ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΙΣΟΚΑΤΑΝΟΜΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ ΚΑΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ HARDY

Γαρυφαλιά Λέων

ΗΡΑΚΛΕΙΟ
2012

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στις αρχές του προηγούμενου αιώνα ο H.Weyl [12] απέδειξε ότι αν α άρρητος τότε η ακολουθία (x_n) με $x_n = n\alpha$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0,1]$. Δηλαδή για $a, b \in \mathbb{R}$ με $0 \leq a < b \leq 1$ έχουμε ότι

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{|n \in [1,N] \colon \{x_n\} \in [a,b)|}{N} = b - a \tag{1.1}$$

Αυτό δημοσιεύτηκε από τον H.Weyl το 1910 και έδωσε την αφορμή για την ανάπτυξη της θεωρίας ισοκατανομής που χρησιμοποιείται σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών όπως στη θεωρία αριθμών, πιθανότητες, συνδυαστική και αρμονική ανάλυση.

Ο Weyl είχε κάνει την παρατήρηση ότι η ακολουθία πραγματικών (x_n) ικανοποιεί την (1.1) αν και μόνο αν για κάθε $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχή, περιοδική με περίοδο 1, έχουμε ότι

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Από την πυκνότητα των τριγωνομετρικών πολυωνύμων οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση f με περίοδο 1 μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα από έναν πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό συναρτήσεων της μορφής $e^{2\pi ikx}$ με $k \in \mathbb{Z}$. Έτσι προκύπτει ότι μία ακολουθία πραγματικών αριθμών (x_n) είναι ισοκατανεμημένη αν και μόνο αν για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $k \neq 0$ έχουμε

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ikx_n} = 0.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω κριτήριο μπορούμε να δείξουμε αρκετά κλασσικά αποτελέσματα ισοκατανομής και στόχος αυτής της εργασίας είναι η συστηματική μελέτη ισοκατανομής ακολουθιών πραγματικών αριθμών που ορίζονται από ομαλές συναρτήσεις.

Αρχικά στο κεφάλαιο 1 θα δώσουμε κάποιους βασικούς ορισμούς ισοκατανομής και θα αποδείξουμε το βασικό κριτήριο ισοκατανομής, το κριτήριο Weyl. Από αυτό προκύπτει άμεσα ότι σχετικά απλές ακολουθίες, όπως η $(n\alpha)$ με α άρρητο είναι ισοκατανεμημένη.

Στο κεφάλαιο 2 χρησιμοποιώντας το κριτήριο Weyl θα αποδείξουμε διάφορα άλλα θεωρήματα ισοκατανομής όπως το κριτήριο Fejer και το κριτήριο van der Corput, και θα δούμε για παράδειγμα ότι ακολουθίες όπως οι

$$(n^2\sqrt{2}), \quad (\sqrt{n}), \quad (n^{\frac{3}{2}}), \quad (n\log n), \quad ((\log n)^2) \tag{1.2}$$

είναι ισοκατανεμημένες, ενώ η ακολουθία $(\log n)$ δεν είναι. Θα τελειώσουμε το μέρος αυτό με ένα κριτήριο ισοκατανομής για αύξουσες ακολουθίες από το οποίο μπορούμε να συμπεράνουμε, για παράδειγμα, ότι η ακολουθία $(2^n x)$ είναι ισοκατανεμημένη σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο θα αποδείξουμε ένα πολύ γενικό θεώρημα ισοκατανομής για ακολουθίες Hardy, δηλαδή για ακολουθίες που μπορούν να εκφραστούν χρησιμοποιώντας τις σταθερές ακολουθίες, τις ακολουθίες $\log n$ και e^n και τα σύμβολα $+, -, \cdot, :, \log, \exp, \circ$ τα οποία και επιτρέπεται να χρησιμοποιούμε πεπερασμένες το πλήθος φορές. Όλες οι ακολουθίες που αναφέρονται στην (1.2) ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία. Υποθέτοντας ότι μία τέτοια ακολουθία δεν αυξάνει πολύ γρήγορα θα δώσουμε εύκολα ελέγξιμες ικανές και αναγκαίες συνθήκες ισοκατανομής. Πιο συγκεκριμένα θα αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα (Boshernitzan [1]). Έστω $f\colon [c, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Hardy τέτοια ώστε $\frac{f(t)}{t^k} \to 0$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Τότε η ακολουθία $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη αν και μόνο αν για κάθε πολυώνυμο $p \in \mathbb{Q}[t]$ έχουμε

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{|f(t) - p(t)|}{\log t} = +\infty.$$

Με άλλα λόγια η ακολουθία $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη εκτός και αν η συνάρτηση f βρίσκεται λογαριθμικά κοντά σε κάποιο πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές, στην οποία περίπτωση η μη ισοκατανομή της είναι σχετικά εύκολο να αποδειχθεί. Από το θεώρημα αυτό προκύπτει άμεσα ότι όλες οι ακολουθίες που εμφανίζονται στην (1.2) είναι ισοκατανεμημένες καθώς και πιο πολύπλοκες όπως οι

$$(n^2 \log n \log\log n), \quad (ne^{\sqrt{\log n}} + \log n), \quad \Big(\frac{n^{\sqrt{5}} + n + 1}{n^{\sqrt{2}} + 1} + \frac{n^3}{\log n}\Big),$$

ενώ αντίθετα οι ακολουθίες

$$(\log\log n), \quad \Big(\frac{n^2}{2} + e^{\sqrt{\log\log n}}\Big)$$

δεν είναι ισοκατανεμημένες. Η απόδειξη μας θα βασιστεί στο άρθρο [5].

Το προηγούμενο θεώρημα δεν μας δίνει πληροφορίες για ακολουθίες που αυξάνουν πολύ γρήγορα στο άπειρο. Για τέτοιου είδους ακολουθίες όπως για παράδειγμα οι

$$((3/2)^n), \quad (e^n), \quad (2^n\pi), \quad (2^{\sqrt{n}}), \quad (n^{\log n})$$

γνωρίζουμε ελάχιστα. Είναι ανοιχτό πρόβλημα αν κάποιες από αυτές είναι ισοκατανεμημένες.

Επίσης η ισοκατανομή ακολουθιών οι οποίες ταλαντεύονται στο άπειρο, όπως η $(n \sin n)$ είναι αρκετά δύσκολο να αποδειχθεί, μπορεί να γίνει όμως με μεθόδους διαφορετικές από αυτές που θα αναφέρουμε σε αυτή την εργασία.

Τέλος αν και στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε μόνο με κριτήρια ισοκατανομής θα θέλαμε ενδεικτικά να αναφέρουμε κάποιες από τις πλέον σημαντικές εφαρμογές θεωρημάτων ισοκατανομής στα μαθηματικά:

Το πρόβλημα του Waring. Ένα κλασσικό αποτέλεσμα της θεωρίας αριθμών είναι το θεώρημα των τεσσάρων τετραγώνων του Lagrange: *Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα το πολύ τεσσάρων τετραγώνων.* Το 1770 ο Waring ρώτησε αν ισχύει κάτι πιο γενικό: *Είναι σωστό ότι κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα k δυνάμεων με το πολύ $g = g(k)$ όρους;* Το g δεν θέλουμε να εξαρτάται από το n. Το 1909 ο Hilbert έδωσε καταφατική απάντηση, η μέθοδος του όμως δεν επέτρεπε να προσδιοριστεί η τιμή του g. Αυτό το πέτυχαν το 1920 οι Hardy-Littlewood, εισάγωντας μία νέα μέθοδο στην αναλυτική θεωρία αριθμών (την λεγόμενη μέθοδο του κύκλου) η οποία βασίζεται σε θεωρήματα ποσοτικής ισοκατανομής και έχει αποδειχθεί χρήσιμη σε πολλά άλλα προβλήματα της θεωρίας αριθμών. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα πρέπει κάποιος να ποσοτικοποιήσει την ισοκατανομή της ακολουθίας $(n^k\alpha)$ όταν ο α είναι πραγματικός αριθμός αρκετά κοντά η μακριά από ρητούς με μικρό παρανομαστή. Χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο έχει υπολογιστεί η ελάχιστη επιτρεπτή τιμή για το $g(k)$ σε πολλές περιπτώσεις, για παράδειγμα είναι γνωστό ότι

$$g(2) = 4, \quad g(3) = 9, \quad g(4) = 19, \quad g(5) = 37, \quad g(6) = 73.$$

Η ελάχιστη τιμή του $g(k)$ στην γενική περίπτωση δεν είναι ακόμα γνωστή, η εικασία είναι πως

$$g(k) = 2^k + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] - 2.$$

Η ασθενής εικασία του Goldbach. Ο Vinogradov έδειξε το 1937 πως για κάθε άρρητο αριθμό α η ακολουθία $(p_n\alpha)$ είναι ισοκατανεμημένη, όπου p_n ο νιοστός πρώτος. Αργότερα χρησιμοποιήσε ποσοτικοποιήσεις αυτού του ποιοτικού θεωρήματος ισοκατανομής για να αποδείξει την ασθενή εικασία του Goldbach: *Υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N}$ ώστε όλοι οι περιττοί μεγαλύτεροι του N_0 μπορούν να γραφούν* *ως άθροισμα το πολύ τριών πρώτων αριθμών*. Παραμένει ανοιχτό το πρόβλημα αν μπορούμε να επιλέξουμε $N_0 = 2$, η καλύτερη γνωστή τιμή του N_0 είναι κάποιος αριθμός με 26.643 ψηφία.

Το θεώρημα Sárközy. Ένα όμορφο αποτέλεσμα της συνδυαστικής θεωρίας αριθμών είναι το θεώρημα *Sárközy* ο οποίος το 1978 απέδειξε την εξής εικασία του Lovasz: *Κάθε υποσύνολο των φυσικών με θετική πυκνότητα περιέχει δύο ακεραίους με διαφορά τέλειο τετράγωνο.* Μία μεταγενέστερη απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι σχεδόν άμεση συνέπεια του φασματικού θεωρήματος για μοναδιαίους τελεστές και της ισοκατανομής της ακολουθίας $(n^2\alpha)$ με α άρρητο. Αρκετές παραλλαγές του θεωρήματος *Sárközy*, όπου για παράδειγμα αντί της ακολουθίας (n^2) χρησιμοποιούμε την ακολουθία $(p_n - 1)$ ή την ακολουθία $[n^a]$ με $a > 0$, έχουν αποδειχθεί χρησιμοποιώντας παρόμοια θεωρήματα ισοκατανομής.

Οριακά θεωρήματα στην εργοδική θεωρία. Ένα πολύ κλασσικό αποτέλεσμα στην ανάλυση είναι το εργοδικό θεώρημα Von-Neumman το οποίο περιγράφει την ασυμπτωτική συμπεριφορά των εργοδικών μέσων. Το θεώρημα αυτό, όπως και διάφορες γενικεύσεις του, μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας θεωρήματα ισοκατανομής ακολουθιών. Πιο συγκεκριμένα, έστω (a_n) ακολουθία ακεραίων. Τότε μπορεί κάποιος να δείξει εύκολα χρησιμοποιώντας το φασματικό θεώρημα για μοναδιαίους τελεστές ότι οι παρακάτω δύο ιδιότητες είναι ισοδύναμες:

(i) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ο μέσος όρος

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{ia_n t}$$

συγκλίνει καθώς $N \to +\infty$.

(ii) Για κάθε χώρο πιθανότητας $(\mathcal{X}, \mathcal{X}, \mu)$ και $T\colon X \to X$ μετρήσιμο και αντιστρέψιμο μετασχηματισμό που διατηρεί το μέτρο μ (δηλαδή $\mu(TA) = \mu(A)$ για $A \in \mathcal{X}$), και κάθε $f \in L^2(\mu)$, οι εργοδικοί μέσοι

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(T^{a_n}x) \tag{1.3}$$

συγκλίνουν στον $L^2(\mu)$ καθώς $N \to \infty$.

