & {[-1,1]} \arrow[d, "h_2"] \\
{[0,1]} \arrow[r, "F_4"] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

Λήμμα 4.3.1. *Η $g : S^1 \to S^1$ με $g(\theta) = \theta^2$ είναι topologically transitive.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το $I = (\theta_1, \theta_2) \subseteq S^1$. Τότε, για $m = 1, 2, \ldots$,έχουμε $g^m(I) = (2^m\theta_1, 2^m\theta_2)$. Για κάποιο πολύ μεγάλο $n \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $2^n\theta_1 - 2^n\theta_2 =$

$2^n(\theta_1 - \theta_2) > 2\pi$. Με άλλα λόγια, για κάποιο μεγάλο n, θα καλύπτεται όλος ο μοναδιαίος κύκλος. Αυτό μεταφράζεται ώς $g^n(I) \supseteq S^1$ και άρα $g^n(I) \cap J \neq \emptyset$, για κάθε $I, J \subseteq S^1$ ανοικτά μη κενά. $\square$

Λήμμα 4.3.2. *Το σύνολο* $\{\frac{\kappa}{2^n} : \kappa \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ *είναι πυκνό υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *δηλαδή,*

$$\overline{\{\frac{\kappa}{2^n} : \kappa \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}} = \mathbb{R}$$

Λήμμα 4.3.3. *Το σύνολο των περιοδικών σημείων της g είναι πυκνό υποσύνολο του S^1.*

Απόδειξη. Θα γράψουμε την g στην μορφή $g(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$ με $\theta \in [0, 2\pi]$. Τότε $g^n(e^{i\theta}) = e^{2^n i\theta}$. Για να βρώ περιοδικά σημεία λύνω την εξίσωση $g^n(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$, η οποία τελικά έχει λύση $\theta = \frac{2\kappa\pi}{2^n - 1}$, για $0 \leq \kappa \leq 2^n$. Ωστόσο,

$$\overline{\{\frac{\kappa}{2^n} : \kappa \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}} = \mathbb{R}$$

και άρα,

$$\overline{\{\frac{2\kappa\pi}{2^n - 1} : 0 \leq \kappa \leq 2^n, n \in \mathbb{N}\}} = [0, 2\pi].$$

$\square$

Πρόταση 4.3.4. *Η $F_4 : [0,1] \to [0,1]$ είναι topologically transitive.*

Απόδειξη. Έχοντας σαν δεδομένο ότι $h_1 \circ g = q \circ h_1$ και $F_4 \circ h_2 = h_2 \circ q$, συμπεραίνουμε ότι

$$h_1 \circ g^n = q^n \circ h_1$$

και

$${F_4}^n \circ h_2 = h_2 \circ q^n.$$

Θεωρούμε $U, V \subseteq [0,1]$ ανοικτά μη κενά. Εφόσον η $h_2 \circ h_1$ είναι συνεχής και επί έχουμε ότι υπάρχουν $\widehat{U}, \widehat{V} \subseteq S^1$ ώστε, $h_2 \circ h_1(\widehat{U}) = U$ και $h_2 \circ h_1(\widehat{V}) = V$. Απο το Λήμμα 3.3.7. έχουμε ότι η g είναι topologically transitive, το οποίο μεταφράζεται ώς ότι υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $g^\kappa(\widehat{U}) \cap \widehat{V} \neq \emptyset$. Συμπεραίνουμε ότι $h_2 \circ h_1(g^\kappa(\widehat{U}) \cap \widehat{V}) \neq \emptyset$ δηλαδή, $h_2 \circ h_1 \circ g^\kappa(\widehat{U}) \cap h_2 \circ h_1(\widehat{V}) \neq \emptyset$ και τελικά, $h_2 \circ h_1 \circ g^\kappa(\widehat{U}) \cap V \neq \emptyset$.
Ωστόσο, ${F_4}^\kappa(U) = {F_4}^\kappa(h_2 \circ h_1(\widehat{U})) = {F_4}^\kappa \circ h_2 \circ h_1(\widehat{U}) = h_2 \circ q^\kappa \circ h_1(\widehat{U}) = h_2 \circ h_1 \circ g^\kappa(\widehat{U})$. Συνεπώς, υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$ ώστε ${F_4}^\kappa(U) \cap V \neq \emptyset$ για τυχαία ανοικτά U, V δηλαδή, η F_4 είναι topologically transitive. $\square$