Οπότε έχουμε αναγάγει το φαινομενικά ποιό δύσκολο πρόβλημα (ii) στο (i) το οποίο όπως θα δούμε σχετίζεται άμεσα με την ισοκατανομή ακολουθιών της μορφής $(a_n t)$, $t \in \mathbb{R}$. Για $a_n = n$ παίρνουμε το κλασσικό θεώρημα του Von-Neumann, για $a_n = n^2$, ή ποιό γενικά, για $a_n = [n^a]$ με $a > 0$, παίρνουμε πιο πρόσφατα αποτελέσματα. Πιο πολύπλοκα ποσοτικά θεωρήματα ισοκατανομής μας επιτρέπουν να μελετήσουμε την κατά σημείο σύγκλιση των εργοδικών μέσων (1.3). Πολλά τέτοια παραδείγματα αναφέρονται στο άρθρο [2].

Κεφάλαιο 2

Ισοκατανομή ακολουθιών και το κριτήριο Weyl

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε αυστηρά την έννοια της ισοκατανομής, θα δώσουμε αρκετούς ισοδύναμους ορισμούς και θα αποδείξουμε το κριτήριο Weyl το οποίο συνήθως χρησιμοποιείται για να ελέγξει κάποιος την ισοκατανομή μίας ακολουθίας. Κάνοντας χρήση του κριτηρίου Weyl θα δούμε σε αυτό και τα επόμενα κεφάλαια ότι πολλές από τις ακολουθίες που χρησιμοποιούμε συχνά στην ανάλυση είναι ισοκατανεμημένες.

2.1 Ισοκατανομή ακολουθιών

Με $\{x\}$ συμβολίζουμε το κλασματικό μέρος ενός πραγματικού αριθμού x.

Ορισμός 2.1.1. Η ακολουθία (x_n) πραγματικών αριθμών λέμε ότι είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη ή ισοκατανεμημένη $\mod 1$ αν για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $0 \le a < b \le 1$ έχουμε

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{A([a,b);N;(x_n))}{N} = b - a \tag{2.1}$$

όπου

$$A([a,b);N;(x_n)) = |\{n \in [1,N] \colon \{x_n\} \in [a,b)\}|.$$

Παρατήρηση 2.1.2. Η σχέση (2.1) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{[a,b)}(\{x_n\}) = \int_0^1 \mathbf{1}_{[a,b)}(x)dx \tag{2.2}$$

όπου $\mathbf{1}_{[a,b)}(x)$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του διαστήματος $[a,b)$.

Παρατήρηση 2.1.3. Έστω ακολουθία (x_n). Αν η ακολουθία (x_n) είναι ισοκατανεμημένη τότε είναι προφανές ότι η $(\{x_n\})$ είναι πυκνή στο $[0,1]$. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα θα δούμε αργότερα ότι η ακολουθία $x_n = \log n$ δεν είναι ισοκατανεμημένη. Η $(\{\log n\})$ είναι όμως πυκνή στο $[0,1]$, αυτό έπεται εύκολα από το ότι $\log n \to +\infty$ και $\log(n+1) - \log n \to 0$.

Θεώρημα 2.1.4. *Έστω ακολουθία (x_n) πραγματικών αριθμών. Η (x_n) είναι ισοκατανεμημένη αν και μόνο αν για κάθε $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχή έχουμε ότι*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)dx. \tag{2.3}$$

Απόδειξη. Δείχνουμε το ευθύ. Έστω $\epsilon > 0$. Από υπόθεση έχουμε ότι η f είναι συνεχής και άρα Riemann ολοκληρώσιμη. Οπότε υπάρχουν κλιμακωτές συναρτήσεις f_1, f_2 τέτοιες ώστε $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$ και $\int_0^1 (f_2(x) - f_1(x))dx \le \epsilon$. Αφού η (x_n) είναι ισοκατανεμημένη οι f_1, f_2 ικανοποιούν την (2.3). Οπότε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx - \epsilon \le \int_0^1 f_1(x)dx = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_1(\{x_n\}) \le \\ \liminf_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \le \limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) \le \\ \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_2(\{x_n\}) = \int_0^1 f_2(x)dx \le \int_0^1 f(x)dx + \epsilon.\end{aligned}$$

Αφού ϵ αυθαίρετο το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι ισχύει η (2.3) και δείχνουμε την (2.1). Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχουν $u, l : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις (μάλιστα μπορούμε να τις επιλέξουμε τμηματικά γραμμικές) τέτοιες ώστε $l \le \mathbf{1}_{[a,b)}(x) \le u$ και $\int_0^1 (u(x) - l(x))dx \le \epsilon$. Οπότε από τα παραπάνω και την υπόθεση προκύπτει

$$\begin{aligned}b - a - \epsilon \le \int_0^1 u(x)dx - \epsilon \le \int_0^1 l(x)dx = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} l(\{x_n\}) \le \\ \liminf_{N\to+\infty} \frac{A([a,b);N;(x_n))}{N} \le \limsup_{N\to+\infty} \frac{A([a,b);N;(x_n))}{N} \le \\ \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} u(\{x_n\}) = \int_0^1 u(x)dx \le \int_0^1 l(x)dx + \epsilon \le b - a + \epsilon.\end{aligned}$$

Αφού το ϵ είναι αυθαίρετο η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύουμε το παρακάτω.

Θεώρημα 2.1.5. *Έστω ακολουθία (x_n) πραγματικών αριθμών. Η (x_n) είναι ισοκατανεμημένη αν και μόνο αν για κάθε $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη* *έχουμε ότι*

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)dx. \tag{2.4}$$

Πόρισμα 2.1.6. *Έστω ακολουθία (x_n) πραγματικών αριθμών. Η (x_n) είναι ισοκατανεμημένη αν και μόνο αν για κάθε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχή, περιοδική με περίοδο 1, έχουμε*

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)dx. \tag{2.5}$$

Απόδειξη. Δείχνουμε το ευθύ. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.1.4 στο πραγματικό και το μιγαδικό μέρος της f. Επίσης, αφού η f είναι περιοδική με περίοδο 1 ισχύει ότι $f(\{x_n\}) = f(x_n)$. Οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση επιχειρηματολογούμε όπως στο δεύτερο κομμάτι της απόδειξης του Θεωρήματος 2.1.4 και παρατηρούμε απλά ότι οι συνεχείς συναρτήσεις u, l μπορούν να επιλεγούν ώστε $u(0) = u(1)$ και $l(0) = l(1)$ και κατόπιν να επεκταθούν περιοδικά στο $\mathbb{R}$ (η επέκταση θα είναι συνεχής). □

Θεώρημα 2.1.7. *Έστω ότι η ακολουθία (x_n) είναι ισοκατανεμημένη και έστω (y_n) ακολουθία ώστε*

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = \alpha$$

με $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε η ακολουθία (y_n) είναι ισοκατανεμημένη.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\alpha = 0$, η γενική περίπτωση είναι παρόμοια. Για $0 < a < b < 1$ επιλέγουμε $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < \epsilon < \min\Big(a, 1-b, \frac{b-a}{2}\Big).$$

Από υπόθεση υπάρχει $N_0 = N_0(\epsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N_0$ έχουμε ότι

$$-\epsilon \leq x_n - y_n \leq \epsilon. \tag{2.6}$$

Για $n \geq N_0$ τότε $a+\epsilon \leq \{x_n\} < b-\epsilon$ συνεπάγεται ότι $a \leq \{y_n\} < b$ και $a \leq \{y_n\} < b$ συνεπάγεται ότι $a - \epsilon \leq \{x_n\} < b+\epsilon$. Από τα παραπάνω έχουμε

$$b-a-2\epsilon = \lim_{N\to+\infty}\frac{A([a+\epsilon, b-\epsilon); N; (x_n))}{N} \leq \liminf_{N\to+\infty}\frac{A([a,b); N; (y_n))}{N} \leq$$
$$\limsup_{N\to+\infty}\frac{A([a,b); N; (y_n))}{N} \leq \lim_{N\to+\infty}\frac{A([a-\epsilon, b+\epsilon); N; (x_n))}{N} = b-a+2\epsilon.$$

Αφού το ϵ είναι αυθαίρετο συμπαιρένουμε ότι ισχύει η (2.1) για την (y_n) και επομένως η (y_n) είναι ισοκατανεμημένη. □

Ο ορισμός ισοκατανομής καθώς και τα θεωρήματα της προηγούμενης παραγράφου είναι αρκετά δύσχρηστα για να ελεγχθεί στην πράξη η ισοκατανομή ακόμα και των απλούστερων ακολουθιών όπως για παράδειγμα η ακολουθία $(n\alpha)$ με α άρρητο. Το επόμενο κριτήριο είναι αρκετά ποιό εύχρηστο και είναι αυτό που θα χρησιμοποιούμε στο εξής για να ελέγξουμε την ισοκατανομή μίας ακολουθίας.

Θεώρημα 2.1.8 (Weyl Criterion 1916 [13]). *Έστω ακολουθία (x_n) πραγματικών αριθμών. Η (x_n) είναι ισοκατανεμημένη αν και μόνο αν*

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi ikx_n}=0 \tag{2.7}$$

για κάθε ακέραιο $k\neq 0$.

Απόδειξη. Δείχνουμε το ευθύ. Έστω ότι η ακολουθία (x_n) είναι ισοκατανεμημένη. Έστω $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$. Εφαρμόζουμε το Πόρισμα 2.1.6 για $f(x)=e^{2\pi ikx}$. Γνωρίζουμε ότι $\int_0^1 e^{2\pi ikx}dx=0$ για $k\neq 0$. Οπότε,

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi ikx_n}=0.$$

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι ισχύει

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi ikx_n}=0 \tag{2.8}$$

για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ με $k\neq 0$. Από το Πόρισμα 2.1.6 αρκεί να δείξουμε την (2.5) για κάθε $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνεχή, περιοδική με περίοδο 1. Έστω $\epsilon>0$. Από το Θεώρημα του Weirestrass υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυνο $q(x)$, δηλαδή πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων της μορφής $e^{2\pi ikx}$, τέτοιο ώστε

$$\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-q(x)|<\frac{\epsilon}{3}. \tag{2.9}$$

Από την (2.8) έχουμε

$$\lim_{N\to+\infty}\Big|\int_0^1 q(x)dx-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}q(x_n)\Big|=0. \tag{2.10}$$

Οπότε

$$\limsup_{N\to+\infty}\Big|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(x_n)\Big|\leq\Big|\int_0^1(f(x)-q(x))dx\Big|+$$

$$\lim_{N\to+\infty}\Big|\int_0^1 q(x)dx-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}q(x_n)\Big|+\limsup_{N\to+\infty}\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(f(x_n)-q(x_n))dx\Big|\leq\epsilon$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει από την (2.9) και την (2.10). Αφού το ϵ είναι αυθαίρετο το ζητούμενο αποδείχθηκε. □

Παραδείγματα

(i) Έστω α άρρητος θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(n\alpha)$ είναι ισοκατανεμημένη. Θα εφαρμόσουμε το Κριτήριο Weyl. Αφού α άρρητος τότε $k\alpha \notin \mathbb{Z}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, συνεπώς $e^{2\pi i k\alpha} \neq 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Άρα για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, έχουμε

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k n\alpha}\Big| = \frac{|e^{2\pi i k\alpha}(1-e^{2\pi i k N\alpha})|}{N(1-e^{2\pi i k\alpha})} \leq \frac{2}{N|1-e^{2\pi i k\alpha}|} \to 0$$

για $N \to +\infty$. Οπότε η ακολουθία $(n\alpha)$ είναι ισοκατανεμημένη.

(ii) Εάν α ρητός τότε η ακολουθία $(\{n\alpha\})$ δεν είναι πυκνή στο $[0,1)$ και άρα η $(n\alpha)$ δεν είναι ισοκατανεμημένη.

(iii) Από το (i) και το Θεώρημα 2.1.7 έχουμε ότι η ακολουθία $\big(n\sqrt{2} + \frac{n^2}{n^2+1}\big)$ είναι ισοκατανεμημένη.

(iv) Από το (i) έχουμε ότι η ακολουθία (ne) είναι ισοκατανεμημένη. Όμως θα δείξουμε ότι η υπακολουθία $(n!e)$ δεν είναι ισοκατανεμημένη.

Πράγματι, από το Θεώρημα Taylor-Langrange έχουμε ότι το e μπορεί να γραφεί στη μορφή $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{x}{(n+1)!}$ με $0 < x < e$. Άρα

$$n!e = n!\Big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\Big) + \frac{x}{n+1},$$

ή ισοδύμαμα $n!e = k + \frac{x}{n+1}$ με k θετικό ακέραιο. Άρα

$$\{n!e\} = \frac{x}{n+1} < \frac{e}{n+1} \to 0$$

για $n \to +\infty$. Οπότε η ακολουθία $(n!e)$ δεν είναι ισοκατανεμημένη.

(v) Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(\log n)$ δεν είναι ισοκατανεμημένη.

Αρχικά θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο άθροισης του Euler.
Έστω $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{C}$ με $f \in C^1([1,+\infty))$ και $N \geq 1$. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n)\Big| = \\
&\Big|\frac{1}{N}\int_1^N f(x)dx + \frac{1}{2N}(f(1)+f(N)) + \frac{1}{N}\int_1^N (\{x\}-\frac{1}{2})f'(x)dx\Big| \leq \\
&\underbrace{\Big|\frac{1}{N}\int_1^N f(x)dx\Big|}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\Big|\frac{1}{2N}(f(1)+f(N))\Big|}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\Big|\frac{1}{N}\int_1^N (\{x\}-\frac{1}{2})f'(x)dx\Big|}_{\mathrm{III}}.
\end{aligned}$$

Για $f(x) = e^{2\pi i \log x}$ προκύπτει ότι

$$I = \Big|\frac{1}{N}\int_1^N f(x)dx\Big| = \frac{|Ne^{2\pi i \log N} - 1|}{N(2\pi i + 1)} \nrightarrow 0 \tag{2.11}$$

διότι $e^{2\pi i \log N} \nrightarrow 0$. Επίσης έχουμε

$$II = \Big|\frac{1}{2N}(f(1) + f(N))\Big| = \frac{1}{2N}|1 + e^{2\pi i \log N}| \to 0, \tag{2.12}$$

και

$$III = \Big|\frac{1}{N}\int_1^N (\{x\} - \frac{1}{2})f'(x)dx\Big| \leq \frac{1}{N}\int_1^N \Big|\frac{2\pi i e^{2\pi i \log x}}{x}\Big|dx = \frac{2\pi \ln N}{N} \to 0. \tag{2.13}$$

Άπο τις (2.11), (2.12), (2.13) βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \log n} \nrightarrow 0,$$

άρα από το κριτήριο Weyl η ακολουθία $(\log n)$ δεν είναι ισοκατανεμημένη.

Κεφάλαιο 3

Γενικά θεωρήματα ισοκατανομής

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε ισοκατανομή ακολουθιών (x_n) της μορφής $x_n = f(n)$, όπου f είναι μία ομαλή συνάρτηση που δεν αυξάνει πολύ γρήγορα στο $+\infty$. Τυπικά παραδείγματα είναι οι ακολουθίες $(\sqrt{n})$, $(n^{\frac{3}{2}})$, $(n^2\sqrt{2})$, $(n\log n)$, $((\log n)^2)$, $(\log n)$. Θα αποδείξουμε κριτήρια που μας επιτρέπουν να συμπεραίνουμε πως όλες εκτός της τελευταίας είναι ισοκατανεμημένες.

3.1 Θεώρημα Fejer

Σε αυτήν την παράγραφο θα αποδείξουμε το κριτήριο Fejer από το οποίο προκύπτει για παράδειγμα, πως οι ακολουθίες $(\sqrt{n})$, $((\log n)^2)$ είναι ισοκατανεμημένες. Θα αποδείξουμε επίσης ένα κριτήριο ισοκατανομής από το οποίο θα συμπεράνουμε για παράδειγμα, πως η ακολουθία $(\log n)$ δεν είναι ισοκατανεμημένη.

Θεώρημα 3.1.1 (Fejer [7]). *Έστω $(f(n))$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Έστω $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ είναι μονότονη, $\lim_{n\to+\infty} \Delta f(n) = 0$ και $\lim_{n\to+\infty} |n\Delta f(n)| = +\infty$. Τότε η ακολουθία $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για $u, v \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$|e^{2\pi iu} - e^{2\pi iv} - 2\pi i(u-v)e^{2\pi iv}| = |e^{2\pi i(u-v)} - 1 - 2\pi i(u-v)| =$$

$$4\pi^2\Big|\int_0^{u-v} (u-v-w)e^{2\pi iw}dw\Big| \le 4\pi^2 \int_0^{u-v} |(u-v-w)|dw = 2\pi^2(u-v)^2.$$

Επιλέγουμε $u = kf(n+1)$, $v = kf(n)$ με $k \in \mathbb{Z}$ και $k \neq 0$. Τότε έχουμε ότι

$$|e^{2\pi ikf(n+1)} - e^{2\pi ikf(n)} - 2\pi ik\Delta f(n)e^{2\pi ikf(n)}| \leq 2\pi^2 k^2 |\Delta f(n)|.$$

Οπότε

$$\Big|\frac{e^{2\pi ikf(n+1)}}{\Delta f(n)} - \frac{e^{2\pi ikf(n)}}{\Delta f(n)} - 2\pi ike^{2\pi ikf(n)}\Big| \leq 2\pi^2 k^2 |\Delta f(n)|. \tag{3.1}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{e^{2\pi ikf(n+1)}}{\Delta f(n+1)} - \frac{e^{2\pi ikf(n)}}{\Delta f(n)} - 2\pi ike^{2\pi ikf(n)}\Big| = \\
&\quad\Big|\frac{e^{2\pi ikf(n+1)}}{\Delta f(n+1)} - \frac{e^{2\pi ikf(n+1)}}{\Delta f(n)} + \frac{e^{2\pi ikf(n+1)}}{\Delta f(n)} - \frac{e^{2\pi ikf(n)}}{\Delta f(n)} - 2\pi ike^{2\pi ikf(n)}\Big| \leq \\
&\qquad\qquad\Big|\frac{1}{\Delta f(n+1)} - \frac{1}{\Delta f(n)}\Big| + 2\pi^2 k^2 |\Delta f(n)| \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει χρησιμοποιώντας την (3.1). Η ποσότητα

$$\Big|2\pi ik \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ikf(n)}\Big|$$

ισούται με

$$\Big|\sum_{n=1}^{N}\Big(2\pi ike^{2\pi ikf(n)} - \frac{e^{2\pi ikf(n+1)}}{\Delta f(n+1)} + \frac{e^{2\pi ikf(n)}}{\Delta f(n)}\Big) + \frac{e^{2\pi ikf(n)}}{\Delta f(N)} - \frac{e^{2\pi ikf(1)}}{\Delta f(1)}\Big|$$

το οποίο είναι μικρότερο από

$$\sum_{n=1}^{N}\Big|e^{2\pi ikf(n)} - \frac{e^{2\pi ikf(n+1)}}{\Delta f(n+1)} + \frac{e^{2\pi ikf(n)}}{\Delta f(n)}\Big| + \frac{1}{|\Delta f(N)|} + \frac{1}{|\Delta f(1)|}$$

και αυτό με τη σειρά του μικρότερο από

$$\sum_{n=1}^{N}\Big|\frac{1}{\Delta f(n)} - \frac{1}{\Delta f(n+1)}\Big| + 2\pi^2 k^2 \sum_{n=1}^{N} |\Delta f(n)| + \frac{1}{|\Delta f(N)|} + \frac{1}{|\Delta f(1)|}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα (3.2). Άρα

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ikf(n)}\Big| &\leq \frac{1}{N2\pi|k|}\sum_{n=1}^{N}\Big|\frac{1}{\Delta f(n)} - \frac{1}{\Delta f(n+1)}\Big| + \\
&+ \frac{\pi|k|}{N}\sum_{n=1}^{N}|\Delta f(n)| + \frac{1}{2\pi|k|}\Big(\frac{1}{N|\Delta f(n)|} + \frac{1}{N|\Delta f(1)|}\Big).
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ότι η $\Delta f(n)$ είναι μονότονη η τελευταία ανισότητα δίνει ότι

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ikf(n)}\Big| \leq \frac{\pi|k|}{N}\sum_{n=1}^{N}|\Delta f(n)| + \frac{1}{\pi|k|}\Big(\frac{1}{N|\Delta f(1)|} + \frac{1}{N|\Delta f(N)|}\Big) \to 0$$

για $N \to +\infty$ επειδή από υπόθεση έχουμε $\lim_{n\to+\infty} n|\Delta f(n)| \to +\infty$ και διοτί

$$\lim_{N\to+\infty} |\Delta f(n)| = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{n=1}^{N} |\Delta f(n)|}{N} \to 0.$$

Άρα από το Κριτήριο Weyl η ακολουθία $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη. □

Πόρισμα 3.1.2. *Έστω $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση που είναι διαφορίσιμη για κάθε $x \geq x_0$ για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$. Έστω ότι η $f'(x)$ τείνει μονότονα στο 0 καθώς $x \to +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} x|f'(x)| = +\infty$. Τότε η ακολουθία $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στην f στο διάστημα $[n, n+1]$ και έχουμε ότι υπάρχει $x_n \in [n, n+1]$ τέτοιο ώστε $f'(x_n) = \Delta f(n)$. Επομένως η $(\Delta f(n))$ πληρεί τις προυποθέσεις του Θεωρήματος Fejer από την υπόθεση και άρα η $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη. □

Το Θεώρημα Fejer συνήθως εφαρμόζεται για ακολουθίες που αυξάνουν αργά όπως οι (n^c) με $c \in (0,1)$, $\left(\frac{n}{\log n}\right)$, $((\log n)^2)$. Δεν εφαρμόζεται για ακολουθίες που αυξάνουν στο $+\infty$ με γραμμικό ή πιο γρήγορο ρυθμό όπως οι $(n\sqrt{2})$, $(n \log n)$, $(n^{\frac{3}{2}})$, $(n^2\sqrt{2})$. Αργότερα θα αποδείξουμε άλλα κριτήρια τα οποία δίνουν ότι και αυτές είναι ισοκατανεμημένες.

Παραδείγματα Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Fejer και το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε άμεσα ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι ισοκατανεμημένες:

(i) $(\alpha \log^c(n))$ με $\alpha \neq 0$ και $c \in (1,+\infty)$.

(ii) $(\alpha n^b \log^c(n))$, $\alpha \neq 0$, $0 < b < 1$ και $c \in \mathbb{R}$.

(iii) $(\alpha n \log^c(n))$ με $\alpha \neq 0$ και $c \in (-\infty, 0)$.

Παρακάτω αναφέρουμε κάποιο λήμμα που θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.4.

Λήμμα 3.1.3 (Tauberian theorem [8]). *Έστω (x_n) ακολουθία τέτοια ώστε $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{c}{n}$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}$ και $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to 0$. Τότε $x_n \to 0$ για $n \to +\infty$.*

Δείχνουμε τώρα ένα βασικό κριτήριο μη ισοκατανομής από το οποίο προκύπτει ότι η τελευταία συνθήκη στο Θεώρημα Fejer είναι σχεδόν αναγκαία.

Θεώρημα 3.1.4. *Έστω ότι η ακολουθία $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη. Τότε*

$$\limsup_{n\to+\infty} n|\Delta f(n)| = +\infty.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη και

$$\limsup_{n\to+\infty} n|\Delta f(n)| = C < +\infty. \tag{3.3}$$

Παρατηρούμε ότι για $u, v \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$|e^{2\pi iu} - e^{2\pi iv}| = 2\pi\Big|\int_0^{u-v} e^{2\pi iw}dw\Big| \le 2\pi|u-v|. \tag{3.4}$$

Επιλέγοντας $u = f(n+1)$ και $v = f(n)$ η (3.4) δίνει ότι

$$|e^{2\pi if(n+1)} - e^{2\pi if(n)}| \le 2\pi|f(n+1) - f(n)| = 2\pi|\Delta f(n)| \le \frac{C+1}{n},$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει για μεγάλα n από την (3.3). Επίσης αφού η $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη, από το Κριτήριο Weyl έχουμε ότι

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi if(n)} = 0.$$

Οπότε από το Λήμμα 3.1.3 παίρνουμε ότι

$$\lim_{N\to+\infty} e^{2\pi if(n)} = 0 \tag{3.5}$$

άτοπο. □

Για παράδειγμα χρησιμοποιώντας το παραπάνω κριτήριο βλέπουμε ότι οι ακολουθίες $(\log n)$, $(\sqrt{\log n})$, $(\log\log n)$, δεν είναι ισοκατανεμημένες.