Πρόταση 4.3.5. *Το σύνολο των περιοδικών σημείων της F_4 είναι πυκνό υποσύνολο του $[0,1]$.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι αν έχουμε μια συνεχή και επί απεικόνιση, τότε η εικόνα πυκνού υποσυνόλου του πεδίου ορισμού είναι πυκνό υποσύνολο του πεδίου τιμών. Η απεικόνιση $h_2 \circ h_1 : S^1 \to [0,1]$ είναι συνεχής και επί, και αν με $Perg$ συμβολίσουμε το σύνολο των περιοδικών σημείων της g, έχουμε $\overline{Per(g)} = S^1$. Συμπεραίνουμε ότι $\overline{h_2 \circ h_1(Per(g))} = [0,1]$. Ισχύει επίσης ότι $h_2 \circ h_1(Per(g)) \subseteq Per(F_4)$, και αυτό διότι ${F_4}^n \circ h_2 \circ h_1 = h_2 \circ g^n \circ h_1 = h_2 \circ h_1 \circ g^n$.Συγκεντρώνοντας τα παραπάνω δεδομένα, έχουμε $[0,1] \subseteq \overline{Per(F_4)}$, αλλά $Per(F_4) \subseteq [0,1]$. Τελικά $\overline{Per(F_4)} = [0,1]$. □

Πρόταση 4.3.6. *Η $F_4 : [0,1] \to [0,1]$ με $F_4(x) = 4x(1-x)$ είναι χαοτική.*

Απόδειξη. Παραπάνω αποδείξαμε ότι είναι topologically transitive και ότι το σύνολο των περιοδικών σημείων τής είναι πυκνό υποσύνολο του $[0,1]$. Μένει να δείξουμε ότι έχει ευαίσθητη εξάρτηση σε αρχικές συνθήκες.
Ακολουθώντας όμοιο συλλογισμό με παραπάνω, αρκεί να δείξουμε ότι η $g : S^1 \to S^1$ με $g(\theta) = 2\theta$ έχει ευαισθησία σε αρχικές συνθήκες.
Έστω $\theta_1 \in S^1$ και $\epsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = 2\pi$ και $\theta_2 \in S^1$ τέτοιο ώστε $|\theta_1 - \theta_2| < \epsilon$. Τότε για κάποιο μεγάλο $n \in \mathbb{N}$,

$$|g^n(\theta_1) - g^n(\theta_2)| = |2^n\theta_1 - 2^n\theta_2| = 2^n|\theta_1 - \theta_2| > 2\pi = \delta.$$

□

4.4 Χάος σε Άπειρες Διαστάσεις

Το σύνολο $l_2(\mathbb{N})$ είναι το σύνολο των τετραγωνικά απολύτως αθροίσιμων ακολουθιών. Είναι απειροδιάστατος και διαχωρίσιμος χώρος Hilbert πάνω απο το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$(ή και το $\mathbb{R}$). Δηλαδή,

$$l_2(\mathbb{N}) = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$$

και έχει την νόρμα

$$\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή $B : l_2(\mathbb{N}) \to l_2(\mathbb{N})$ με

$$B(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots).$$

Ισχύει ότι $\|Bx\|^2 = \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|^2$ δηλαδή, $\|Bx\| \leq \|x\|$ το οποίο φυσικά μας λέει ότι ο τελεστής B είναι φραγμένος (άρα και συνεχής) και μάλιστα $\|B\| \leq 1$.
Αν το $x \in l_2(\mathbb{N})$ τυχαίο και μη μηδενικό, τότε έχουμε $\|B^n x\| \leq \|B^n\| \|x\| \leq \|B\|^n \|x\| \leq \|x\|$ το οποίο μας εγγυάται ότι ο B δεν έχει πυκνή τροχιά δηλαδή,