3.2 Κριτήριο van der Corput και πολυώνυμα

Σε αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με την ισοκατανομή ακολουθιών που αυξάνουν στο $+\infty$ με γραμμικό ή πιο γρήγορο ρυθμό όπως οι $(n\sqrt{2})$, $(n^2\sqrt{2})$, $(n^{\frac{3}{2}})$. Ξεκινάμε με το παρακάτω βασικό λήμμα.

Λήμμα 3.2.1 (van der Corput [11]). *Έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών και υποθέτουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_{n+m}\bar{x}_n = 0.$$

Τότε

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n = 0.$$

Απόδειξη. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\lim_{N\to+\infty}\Big(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_n-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_{n+m}\Big)=0.$$

Οπότε για κάθε $M \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\lim_{N\to+\infty}\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_n-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}x_{n+m}\Big|=0.$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{M\to+\infty}\limsup_{N\to+\infty}\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}x_{n+m}\Big|=0. \tag{3.6}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz και παίρνοντας lim sup έχουμε ότι το

$$\limsup_{N\to+\infty}\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}x_{n+m}\Big|^2$$

είναι μικρότερο από το

$$\limsup_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Big|\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}x_{n+m}\Big|^2$$

και αυτό είναι μικρότερο από το

$$\frac{1}{M^2}\sum_{1\le m_1,m_2\le M}\limsup_{N\to+\infty}\Big|\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{M}x_{n+m_1}\bar{x}_{n+m_2}\Big|.$$

Αυτό ισούται με

$$\frac{1}{M^2}\sum_{m_1=m_2}\limsup_{N\to+\infty}\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_{n+m_1}\bar{x}_{n+m_2}\Big|+$$
$$+\frac{1}{M^2}\sum_{m_1\ne m_2}\limsup_{N\to+\infty}\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_{n+m_1}\bar{x}_{n+m_2}\Big|.$$

Όμως για κάθε $m_1 > m_2$ έχουμε

$$\limsup_{N\to+\infty}\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_{n+m_1}\bar{x}_{n+m_2}\Big|=\limsup_{N\to+\infty}\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_{n+m_1-m_2}\bar{x}_{n}\Big|=0$$

από υπόθεση. Παρόμοιο αποτέλεσμα παίρνουμε όταν $m_1 < m_2$. Επίσης από υπόθεση υπάρχει $C \in \mathbb{R}$ με $|x_n| \le C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\frac{1}{M^2}\sum_{m_1=m_2}\limsup_{N\to+\infty}\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_{n+m_1}\bar{x}_{n+m_2}\Big|\le\frac{C}{M}\to 0$$

καθώς $M \to +\infty$. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η (3.6) ισχύει και άρα $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_n \to 0$. □

Θεώρημα 3.2.2. *Έστω (x_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών ώστε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(x_{n+m} - x_n)$ είναι ισοκατανεμημένη. Τότε και η ακολουθία (x_n) είναι ισοκατανεμημένη.*

Απόδειξη. Άφου η ακολουθία $(x_{n+m} - x_n)$ είναι ισοκατανεμημένη από το Κριτήριο Weyl έχουμε

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k(x_{n+m}-x_n)} \to 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Από το Λήμμα van der Corput έχουμε ότι

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k x_n} \to 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Οπότε, από το κριτήριο Weyl πάλι, η ακολουθία (x_n) είναι ισοκατανεμημένη. □

Παραδείγματα

(*i*) Έστω α άρρητος, θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(n^2\alpha)$ είναι ισοκατανεμημένη. Από το Θεώρημα 3.2.2 αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(((n+m)^2 - n^2)\alpha)$ είναι ισοκατανεμημένη. Έχουμε

$$((n+m)^2 - n^2)\alpha = 2mn\alpha + m^2\alpha = \beta n + \gamma$$

με β άρρητο. Όμως η $(\beta n + \gamma)$ είναι ισοκατανεμημένη από το Παράδειγμα 1 στην παράγραφο 2.2. Άρα το Θεώρημα 3.2.2 δίνει ότι και η $(n^2\alpha)$ είναι ισοκατανεμημένη.

(*ii*) Έστω $p(n)$ πολυώνυμο με μεγιστοβάθμιο συντελεστή άρρητο. Θα δείξουμε, ότι η ακολουθία $(p(n))$ είναι ισοκατανεμημένη.

Έστω $p(n) = a_l n^l + a_{l-1} n^{l-1} + \cdots + a_1 n + a_0$.

Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά. Για $l = 1$ η $(p(n))$ είναι ισοκατανεμημένη από Παράδειγμα 1 στην παράγραφο 2.2. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $l \geq 1$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για $l + 1$. Από το Θεώρημα 3.2.2 αρκεί να δείξουμε ότι η διαφορά $(p(n+m) - p(n))$ είναι ισοκατανεμημένη για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$. Εύκολα βλέπουμε ότι το πολυώνυμο $(p(n+m) - p(n))$ είναι βαθμού $l - 1 \geq 1$ και έχει μεγιστοβάθμιο συντελεστή lma_l, δηλαδή άρρητο. Άρα από την επαγωγική υπόθεση η ακολουθία $(p(n+m) - p(n))$ είναι ισοκατανεμημένη και αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή.

(*iii*) Χρησιμοποιώντας την (*ii*) μπορούμε να δείξουμε ότι αν $p(n)$ πολυώνυμο με τουλάχιστον ένα μη σταθερό άρρητο συντελεστή τότε η $(p(n))$ είναι ισοκατανεμημένη.

Έχουμε ορίσει $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$. Ορίζουμε αναδρομικά $\Delta^k(x_n) = \Delta(\Delta^{k-1} x_n)$ με $k \geq 2$.

Θεώρημα 3.2.3. *Έστω $(f(n))$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $k \in \mathbb{N}$. Αν η $\Delta^k f(n)$ είναι μονότονη ως προς n, $\Delta^k f(n) \to 0$, και $n|\Delta^k f(n)| \to +\infty$ για $n \to +\infty$. Τότε η ακολουθία $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά.

Για $k = 1$ η $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη από το Θεώρημα Fejer .

Υποθέτουμε ότι το θεώρημα ισχύει για $k \geq 1$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για $k+1$. Έχουμε ότι η $\Delta^{k+1} f(n)$ είναι μονότονη ως προς n, $\Delta^{k+1} f(n) \to 0$ και $n|\Delta^{k+1} f(n)| \to +\infty$. Για $h \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$f(n+h) - f(n) = \sum_{j=0}^{h-1} \Delta f(n+j).$$

Άρα

$$\Delta^k(f(n+h) - f(n)) = \sum_{j=0}^{h-1} \Delta^{k+1} f(n+j).$$

Από τις υποθέσεις οδηγούμαστε στο ότι η $\Delta^k(f(n+h) - f(n))$ είναι μονότονη ως προς n, $\lim_{n\to+\infty} \Delta^k(f(n+h)-f(n)) = 0$ και $\lim_{n\to+\infty} n|\Delta^k(f(n+h)-f(n))| = +\infty$. Οπότε από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι η ακολουθία $(f(n+h)-f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη για κάθε $h \in \mathbb{N}$. Άρα από το Θεώρημα 3.2.2 η ακολουθία $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη. □

Θεώρημα 3.2.4. *Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση k φορές παραγωγίσιμη για $x \geq x_0$. Έστω $f^{(k)}(x)$ τείνει μονότονα στο 0 για $x \to +\infty$, και $\lim_{x\to+\infty} x|f^{(k)}(x)| = +\infty$. Τότε η ακολουθία $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά.

Για $k = 1$ ισχύει από το Θεώρημα 3.1.2.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $k \geq 1$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για $k+1$. Έστω $h \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε την συνάρτηση $g(x) = f(x+h) - f(x)$ για $x \geq 1$. Τότε $g^{(k)}(x) = f^{(k)}(x+h) - f^{(k)}(x)$ για κάθε $x \geq x_0$. Αφού $f^{(k+1)}(x) \to 0$ μονότονα και $x|f^{(k+1)}(x)| \to +\infty$ κάνοντας χρήση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής εύκολα βλέπουμε ότι $g^{(k)}(x) \to 0$ μονότονα και $x|g^{(k)}(x)| \to +\infty$. Άρα από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι η ακολουθία $(f(n+h) - f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη για κάθε $h \in \mathbb{N}$. Οπότε από το Θεώρημα 3.2.2 και η ακολουθία $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη. □

Παραδείγματα

(i) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.2.4 για $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ και $k = 2$ βλέπουμε ότι η ακολουθία $(n^{\frac{3}{2}})$ είναι ισοκατανεμημένη.

(ii) Ποιό γενικά, $a \geq 0$ και $a \notin \mathbb{Z}$, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.2.4 για $f(x) = x^a$ με $k = [a] + 1$, βλέπουμε ότι η ακολουθία (n^a) είναι ισοκατανεμημένη.

(iii) Εφαρμόζοντας πάλι το Θεώρημα 3.2.4 στην $f(x) = x(\log x)^2$ με $k = 2$ παίρνουμε ότι η ακολουθία $(n(\log n)^2)$ είναι ισοκατανεμημένη.

3.3 Η ακολουθία $(n \log n)$

Τα θεωρήματα των προηγούμενων παραγράφων δεν μας επιτρέπουν να αποφασίσουμε αν για παράδειγμα η ακολουθία $(n \log n)$ είναι ισοκατανεμημένη. Για να το κάνουμε αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποιες σχετικές δύσκολες εκτιμήσεις εκθετικών αθροισμάτων, τις οποίες δεν θα αποδείξουμε εδώ. Θα δώσουμε όμως μία απλούστερη απόδειξη ισοκατανομής της $(n \log n)$ στο επόμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ με $a < b$ και f συνάρτηση 2 φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ τέτοια ώστε $f''(x) \geq r > 0$ η $f''(x) \leq -r < 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε*

$$\Big|\sum_{n=a}^{b} e^{2\pi i f(n)}\Big| \leq (f'(b) - f'(a)| + 2)\Big(\frac{4}{\sqrt{r}} + 3\Big).$$

Παράδειγμα. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.3.1 θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(n \log n)$ με $n = 1, 2, \ldots$ είναι ισοκατανεμημένη.

Θεωρούμε την $f(x) = kx \log x$. Βάση του θεωρήματος 3.3.1 με $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ έχουμε ότι

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h n \log n}\Big| \leq \frac{1}{N}(|f'(N) - f'(1)| + 2)\Big(\frac{4}{\sqrt{r}} + 3\Big). \tag{3.7}$$

Παρατηρούμε ότι $f''(x) = \frac{h}{x} \geq \frac{h}{N}$ για $x \in [0, 1]$. Οπότε επιλέγουμε $r = \frac{h}{N}$. Άρα η (3.7) δίνει ότι

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h n \log n}\Big| \leq \frac{1}{N}(h \log N + 2)\big(4\sqrt{N}h + 3\big) \to 0$$

για $N \to +\infty$. Από το Κριτήριο Weyl η ακολουθία $(n \log n)$ είναι ισοκατανεμημένη.

Επίσης από το Θεώρημα 3.3.1 έπεται με παρόμοιο τρόπο ότι οι ακολουθίες $(n \log \log n)$, $(n \log^b n)$ με $0 < b \leq 1$ είναι ισοκατανεμημένες (τα κριτήρια των προηγούμενων παραγράφων δεν εφαρμόζονται για αυτές).

3.4 Ισοκατανομή αύξουσων ακολουθιών

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι αν α άρρητος τότε η ακολουθία $(n^k\alpha)$ είναι ισοκατανεμημένη. Δεν είναι όμως σωστό ότι αν (a_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία ακεραίων και α άρρητος τότε η ακολουθία $(a_n\alpha)$ είναι ισοκατανεμημένη. Αυτό προκύπτει από τα παρακάτω παράδειγματα:

Στο παράδειγμα (iv) στην παράγραφο 2.2 είδαμε πως η ακολουθία $(n!e)$ δεν είναι ισοκατανεμημένη.

Επίσης αν το δυαδικό ανάπτυγμα ενός άρρητου α είναι $\alpha = 0,101001000100001\ldots$ τότε $\{2^n\alpha\} \leq \frac{3}{4}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό προκύπτει διότι $\alpha = 0,101001000100001\ldots$ $2\alpha = 0,010010001\ldots$ $2^2\alpha = 0,10010001\ldots$ κ.ο.κ. Σε κάθε περίπτωση βλέπουμε ότι τα δύο πρώτα δεκαδικά ψηφία του $2^n a$ δεν είναι ποτέ 11. Άρα η ακολουθία $(2^n\alpha)$ δεν είναι ούτε ισοκατανεμημένη ούτε πυκνή.

Μάλιστα μπορούμε να δείξουμε ότι το σύνολο των α για τα οποία η $(2^n\alpha)$ δεν είναι ισοκατανεμημένη είναι υπεραριθμήσιμο. Προκύπτει το ερώτημα εάν υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία ακεραίων (a_n) έτσι ώστε η ακολουθία $(a_n\alpha)$ να μην είναι ισοκατανεμημένη για όλους τους πραγματικούς α. Το παρακάτω θεώρημα δείχνει ότι αυτό δεν μπορεί να συμβεί, μάλιστα δείχνει κάτι πιο ισχύρο, για τυπικά α (δηλαδή για α εκτός από ένα σύνολο μέτρου μηδέν) η ακολουθία $(a_n\alpha)$ είναι ισοκατανεμημένη.

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω (a_n) με $n \in \mathbb{N}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία ακεραίων. Τότε η ακολουθία $(a_n x)$ είναι ισοκατανεμημένη σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η $(a_n x)$ είναι ισοκατανεμημένη σχεδόν για κάθε $x \in [0,1)$. Για $h \in \mathbb{Z}$, θέτουμε

$$S(N,h,x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h a_n x}.$$

Έχουμε ότι

$$\int_0^1 |S(N,h,x)|^2 dx = \frac{1}{N^2}\sum_{n,m=1}^{N}\int_0^1 e^{2\pi i h(a_m - a_n)x} = \frac{1}{N} \tag{3.8}$$

διότι $\int_0^1 e^{2\pi i k x}dx = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $k \neq 0$ και $\int_0^1 e^{2\pi i k x}dx = 1$ για $k = 0$. Οπότε σύμφωνα με την (3.8) έχουμε ότι

$$\sum_{N=1}^{+\infty}\int_0^1 |S(N^2,h,x)|^2 dx = \sum_{N=1}^{+\infty}\frac{1}{N^2} < +\infty.$$

Από γνωστό θεώρημα της θεωρίας μέτρου συμπεραίνουμε ότι

$$\int_0^1 \sum_{N=1}^{+\infty} |S(N^2,h,x)| dx < +\infty$$

και άρα για κάθε $h \in \mathbb{Z}$ με $h \neq 0$ έχουμε $\sum_{N=1}^{+\infty} |S(N^2, h, x)| < +\infty$ σχεδόν για κάθε $x \in [0,1]$. Συνεπώς $\lim_{N\to+\infty} S(N^2, h, x) = 0$ σχεδόν για κάθε $x \in [0,1]$. Για $N \geq 1$ υπάρχει θετικός ακέραιος m τέτοιος ώστε $m^2 < N < (m+1)^2$. Άρα

$$|S(N,h,x)| \leq |S(M^2,h,x)| + \frac{2m}{N} \leq |S(M^2,h,x)| + \frac{2}{\sqrt{N}}.$$

Συμπεραίνουμε ότι για κάθε $h \in \mathbb{Z}$ με $h \neq 0$, σχεδόν για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε $\lim_{N\to+\infty} S(N,h,x) = 0$. Αφού οι επιλογές των h είναι αριθμήσιμες έπεται ότι σχεδόν για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε $\lim_{N\to+\infty} S(N,x,h) = 0$ για κάθε $h \in \mathbb{Z}$ με $h \neq 0$. Το κριτήριο Weyl δίνει ότι η ακολουθία $(a_n x)$ είναι ισοκατανεμημένη σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Από το παραπάνω θεώρημα έχουμε ότι η ακολουθία $(2^n x)$ είναι ισοκατανεμημένη σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι όμως εξαιρετικά δύσκολο να αποφασίσουμε για συγκεκριμένες τιμές του x εάν η ακολουθία $(2^n x)$ είναι ισοκατανεμημένη. Για παράδειγμα δεν είναι γνωστό εάν οι ακολουθίες $(2^n\sqrt{2})$, $(2^n\pi)$, $(2^n e)$, $(2^n \log 2)$ είναι ισοκατανεμημένες.

Κεφάλαιο 4

Ισοκατανομή ακολουθιών Hardy

Στα προηγούμενα κεφάλαια είδαμε κάποια κριτήρια που μας επιτρέπουν να αποφασίσουμε, για παράδειγμα, πως οι ακολουθίες

$$(n\sqrt{2}), \quad (n^2\sqrt{2}), \quad (\sqrt{n}), \quad ((\log n)^2), \quad (n\log n), \quad (n^{\frac{3}{2}}) \tag{4.1}$$

είναι ισοκατανεμημένες ενώ οι ακολουθίες

$$(\log n), \quad (\log\log n) \tag{4.2}$$

δεν είναι. Ήδη για αυτές τις περιπτώσεις χρειάστηκε να χρησιμοποιήσουμε αρκετά διαφορετικά κριτήρια και δεν είναι προφανές αν τα ίδια κριτήρια μας επιτρέπουν να αποφασίσουμε αν για παράδειγμα οι ακολουθίες

$$(n^2\log n), \quad (n^2\log\log n), \quad (n\sqrt{2}+\log n), \quad \left(\frac{n^2}{2}+\sqrt{\log n}\right) \tag{4.3}$$

είναι ισοκατανεμημένες η όχι (οι πρώτες τρείς είναι η τέταρτη όχι).

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε ένα κριτήριο (Θεώρημα 4.0.2) όπου μας επιτρέπει να αποφασίζουμε σχετικά άμεσα ποιες από τις ακολουθίες που συχνά χρησιμοποιούμε στην ανάλυση είναι ισοκατανεμημένες και ποιες όχι. Για να το πετύχουμε αυτό θα περιοριστούμε σε ακολουθίες της μορφής $(f(n))$ όπου f μία συνάρτηση Hardy (αυστηρός ορισμός παρακάτω) και δεν αυξάνει πολύ γρήγορα (πολυωνυμικός ρυθμός αρκεί). Θα δείξουμε στο Θεώρημα 4.0.2 ότι υπό αυτούς τους περιορισμούς η ακολουθία $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη εκτός και αν η συνάρτηση f βρίσκεται λογαριθμικά κοντά σε κάποιο πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές, δηλαδή εάν

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|f(x)-p(x)|}{\log x} < +\infty$$

για κάποιο πολυώνυμο $p \in \mathbb{Q}[x]$, (σε αυτήν την δεύτερη περίπτωση η $(f(n))$ δεν είναι ισοκατανεμημένη). Αυτό το κριτήριο μας επιτρέπει να αποφασίσουμε άμεσα ποιές από τις ακολουθίες που εμφανίζονται στις (4.1), (4.2), (4.3) είναι ισοκατανεμημένες και ποιές όχι. Επίσης δεν είναι καθόλου ποιό δύσκολο να αποφασίσουμε πως φαινομενικά πολύπλοκες ακολουθίες όπως η

$$(n^2 e^{-\sqrt{\log n}} + \log\log n)$$

είναι ισοκατανεμημένη, ενώ η ακολουθία

$$\Big(\frac{n^2+1}{5n^2+2n+1} + \frac{\log n}{\log\log n}\Big)$$

δεν είναι ισοκατανεμημένη.

Το βασικό πλεονέκτημα που αποκτάμε δουλεύοντας με την κλάση των συναρτήσεων Hardy είναι ότι σχετικά απλές συνθήκες για τον ρυθμό αύξησης τέτοιων συναρτήσεων δίνουν αυτόματα πολύπλοκες συνθήκες για τις παραγώγους τους (Λήμμα 4.2.2 παρακάτω). Αυτό μας επιτρέπει να απλοποιήσουμε πολύ τις υποθέσεις των θεωρημάτων μας και θα μας οδηγήσει στο παρακάτω εύχρηστο αποτέλεσμα (η ορολογία εξηγείται στην επόμενη παράγραφο).

Θεώρημα 4.0.2 (Boshernitzan [1]). *Εστω $f \in \mathcal{H}$ έχει πολυωνυνικό ρυθμό. Τότε η ακολουθία $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη αν και μόνο αν για κάθε πολυώνυμο p με ρητούς συντελεστές έχουμε ότι*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{|f(t)-p(t)|}{\log t} = +\infty.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε άμεσα ότι η ακολουθία $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη όταν

(*i*) $f(n) = n^a$ με $a \geq 0$ και $a \notin \mathbb{Z}$

(*ii*) $f(n) = n\log\log n$

(*iii*) $f(n) = n^a(\log n)^b$ με $a > 0$ και $b \neq 0$

(*iv*) $f(n) = \frac{n^2}{6} + \frac{n}{2} + \log n \log(\log n)$

(*v*) $f(n) = e^{\sqrt{\log n}}$

(*vi*) $f(n) = n^2\sqrt{3} + n\log n$

Το παραπάνω θεώρημα δείχνει ότι η ακολουθία $(f(n))$ δεν είναι ισοκατανεμημένη όταν

(*i*) $f(n) = \log n$,

(*ii*) $f(n) = \log(\log n)$

(*iii*) $f(n) = \frac{n^2}{10} + \sqrt{\log n}$

4.1 Συναρτήσεις Hardy και βασικές ιδιότητες.

Ορισμός 4.1.1. (*i*) Γράφουμε $\bar{\mathbb{R}}$ για το σύνολο $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

(*ii*) Γράφουμε ότι $f(t) \prec g(t)$ εάν $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$.

(*iii*) Γράφουμε ότι $f(t) \sim g(t)$ εάν το όριο $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)}$ είναι πραγματικός αριθμός διάφορος του 0.

(*iv*) Γράφουμε ότι $f(t) \ll g(t)$ εάν $|f(t)| \leq C|g(t)|$ τελικά για κάποιο $C \in \mathbb{R}$.

Παραδείγματα: $e^x \succ x^{100}$, $x \log x \succ 10x$, $x^2 + x \sim 10x^2$, $10x^2 \ll x^2$.
Από τον ορισμό προκύπτει ότι $f \succ 1 \Leftrightarrow \lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$ και $f \prec 1 \Leftrightarrow \lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Ορισμός 4.1.2. Ορίζουμε την κλάση συνσρτήσεων που ονομάζονται **Hardy** και τις συμβολίζουμε με $\mathcal{H}$. Αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις που ορίζονται σε κάποιο διάστημα της μορφής $(c, +\infty)$ από ένα πεπερασμένο συνδυασμό των συμβόλων $+, -, \cdot, :, \log, \exp, \circ$, όπου $\circ$ συμβολίζει την σύνθεση συναρτήσεων.

Παραδείγματα συναρτήσεων Hardy είναι

$$e^{c\log t} = t^c, \quad e^{t^3} + \sqrt{\log(\log t)}, \quad \frac{\log t + e^t}{(\log t)^{\frac{3}{2}}}$$

Είναι προφανές από τον ορισμό και θα το χρησιμοποιούμε συχνά ότι εάν $f, g \in \mathcal{H}$ τότε και $f + g, fg \in \mathcal{H}$ και εάν επιπλέον $g \neq 0$ τελικά, τότε και $\frac{f}{g} \in \mathcal{H}$.

Θεώρημα 4.1.3 (Hardy [6], [7]). *Έστω $f \in \mathcal{H}$. Τότε*

(*i*) $f' \in \mathcal{H}$.