$$\overline{Orb(B,x)} \subset D_{\|\cdot\|}(0, \|x\|).$$

Παραταύτα, θα δείξουμε στη συνέχεια ότι ο τελεστής λB με $|\lambda| > 1$, είναι topologically transitive και έχει πυκνή τροχιά. Θα χρειαστούμε το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 4.4.1. *Έστω $T : l_2(\mathbb{N}) \to l_2(\mathbb{N})$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πυκνό υποσύνολο D του $l_2(\mathbb{N})$, και ότι υπάρχει $S : l_2(\mathbb{N}) \to l_2(\mathbb{N})$ ώστε να ισχύουν τα εξής:*
ι) $\|T^n x\| \to 0$, καθώς $n \to \infty$ και $x \in D$
ιι) $\|S^n x\| \to 0$, καθώς $n \to \infty$ και $x \in D$
ιιι) $T \circ S = Id$.
Τότε ο τελεστής T είναι topologically transitive.

Απόδειξη. Θεωρούμε $\{x_j, j = 1, 2, \ldots\}$ ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $l_2(\mathbb{N})$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι, $\{x_j, j = 1, 2, \ldots\} \subseteq D$. Γνωρίζουμε επίσης ότι,

$$\{x \in l_2(\mathbb{N}) : \overline{Orb(T,x)} = l_2(\mathbb{N})\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in l_2(\mathbb{N}) : \|T^n x - x_j\| < \frac{1}{s}\}.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι το $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in l_2(\mathbb{N}) : \|T^n x - x_j\| < \frac{1}{s}\}$ είναι πυκνό στο $l_2(\mathbb{N})$. Αυτό διότι, θα έχουμε ότι το $\{x \in l_2(\mathbb{N}) : \overline{Orb(T,x)} = l_2(\mathbb{N})\}$ γράφεται ως αριθμήσιμες τομές ανοικτών και πυκνών συνόλων και τότε από θεώρημα Baire θα είναι πυκνό και άρα μη κενό. Τότε από την Πρόταση 4.2.5 θα έχουμε το ζητούμενο.
Έστω $y \in D, \epsilon > 0$ και σταθεροποιήμένα s, j. Στόχος μας είναι να βρούμε ένα $x \in l_2(\mathbb{N})$ και $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\|x - y\| < \epsilon$ και $\|T^n x - x_j\| < \frac{1}{s}$.
Επιλέγω $x = y + S^n x_j$ για κάποιο μεγάλο n και τότε,

$$\|T^n(y + S^n x_j) - x_j\| = \|T^n(y) + T^n(S^n x_j) - x_j\| = \|T^n(y) + x_j - x_j\| =$$

$$= \|T^n(y)\| \to 0$$

καθώς $n \to \infty$ και

$$\|y + S^n x_j - y\| = \|S^n x_j\| \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. □

Το επόμενο συμπέρασμα οφείλεται στον **S.Rolewicz** στο [5].

Πρόταση 4.4.2. *Ο τελεστής $T : l_2(\mathbb{N}) \to l_2(\mathbb{N})$ με $T = \lambda B$ όπου $\lambda \in \mathbb{C}$ και $|\lambda| > 1$, είναι topologically transitive.*

Απόδειξη. Έχουμε $B(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $A(x_1, x_2. \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$ και επιλέγουμε $S = \frac{1}{\lambda}A$. Επιλέγουμε επίσης,

$$D = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2(\mathbb{N}) : \exists n_0 \ \tau.\omega.\ x_n = 0, \forall n \geq n_0\}.$$

Ισχύει ότι $\overline{D} = l_2(\mathbb{N})$. Πράγματι, για τυχαία $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2(\mathbb{N})$ και $\epsilon > 0$, έχουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$ και άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|^2 < \epsilon^2$.Τότε,

$$\|x - (x_1, x_2, \ldots, x_{n_0 - 1}, 0, 0, \ldots)\|^2 = \|(0, 0, \ldots, 0, x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots)\|^2 =$$

$$= \sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|^2 < \epsilon^2$$

και άρα

$$\|x - (x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}, 0, 0, \ldots)\| < \epsilon.$$