(*ii*) *Εάν $f \not\equiv 0$ τότε υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(t) \neq 0$ για κάθε $t \geq M$.*

Παραλείπουμε την απόδειξη. Απλά αναφέρουμε ότι το (*i*) είναι σχετικά εύκολο να αποδειχθεί, το (*ii*) όμως όχι, έχει αρκετή δουλειά.

Πόρισμα 4.1.4. *Έστω $f, g \in \mathcal{H}$ με $g \not\equiv 0$. Τότε*

(*i*) *Η f έχει τελικά σταθερό πρόσημο και είναι τελικά μονότονη.*

(*ii*) *Εάν $g \not\equiv 0$ τότε $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} \in \bar{\mathbb{R}}$.*

(*iii*) *Ισχύει ένα από τα τρία: $f \prec g$, $g \prec f$, $f \sim g$.*

Απόδειξη. Δείχνουμε το (i). Από το Θεώρημα 4.1.3 υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $f(t) \neq 0$ για κάθε $t > M$. Οπότε από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής έχουμε ότι ή $f(t) > 0$ για κάθε $t > M$ ή $f(t) < 0$ για κάθε $t > M$. Άρα η f έχει τελικά σταθερό πρόσημο. Μένει να δείξουμε ότι η f είναι τελικά μονότονη. Αφού $f \in \mathcal{H}$ έχουμε $f' \in \mathcal{H}$. Από τα προηγούμενα υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $f'(t) > 0$ για κάθε $t > M$ ή $f'(t) < 0$ για κάθε $t > M$. Άρα η f είναι τελικά μονότονη.

Δείχνουμε το (ii). Αφού $g \not\equiv 0$ από το Θεώρημα 4.1.3 έχουμε $g(t) \neq 0$ τελικά. Άρα $\frac{f}{g} \in \mathcal{H}$ και $\frac{f}{g}$ είναι τελικά μονότονη από το (i). Οπότε $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} \in \bar{\mathbb{R}}$.

Η απόδειξη του (iii) είναι άμεση από το (ii). □

Θεώρημα 4.1.5 (Κανόνες l'Hospital). *Έστω $f, g : (c, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $g(t) \neq 0$, $g'(t) \neq 0$ για κάθε $t \geq c$ και*

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$$

ή

$$\lim_{t\to+\infty} f'(t) = \lim_{t\to+\infty} g'(t) = \pm\infty.$$

Αν $\lim_{t\to+\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)} \in \bar{\mathbb{R}}$, τότε $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} \in \bar{\mathbb{R}}$ και ισχύει η ισότητα

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)}.$$

Συνδυάζοντας το πόρισμα 4.1.4 και το Θεώρημα 4.1.5 παίρνουμε το παρακάτω βασικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 4.1.6. *Έστω $f, g \in \mathcal{H}$ με $g \not\equiv 0$ και το όριο*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)}$$

είναι απροσδιόριστη μορφή. Τότε έχουμε

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)} \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 4.1.3 έχουμε $g \neq 0$ τελικά. Επίσης, $g' \neq 0$ τελικά, διαφορετικά από το Θεώρημα 4.1.3 παίρνουμε $g' \equiv 0$, συνεπώς η g είναι σταθερή, άτοπο άφου $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)}$ είναι απροσδιόριστη μορφή. Από το Πόρισμα 4.1.4 έχουμε $\lim_{t\to+\infty} \frac{f'(t)}{g'(t)} \in \bar{\mathbb{R}}$. Άρα το Θεώρημα 4.1.5 εφαρμόζεται και παίρνουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 4.1.7. *Έστω $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{H}$, και $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^k} = L$ με $L \in \mathbb{R}$ και $L \neq 0$. Τότε, $\lim_{t\to+\infty} \frac{f'(t)}{kt^{k-1}} = L$.*

Απόδειξη. Έστω $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^k} = L$ με $L > 0$ (η απόδειξη είναι παρόμοια εάν $L < 0$). Τότε $f(t) > \frac{L}{2}t^k$ τελικά. Άρα $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$. Επομένως, το όριο $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^k}$ είναι απροσδιόριστη μορφή. Άρα από το Θεώρημα 4.1.6 έχουμε ότι

$$L = \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t^k} = \lim_{t\to\infty} \frac{f'(t)}{kt^{k-1}}.$$

□

4.2 Ιδιότητες συναρτήσεων Hardy με πολυωνυμικό ρυθμό

Ορισμός 4.2.1. Λέμε ότι μία συνάρτηση f έχει **πολυωνυμικό ρυθμό** εάν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^k} = 0.$$

Για παράδειγμα οι συναρτήσεις $t^c, t^c(\log t)^b$ με $b, c \in \mathbb{R}$ έχουν πολυωνυμικό ρυθμό ενώ οι συναρτήσεις $e^t, e^{\sqrt{t}}, t^{\log t}$ δεν έχουν πολυωνυμικό ρυθμό.

Το παρακάτω βασικό λήμμα μας επιτρέπει να συγκρίνουμε τον ρυθμό αύξησης μιας συνάρτησης Hardy με πολυωνυμικό ρυθμό με αυτό της παραγώγου της.

Λήμμα 4.2.2. *Έστω $f \in \mathcal{H}$ έχει πολυωνυμικό ρυθμό.*

(i) Αν $t^c \prec f(t)$ για κάποιο $c > 0$, τότε $f'(t) \sim \frac{f(t)}{t}$.

(ii) Αν $t^{-k} \prec f(t)$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ και η $f(t)$ δεν συγκλίνει σε κάποια μη μηδενική σταθερά, τότε

$$\frac{f(t)}{t(\log t)^2} \prec f'(t) \ll \frac{f(t)}{t}.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $f(t) > 0$ τελικά (η απόδειξη είναι παρόμοια αν $f(t) < 0$ τελικά).

Δείχνουμε το (i). Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{tf'(t)}{f(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(\log f(t))'}{(\log t)'} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log f(t)}{\log t} \tag{4.4}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει από το Θεώρημα 4.1.6 διότι η $\log t, \log f(t) \in \mathcal{H}$ και $\log f(t) \to +\infty$ από υπόθεση. Επίσης η f έχει πολυωνυμικό ρυθμό, άρα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^k} = 0$, δηλαδή για t αρκετά μεγάλο έχουμε

$$f(t) < t^k \Rightarrow \frac{\log f(t)}{\log t} < k.$$

Συμπεραίνουμε ότι
$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\log f(t)}{\log t}\in\bar{\mathbb{R}}. \tag{4.5}$$

Επίσης, από υπόθεση $t^c \prec f(t)$. Άρα για αρκετά μεγάλα t ισχύει $t^c < f(t)$. Οπότε $\frac{\log f(t)}{\log t} > c > 0$. Συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\log f(t)}{\log t} > 0. \tag{4.6}$$

Από τις (4.4), (4.5), (4.6) υπάρχει $L\in\mathbb{R}$ με $L>0$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{tf'(t)}{f(t)} = L.$$

Το ζητούμενο έπεται άμεσα.

Δείχνουμε το (ii). Γνωρίζουμε ότι η $f(t)$ δεν συγκλίνει σε κάποια μη μηδενική σταθερά. Άρα $f(t)\to 0$ ή $f(t)\to+\infty$ (επειδή $f\in\mathcal{H}$ και έχουμε υποθέσει ότι $f(t)>0$ τελικά). Οπότε
$$\lim_{t\to+\infty}\log f(t) = \pm\infty. \tag{4.7}$$

Αρχικά θα δείξουμε ότι
$$f'(t) \ll \frac{f(t)}{t}. \tag{4.8}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{tf'(t)}{f(t)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{(\log f(t))'}{(\log t)'} = \lim_{t\to\infty}\frac{\log f(t)}{\log t} \tag{4.9}$$

από την (4.7) και το Θεώρημα 4.1.6. Επίσης, επειδή η f έχει πολυωνυμικό ρυθμό προκύπτει όπως στο προηγούμενο ερώτημα ότι

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\log f(t)}{\log t}\in\mathbb{R}. \tag{4.10}$$

Συνδυάζοντας τις (4.9) και την (4.10) παίρνουμε την (4.8).

Μένει να δείξουμε ότι $\frac{f(t)}{t(\log t)^2}\prec f'(t)$ ή ισοδύναμα ότι

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t(\log t)^2 f'(t)}{f(t)} = \pm\infty.$$

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει. Τότε (χρησιμοποιούμε ότι $f\in\mathcal{H}$)

$$(\log f(t))' \ll \frac{1}{t(\log t)^2}.$$

Παίρνοντας ολοκληρώματα έχουμε ότι $\log f(t) \ll \frac{1}{\log t}+1$ και καταλήγουμε σε άτοπο επειδή από υπόθεση έχουμε ότι $\lim_{t\to+\infty}\log f(t)=\pm\infty$. $\square$

Το προηγούμενο λήμμα δεν εφαρμόζεται για συναρτήσεις που αυξάνουν ποιο γρήγορα από πολυώνυμα όπως $f(t)=e^{\sqrt{t}}$ ή $f(t)=e^t$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $f'\sim\frac{f}{\sqrt{t}}$, στην δεύτερη $f'\sim f$.

Ορισμός 4.2.3. Έστω $k \geq 0$ ακέραιος.

(*i*) Η συνάρτηση $f \in \mathcal{H}$ είναι τύπου k αν $f(t) \sim t^k$.

(*ii*) Η συνάρτηση $f \in \mathcal{H}$ είναι τύπου k^+ αν $t^k \prec f(t) \prec t^{k+1}$.

Λήμμα 4.2.4. *Έστω $f \in \mathcal{H}$ με πολυωνυμικό ρυθμό.*

(*i*) *Υπάρχει ακέραιος $k \geq 0$ τέτοιος ώστε η f να είναι τύπου k η k^+.*

(*ii*) *Αν η f είναι τύπου k τότε η f είναι της μόρφης $f(t) = ct^k + g(t)$ όπου c μη μηδενικός πραγματικός αριθμός και $g \in \mathcal{H}$ με $g(t) \prec t^k$.*

Απόδειξη. Δείχνουμε το (*i*). Έστω d ο ελάχιστος ακέραιος ώστε $\frac{f(t)}{t^d} \to 0$ και $k = d - 1$. Εάν $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^k} \in \mathbb{R}$ τότε η f είναι τύπου k. Διαφορετικά $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^k} = \pm\infty$ και η f είναι τύπου k^+.

Δείχνουμε το (*ii*). Η f έχει τύπο k δηλαδή έχουμε $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^k} = c$ με $c \in \mathbb{R}$ και $c \neq 0$. Θέτουμε $g(t) = f(t) - ct^k$. Τότε $f(t) = ct^k + g(t)$ και

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{g(t)}{t^k} = \lim_{t\to+\infty} \Big(\frac{f(t)}{t^k} - c\Big) = 0.$$

□

Πόρισμα 4.2.5. *Έστω $f \in \mathcal{H}$ έχει πολυωνυμικό ρυθμό και είναι τύπου k^+ για κάποιον ακέραιο $k \geq 0$. Τότε για κάθε $l \in \mathbb{N}$ με $l \leq k$ έχουμε $f^{(l)}(t) \sim \frac{f(t)}{t^l}$ και για κάθε $l \in \mathbb{N}$ έχουμε*

$$\frac{f(t)}{t^l (\log t)^{2(l-k)}} \prec f^{(l)}(t) \ll \frac{f(t)}{t^l}. \tag{4.11}$$

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι $f^{(l)}(t) \sim \frac{f(t)}{t^l}$ για κάθε $l \leq k$. Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά. Για $l = 1$ ισχύει από το (*i*) του Λήμματος 4.2.2. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $l < k$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για $l + 1$. Αφού $f^{(l)}(t) \sim \frac{f(t)}{t^l}$ και η f είναι τύπου k^+ με $k > l$ έχουμε $t \ll \frac{f(t)}{t^l}$. Άρα το Λήμμα 4.2.2 εφαρμόζεται και συνδυαζόμενο με την επαγωγική υπόθεση δίνει

$$f^{(l+1)}(t) = (f^{(l)}(t))' \sim \frac{f^{(l)}(t)}{t} \sim \frac{f(t)}{t^{l+1}}.$$

Οπότε το ζητούμενο αποδείχθηκε.
Δείχνουμε την (4.11). Η απόδειξη θα γίνει πάλι επαγωγικά. Για $l = 1$ ισχύει από το (*ii*) του Λήμματος 4.2.2. Υποθέτουμε ότι ισχύει για l και θα δείξουμε ότι ισχύει για $l + 1$. Εάν $l + 1 \leq k$ το ζητούμενο αποδείχθηκε πριν. Έστω $l + 1 > k$. Τότε $f^{(l)}(t) \to +\infty$ εάν $l = k$ και $f^{(l)}(t) \to 0$ εάν $l > k$. Σε κάθε περίπτωση η $f^{(l)}(t)$ δεν συγκλίνει σε μη μηδενική σταθερά. Επίσης από την επαγωγική υπόθεση

$$f^{(l)}(t) \succ \frac{f(t)}{t^l (\log t)^{2(l-k)}} \succ \frac{1}{t^{l+1}}.$$

Άρα οι υποθέσεις του Λήμματος 4.2.2 ικανοποιούνται για την $f^{(l)}(t)$ και συνδυαζόνενες με την επαγωγική υπόθεση δίνουν το ζητούμενο. $\square$

4.3 Θεώρημα ισοκατανομής ακολουθιών Hardy

Σε αυτήν την παράγραφο θα αποδείξουμε το βασικό κριτήριο ισοκατανομής ακολουθιών Hardy (Θεώρημα 4.0.2). Ξεκινάμε με δύο λήμματα που θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη. Το πρώτο είναι ένα βασικό αλλά τεχνικό λήμμα που θα αποδείξουμε στην επόμενη παράγραφο.