Τότε ισχύει ότι,

$$T \circ S = \lambda B \circ \frac{1}{\lambda} A = B \circ A = Id$$

$$\|S^n x\| = \|(\frac{1}{\lambda}A)^n x\| = \frac{1}{|\lambda|^n}\|A^n x\| = \frac{\|x\|}{|\lambda|^n} \to 0$$

καθώς $n \to \infty$, και τέλος

$$\|T^n x\| = \|(\lambda B)^n x\| = |\lambda|^n \|B^n x\| = 0$$

όταν $n \geq n_0 - 1$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.4.1 έχουμε το ζητούμενο. □

Τώρα θα μελετήσουμε την συμπεριφορά των περιοδικών σημείων της T. Ας δούμε όμως αρχικά, την μορφή την οποία έχουν αυτά. Αναζητούμε διανύσματα $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2(\mathbb{N})$ ώστε, $Tx = x$. Αν λύσουμε το σύστημα αυτό, έχουμε ότι $x_1 = \lambda x_2, x_2 = \lambda x_3, \ldots$. Αν τώρα πάρουμε το σύστημα $T^2 x = x$, αυτό θα μας δώσει $x_1 = \lambda^2 x_3, x_2 = \lambda^2 x_4, x_3 = \lambda^2 x_5, \ldots$.

Πρόταση 4.4.3. *Το σύνολο των περιοδικών σημείων της $T : l_2(\mathbb{N}) \to l_2(\mathbb{N})$, είναι πυκνό υποσύνολο του $l_2(\mathbb{N})$.*

Απόδειξη. Έστω $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2(\mathbb{N})$ και $\epsilon > 0$. Στόχος μας είναι να βρούμε ένα στοιχείο του $l_2(\mathbb{N})$, που να είναι ταυτόχρονα περιοδικό σημείο της T, ώστε να απέχει από το x απόσταση μικρότερη από ϵ. Ένα διανυσμα του $l_2(\mathbb{N})$, που να είναι περιοδικό σημείο της T, είναι το

$$y_n = (x_1, \ldots, x_n, \frac{x_1}{\lambda^n}, \ldots, \frac{x_n}{\lambda^n}, \frac{x_1}{\lambda^{2n}}, \ldots, \frac{x_n}{\lambda^{2n}}, \ldots) = \{y_{n\kappa}\}_{\kappa \in \mathbb{N}}.$$

Θα εκτιμήσουμε την απόσταση του από το x.

$$\|y_n - x\|^2 = \sum_{\kappa=n+1}^{+\infty} |y_{n\kappa} - x_\kappa|^2 \leq \sum_{\kappa=n+1}^{+\infty} |y_{n\kappa}|^2 + \sum_{\kappa=n+1}^{+\infty} |x_\kappa|^2 + \sum_{\kappa=n+1}^{+\infty} |y_{n\kappa}||x_\kappa|.$$

Έχουμε $y_n \in l_2(\mathbb{N})$ δηλαδή, $\sum_{\kappa=1}^{+\infty} |y_{n\kappa}|^2 < +\infty$ απο το οποίο έπεται ότι υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$, ώστε αν $n > n_1$ τότε,

$$\sum_{\kappa=n+1}^{+\infty} |y_{n\kappa}|^2 < \frac{\epsilon^2}{3}.$$

Έχουμε $x \in l_2(\mathbb{N})$ δηλαδή,$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} |x_\kappa|^2 < +\infty$ απο το οποίο έπεται ότι υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$, ώστε αν $n > n_2$ τότε,

$$\sum_{\kappa=n+1}^{+\infty} |x_\kappa|^2 < \frac{\epsilon^2}{3}.$$

Τέλος έχουμε,

$$|y_{n\kappa}| \leq \frac{\max_{1 \leq i \leq \kappa} |x_i|}{|\lambda|^\kappa} \leq \frac{M}{|\lambda|^\kappa}$$

και $|x_\kappa| \leq \max_{1 \leq i \leq \kappa} |x_i| = M$ τα οποία μας δίνουν ότι

$$\sum_{\kappa=n+1}^{+\infty} |y_{n\kappa}||x_\kappa| \leq M^2 \sum_{\kappa=n+1}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda|^\kappa} \to 0$$