Λήμμα 4.3.1. *Έστω (a_N) ακολουθία πραγματικών, ώστε*

$$N^k \|ma_N\| \to +\infty$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$ όπου $\|\|$ είναι η απόσταση στον πλησιέστερο ακέραιο. Έστω (p_N) ακολουθία πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές τέτοια ώστε $\deg(p_N) < k$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i (n^k a_N + p_N(n))} = 0.$$

Το δεύτερο λήμμα είναι μία παραλλαγή του κλασσικού Λήμματος Cesaro: $a_n \to 0$ τότε και $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n \to 0$ (προκύπτει για $l(N) = 1$ από το παρακάτω λήμμα).

Λήμμα 4.3.2. *Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Υποθέτουμε οτι*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{l(N)} \sum_{n=N}^{N+l(N)} a_n = 0$$

για κάποια αύξουσα ακολουθία $l(N)$ θετικών ακεραίων με $l(N) \prec N$. Τότε

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n = 0.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να καλύψουμε το διάστημα $[1, N]$ από ξένα διαστήματα I_N της μορφής $[k, k + l(k)]$ και κάποιο συνόλο E_N με $|E_N| \leq l(N)$. Εφόσον η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη, υπάρχει σταθερά M τέτοια ώστε $|a_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\limsup_{N\to\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n \right| = \limsup_{N\to\infty} \left| \frac{|I_N|}{N} \frac{1}{|I_N|} \sum_{n\in I_N} a_n \right| + \limsup_{N\to\infty} \frac{M|E_N|}{N}$$

Αφού $\frac{l(N)}{N} \to 0$ παίρνουμε ότι $|I_N|/N \to 1$ και $|E_N|/N \to 0$. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{I_N} \sum_{n\in I_N} a_n = 0. \tag{4.12}$$

Έστω $\epsilon > 0$. Από την υπόθεση υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $N > N_0$, σε όλα τα πεπερασμένα διαστήματα που αποτελούν το σύνολο I_N οι μέσοι όροι της ακολουθίας a_n είναι κατά απόλυτη τιμή μικρότεροι από ϵ. Έτσι προκύπτει ότι για $N > N_0$ υπάρχει σταθερά $C := C(\epsilon)$ τέτοια ώστε

$$\Big|\frac{1}{I_N} \sum_{n\in I_N} a_n\Big| \le \epsilon + \frac{C}{N}.$$

Παίρνοντας $\limsup$ καθώς $N \to +\infty$, και χρησιμοποιώντας ότι το ϵ είναι αυθαίρετο, παίρνουμε την (4.12). Οπότε η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Για να διευκολύνουμε τον αναγνώστη δείχνουμε πρώτα ισοκατανομή μίας πολύ ειδικής ακολουθίας. Κατόπιν χρησιμοποιούμε τις βασικές τεχνικές αυτής της απόδειξης για να δείξουμε ένα αρκετά γενικότερο θεώρημα ισοκατανομής.

Βασικό Παράδειγμα. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(n\log n)$ είναι ισοκατανεμημένη. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $k \neq 0$ έχουμε

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k n \log n} = 0.$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.3.2 αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{l(N)} \sum_{n=N}^{N+l(N)} e^{2\pi i k n \log n} = 0$$

με $(l(N))$ αύξουσα ακολουθία ακεραίων ώστε $\lim_{N\to+\infty} \frac{l(N)}{N} = 0$. Για ευκολία υποθέτουμε ότι $k = 1$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{l(N)} \sum_{n=N}^{N+l(N)} e^{2\pi i n \log n} = 0. \tag{4.13}$$

Θεωρούμε την $f(t) = t\log t$ και κάνουμε χρήση του τύπου Taylor-Lagrange με κέντρο το $t = N$. Υπάρχουν $x_n \in [N, N + l(N)]$ τέτοια ώστε για $n = 1, \dots, l(N)$ έχουμε

$$f(n+N) = f(N) + nf'(N) + \frac{n^2}{2} f''(N) + \frac{n^3}{3!} f'''(x_n).$$

Οπότε

$$(n+N)\log(n+N) = N\log N + n(1+\log N) + \frac{n^2}{2N} - \frac{n^3}{6(x_n)^2}.$$

Εάν επιλέξουμε
$$l(N) \prec N^{\frac{2}{3}} \tag{4.14}$$
τότε έχουμε ότι
$$\max_{n=1,\ldots,l(N)} \left(\frac{n^3}{x_n^2}\right) \leq \frac{l(N)^3}{N^2} \to 0$$
καθώς το $N \to +\infty$. Για μία τέτοια επιλογή της $l(N)$ εύκολα βλέπουμε συνδυάζοντας τα προηγούμενα ότι
$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{l(N)} \sum_{n=N}^{N+l(N)} e^{2\pi i n \log n} &= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{l(N)} \sum_{n=1}^{l(N)} e^{2\pi i (n+N)\log(n+N)} \\ &= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{l(N)} \sum_{n=1}^{l(N)} e^{2\pi i \left((N\log N + n(1+\log N)) + \frac{n^2}{2N}\right)}\end{aligned}$$
υποθέτοντας προς στιγμήν ότι όλα τα όρια υπάρχουν. Από το Λήμμα 4.3.1 η παραπάνω ποσότητα συγκλίνει στο 0 καθώς $N \to +\infty$ εφόσον $\frac{(l(N))^2}{2N} \to +\infty$ δηλαδή
$$l(N) \succ N^{\frac{1}{2}}. \tag{4.15}$$
Οπότε εάν επιλέξουμε $l(N) = N^{\frac{3}{5}}$ οι σχέσεις (4.14) και (4.15) ικανοποιούνται ταυτόχρονα και παίρνουμε την (4.13). Άρα η ακολουθία $(n \log n)$ είναι ισοκατανεμημένη.

Θα χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο παράδειγμα ως οδηγό για να αποδείξουμε το παρακάτω πιο γενικό αποτέλεσμα.

Λήμμα 4.3.3. *Έστω $m \in \mathbb{N}$ και η συνάρτηση $f \in C^{m+1}(\mathbb{R}+)$ ικανοποιεί ότι η $|f^{m+1}(t)|$ είναι φθίνουσα, $\frac{1}{t^m} \prec f^{(m)}(t) \prec 1$ και $(f^{(m+1)}(t))^m \prec (f^{(m)}(t))^{m+1}$. Τότε η ακολουθία $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη.*

Απόδειξη. Για $k \neq 0$ θέλουμε να δείξουμε ότι
$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k f(n)} = 0.$$
Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $k = 1$ (η απόδειξη είναι παρόμοια στις άλλες περιπτώσεις). Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι
$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i f(n)} = 0.$$
Από το Λήμμα 4.3.2 αρκεί να δείξουμε ότι
$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{l(N)} \sum_{n=N}^{N+l(N)} e^{2\pi i f(n)} = 0$$

για κάποια αύξουσα ακολουθία $(l(N))$ θετικών αριθμών με $\lim_{N\to+\infty}\frac{l(N)}{N}=0$. Κάνουμε χρήση του τύπου Taylor-Lagrange για την $f(t)$ με κέντρο το $t=N$. Υπάρχουν $x_n\in[N,N+l(N)]$ τέτοια ώστε για $n=1,\dots,l(N)$ έχουμε

$$f(n+N)=f(N)+nf'(N)+\frac{n^2}{2}f''(N)+\cdots+\frac{n^m}{m!}f^{(m)}(N)+\frac{n^{m+1}}{(m+1)!}f^{(m+1)}(x_n).$$

Αφού $x_n\geq N$ και η $|f^{m+1}(t)|$ είναι φθίνουσα, έχουμε $|f^{(m+1)}(x_n)|\leq|f^{(m+1)}(N)|$. Συνεπώς εάν η $l(N)$ ικανοποιεί $\lim_{t\to+\infty}l(N)^{m+1}f^{(m+1)}(N)=0$ τότε

$$\lim_{N\to+\infty}\sup_{n=1,\dots,l(N)}|n^{m+1}f^{(m+1)}(x_n)|=0.$$

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα παίρνουμε

$$\lim_{N\to+\infty}\Big(\frac{1}{l(N)}\sum_{n=N}^{N+l(N)}e^{2\pi if(n)}-\frac{1}{l(N)}\sum_{n=1}^{l(N)}e^{2\pi i(f(N)+nf'(N)+\cdots+\frac{n^m}{m!}f^{(m)}(N))}\Big)=0.$$

Από το Λήμμα 4.3.1 και επειδή $f^{(m+1)}(N)\to0$ ο δεύτερος μέσος όρος συγκλίνει στο 0 καθώς το $N\to+\infty$ εφόσον $1\prec l^m(N)|f^{(m+1)}(N)|$. Από όλα τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{l(N)}\sum_{n=N}^{N+l(N)}e^{2\pi if(n)}=0$$

οτάν η ακολουθία $(l(N))$ είναι αύξουσα και ικανοποιεί τα εξής

$$l(N)\prec N \tag{4.16}$$

και

$$l(N)^{m+1}|f^{(m+1)}(N)|\prec1\prec l^m(N)|f^{(m)}(N)|. \tag{4.17}$$

Αφού από υπόθεση έχουμε ότι $(f^{(m+1)}(N))^{\frac{m}{m+1}}\prec f^{(m)}(N)$ και $\frac{1}{N^m}\prec f^{(m)}(N)$ μπορούμε να βρούμε αύξουσα ακολουθία $l(N)$ με

$$\max\Big((f^{(m+1)}(N))^{\frac{m}{m+1}},\frac{1}{N^m}\Big)\prec\frac{1}{(l(N))^m}\prec|f^{(m)}(N)|.$$

Τότε ικανοποιούνται οι (4.16), (4.17) και η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Λήμμα 4.3.4. *Έστω $f\in\mathcal{H}$ συνάρτηση με πολυωνυμικό ρυθμό που ικανοποιεί*

$$|f(t)-p(t)|\succ\log t$$

για κάθε πολυώνυμο p με πραγματικούς συντελέστες. Τότε η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 4.3.3, δηλαδή $|f^{(m+1)}(t)|$ είναι φθίνουσα,

$$\frac{1}{t^m}\prec f^{(m)}(t)\prec1,$$

και

$$(f^{(m+1)}(t))^m\prec(f^{(m)}(t))^{m+1}.$$

Οπότε η ακολουθία $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 4.2.4 η συνάρτηση έχει τύπο k ή k^+ για κάποιο θετικό ακέραιο k. Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι παραπάνω υποθέσεις για $m = k+1$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $f^{(k)}(t)$ είναι τελικά θετική (εάν όχι θεωρούμε την -$f(t)$).