διότι $\frac{1}{|\lambda|^\kappa} < 1$. Συνεπώς, υπάρχει $n_3 \in \mathbb{N}$, ώστε αν $n > n_3$ τότε,

$$\sum_{\kappa=n+1}^{+\infty} |y_{n\kappa}||x_\kappa| \leq \frac{\epsilon^2}{3}.$$

Συνοψίζοντας, αν $n > n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ έχουμε,

$$\|y_n - x\|^2 \leq \frac{\epsilon^2}{3} + \frac{\epsilon^2}{3} + \frac{\epsilon^2}{3} = \epsilon^2$$

δηλαδή

$$\|y_n - x\| < \epsilon$$

το οποίο είναι και το ζητούμενο. □

Πρόταση 4.4.4. *Η απεικόνιση $T : l_2(\mathbb{N}) \to l_2(\mathbb{N})$ που αναφέρθηκε παραπάνω, είναι χαοτική.*

Απόδειξη. Μένει να δείξουμε ότι η απεικόνιση T έχει ευαισθησία σε αρχικές συνθήκες. Έστω $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2(\mathbb{N})$ και $\epsilon > 0$. Στήν πρώτη περίπτωση, υποθέτουμε ότι το $x \in l_2(\mathbb{N})$ που θεωρήσαμε παραπάνω έχει φραγμένη τροχιά. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $\|T^n x\| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, υπάρχει $y \in l_2(\mathbb{N})$ με $\overline{Orb(y)} = l_2(\mathbb{N})$ και $\|x - y\| < \epsilon$, και αυτό διότι τα σημεία της T τα οποία έχουν πυκνή τροχιά, ορίζουν πυκνό υποσύνολο του $l_2(\mathbb{N})$.Έχουμε λοιπόν, ότι υπέρχει n_1 ώστε $\|T^{n_1} y\| > 1$, ότι υπάρχει n_2 ώστε $\|T^{n_2} y\| > 2$ και γενικά ότι υπάρχει n_κ ώστε $\|T^{n_\kappa} y\| > \kappa$. Άρα, $\|T^{n_\kappa} x - T^{n_\kappa} y\| \geq -\|T^{n_\kappa} x\| + \|T^{n_\kappa} y\| \geq -M + \kappa$ το οποίο μας δίνει ότι $\lim_{\kappa \to +\infty} \|T^{n_\kappa} x - T^{n_\kappa} y\| = +\infty$ δηλαδή

$$\limsup_{n \to +\infty} \|T^n x - T^n y\| = +\infty.$$

Στήν δεύτερη περίπτωση υποθέτουμε ότι το x, δεν έχει φραγμένη τροχιά. Με άλλα λόγια, υπάρχει υπακολουθία $\{n_\kappa\}_{\kappa \in \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε, $\|T^{n_\kappa} x\| \to +\infty$ καθώς $\kappa \to +\infty$. Τότε, επιλέγουμε $y = (1 - \frac{\epsilon}{2\|x\|})x \in B(x, \epsilon)$. Τότε, $\|T^{n_\kappa} x - T^{n_\kappa} y\| = \|T^{n_\kappa} x - T^{n_\kappa}((1 - \frac{\epsilon}{2\|x\|})x)\| = \frac{\epsilon}{2\|x\|}\|T^{n_\kappa} x\|$, από το οποίο άμεσα έπεται ότι $\lim_{\kappa \to +\infty} \|T^{n_\kappa} x - T^{n_\kappa} y\| = +\infty$ και τελικά,

$$\limsup_{n \to +\infty} \|T^n x - T^n y\| = +\infty.$$

□

Βιβλιογραφία

[1] L. S. Block and W. A. Coppel, *Dynamics In One Dimension*. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag (1992).

[2] L. S. Block, *Continious Maps of the Interval with Finite Nonwandering Set*. Transactions of the American Mathematical Society **240**,(1978), (221-230).

[3] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 2nd edition, Addison-Wesley, Redwood City (1988).

[4] Bau-Sen Du, *A Collection of Simple Proofs of Sarkovskii's Theorem*. Preprint arXiv:math/0703592v2, (2007).

[5] S. Rolewicz, *On Orbits of Elements*. Studia Math. **32**, (1969), 17-22.