Έχουμε ότι $f(t) \prec t^{k+1}$. Από το Πόρισμα 4.2.5 προκύπτει ότι

$$f^{(l)}(t) \ll \frac{f(t)}{t^l}$$

για κάθε $l \in \mathbb{N}$. Οπότε $f^{(k+1)}(t) \to 0$ και $f^{(k+2)}(t) \to 0$. Επιπλέον αφού αυτές οι συναρτήσεις είναι στοιχεία του $\mathcal{H}$ τότε συγκλίνουν μονότονα στο 0. Οπότε έχουμε ότι η $|f^{(k+1)}(t)|$ είναι φθίνουσα.

Θα δείξουμε τώρα ότι

$$f^{(k+1)}(t) \succ \frac{1}{t^{k+1}}. \tag{4.18}$$

Υποθέτουμε αρχικά ότι η f έχει τύπο k^+, δηλαδή $t^k \prec f(t) \prec t^{k+1}$ για κάποιο θετικό ακέραιο k. Από το Πόρισμα 4.2.5 έχουμε ότι

$$f^{(k+1)}(t) \succ \frac{f(t)}{t^{k+1}(\log t)^2} \gg \frac{1}{t(\log t)^2} \succ \frac{1}{t^{k+1}}$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $k \geq 1$.

Υποθέτουμε τώρα ότι η f έχει τύπο 0^+ και θα δείξουμε ότι $f'(t) \succ \frac{1}{t}$. Έστω ότι δεν ισχύει. Αφού η $f'(t)$ είναι τελικά θετίκη (αυτό ισχύει γιατί $f(t) \to +\infty$ και $f \in \mathcal{H}$) έχουμε ότι υπάρχει σταθερά C_1 τέτοια ώστε

$$0 \leq f'(t) \leq \frac{C_1}{t}.$$

Παίρνοντας ολοκληρώματα στην παραπάνω σχέση έχουμε $0 \leq f(t) \leq C_1 \log t + C_2$ για κάποια σταθερά $C_2 \in \mathbb{R}$ και καταλήγουμε σε άτοπο αφού από υπόθεση $f(t) \succ \log t$.

Τέλος υποθέτουμε ότι η $f(t)$ έχει τύπο k με $k \geq 0$. Τότε από το Λήμμα 4.2.4 έχουμε ότι $f(t) = p(t) + g(t)$ με p πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές βαθμού k και $g \in \mathcal{H}$ τύπου l^+ για κάποιο θετικό ακέραιο l με $l < k$. Επιχειρηματολογώντας όπως πριν συμπεραίνουμε ότι $g^{(k+1)}(t) \succ \frac{1}{t^{k+1}}$. Αφού $p^{(k+1)}(t) = 0$ έχουμε $f^{(k+1)}(t) = g^{(k+1)}(t)$ και επομένως $f^{(k+1)}(t) \succ \frac{1}{t^{k+1}}$. Ολοκληρώσαμε την απόδειξη της (4.18).

Μένει να δείξουμε ότι

$$(f^{(k+2)}(t))^{k+1} \prec (f^{(k+1)}(t))^{k+2}.$$

Άπο το Λήμμα 4.2.2 έχουμε ότι $f^{(k+2)}(t) \ll \frac{f^{(k+1)}(t)}{t}$ και επίσης δείξαμε πρίν ότι $f^{(k+1)}(t) \succ \frac{1}{t^{k+1}}$. Άρα

$$(f^{(k+2)}(t))^{k+1} \ll \frac{(f^{(k+1)}(t))^{k+1}}{t^{k+1}} \prec (f^{(k+1)}(t))^{k+2}.$$

Οπότε ικανοποιούνται οι προυποθέσεις του Λήμματος 4.3.3 και επομένως η ακολουθία $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη. □

Το προηγούμενο λήμμα δείχνει ότι οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.0.2 είναι ικανές για ισοκατανομή εκτός από μία περίπτωση που η συνάρτηση βρίσκεται λογαριθμικά κοντά σε κάποιο πολυώνυμο με τουλάχιστον ένα μη σταθερό συντελεστή άρρητο. Αυτή η περίπτωση μπορεί εύκολα να αντιμετωπιστεί χρησιμοποιώντας το παρακάτω κλασσικό αποτελέσμα. Η απόδειξη του βασίζεται σε μία παραλλαγή του Λήμματος van der Corput (Λήμμα 3.2.1) και δεν θα την δώσουμε.

Λήμμα 4.3.5. *Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $p(t) = a_k t^k + \cdots + a_1 t + a_0$ πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Υποθέτουμε ότι a_i άρρητος για κάποιο $i \in \{1, \ldots, k\}$. Τότε για κάθε ακολουθία διαστημάτων φυσικών αριθμών (I_m), $m \in \mathbb{N}$, με $|I_m| \to +\infty$ καθώς $m \to +\infty$ έχουμε*

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{|I_m|} \sum_{m\in I_m} e^{2\pi i k p(n)} = 0.$$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε το βασικό θεώρημα αυτής της παραγράφου.

Απόδειξη Θεωρήματος 4.0.2. Δείχνουμε πρώτα ότι η συνθήκη είναι ικανή. Από το Λήμμα 4.3.4 γνωρίζουμε ότι αν η $f \in \mathcal{H}$ έχει πολυωνυμικό ρυθμό και ικανοποιεί

$$|f(t) - p(t)| \succ \log t$$

για κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές, τότε είναι ισοκατανεμημένη. Άρα μένει να δείξουμε ότι η $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη όταν $f(t) = p(t) + e(t)$ για κάποιο πολυώνυμο $p(t)$ με πραγματικούς συντελεστές όπου έχει τουλάχιστον έναν άρρητο μη σταθερό συντελεστή και $e(t) \ll \log t$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στην $e(t)$ στο διάστημα $[n, n+1]$ και παίρνουμε ότι

$$e(n+1) - e(n) = e'(x_n) \tag{4.19}$$

για κάποιο $x_n \in [n, n+1]$. Όμως αφού $e(t) \ll \log t$ παίρνουμε ότι $\lim_{t\to+\infty} e'(t) = 0$. Συνδυάζοντας αυτό με την (4.19) έχουμε $e(n+1) - e(n) \to 0$. Από αυτό προκύπτει ότι μπορούμε να διαμερίσουμε το $\mathbb{N}$ σε ξένα διαστήματα (I_m), $m \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $|I_m| \to +\infty$ καθώς $m \to +\infty$ και

$$\max_{n_1, n_2 \in I_m} |e(n_1) - e(n_2)| \leq \frac{1}{m}. \tag{4.20}$$

Επίσης αφού $p(t)$ πολυώνυμο με τουλάχιστον ένα άρρητο μη σταθερό συντελεστή έχουμε από το Λήμμα 4.3.5 ότι

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{|I_m|} \sum_{m\in I_m} e^{2\pi i k p(n)} = 0 \tag{4.21}$$

για κάθε $k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Αφού $f(n) = p(n) + e(n)$, συνδυάζοντας τις (4.20), (4.21) εύκολα παίρνουμε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k f(n)} = 0$$

για κάθε $k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Άρα η ακολουθία $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη.

Παιρνάμε στην αναγκαιότητα των συνθηκών. Υποθέτουμε για διευκόλυνση ότι $1 \prec f(t) \ll \log t$. Η γενική περίπτωση είναι παρόμοια. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(f(n))$ δεν είναι ισοκατανεμημένη. Επιχειρηματολογώντας όπως πριν έχουμε ότι $f(n+1) - f(n) \ll \frac{1}{n}$. Για διευκόλυνση υποθέτουμε ότι

$$f(n+1) - f(n) < \frac{1}{n} \tag{4.22}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι η ακολουθία $(f(n))$ είναι αύξουσα. Έστω ότι η ακολουθία $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη, θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έστω n_m ο πρώτος ακέραιος που ικανοποιεί $f(n_m) > m$ (υπάρχει τέτοιος αφού $f(n) \to +\infty$). Χρησιμοποιώντας ότι η $(f(n))$ είναι αύξουσα και την (4.22) για $n \in [n_m, \frac{3n_m}{2}]$ προκύπτει ότι

$$f(n_m) \leq f(n) \leq f(n_m) + \frac{n - n_m}{n_m}. \tag{4.23}$$

Επίσης, αφού το $f(n_m)$ είναι πολύ κοντά σε ακέραιο για μεγάλα m, συμπεραίνουμε από την (4.23) ότι για κάθε $\epsilon > 0$, για αρκετά μεγάλα m, και για κάθε $n \in [n_m, \frac{3n_m}{2}]$ έχουμε $\{f(n)\} \leq \frac{1}{2} + \epsilon$. Λόγω ισοκατανομής για μεγάλα m οι μισοί ακέραιοι στο διάστημα $[1, n_m]$ ικανοποιούν $\{f(n)\} \leq \frac{1}{2}$. Άρα τουλάχιστον τα $\frac{2}{3}$ (οι μισοί από το $[1, n_m]$ και οι όλοι από το $[n_m, \frac{3n_m}{2}]$) των ακεραίων στο διάστημα $[1, \frac{3n_m}{2}]$ ικανοποιούν $\{f(n)\} < \frac{1}{2} + \epsilon$. Αυτό είναι άτοπο γιατί η ακολουθία $(f(n))$ είναι ισοκατανεμημένη. □

4.4 Απόδειξη Λήμματος 4.3.1

Σε αυτήν την τελευταία παράγραφο θα αποδείξουμε το Λήμμα 4.3.1 ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του Θεωρήματος 4.0.2.

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας την απόδειξη του Λήμματος 4.3.1 για γραμμικά πολυώνυμα. Η περίπτωση αυτή είναι άμεση συνέπεια του επόμενου λήμματος:

Λήμμα 4.4.1. *Έστω $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ με $0 < \delta < 1$ και υποθέτουμε ότι*

$$\Big| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i n \alpha} \Big| \geq \delta.$$

Τότε

$$||\alpha|| \ll \delta^{-1}/N.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha \notin \mathbb{Z}$, το αποτέλεσμα είναι προφανές διαφορετικά. Αθροίζοντας την γεωμετρική σειρά βρίσκουμε

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i n\alpha}\Big| \leq \frac{1}{N}\frac{2}{|1-e^{2\pi i\alpha}|} \ll \frac{1}{N||\alpha||}.$$

Έτσι προκύπτει το αποτέλεσμα. □

Το επόμενο λήμμα είναι πολύ σημαντικό για το μετέπειτα επιχειρημά μας.

Λήμμα 4.4.2. *Έστω $\alpha, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$ με $0 < \epsilon < 1/100$, $100\epsilon < \delta \leq 1$, και $N \in \mathbb{N}$ με $N > 100/\delta$. Υποθέτουμε ότι $||n\alpha|| \leq \epsilon$ για τουλάχιστον δN τιμές του $n \in \{1,\ldots,N\}$. Τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $k \leq 2\delta^{-1}$ τέτοιο ώστε $||k\alpha|| \leq (4\epsilon\delta^{-2})/N$.*

Απόδειξη. Η υπόθεση μας δίνει ότι υπάρχουν ακέραιοι $n_1, n_2 \in \{1,\ldots,N\}$ με $|n_1 - n_2| \leq 2/\delta$ τέτοιοι ώστε $||n_1\alpha||, ||n_2\alpha|| \leq \epsilon$. Επιλέγοντας $k = |n_1 - n_2|$ έχουμε $0 < k < \frac{2}{\delta}$ και

$$||k\alpha|| \leq 2\epsilon.$$

Εάν $||k\alpha|| = 0$ η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Έστω ότι $||k\alpha|| \neq 0$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι το N είναι πολλαπλάσιο του k, η απόδειξη είναι παρόμοια στην γενική περίπτωση. Για $N \geq 100/\delta$, έχουμε $N/k \geq 50$. Μπορούμε να διαμερίσουμε τους ακέραιους $\{1,\ldots,N\}$ σε k αριθμητικές προόδους

$$\{nk + r : 1 \leq n \leq N/k\}$$

με $r \in \{0,\ldots,k-1\}$. Από την υποθέση υπάρχει ένα $r \in \{0,\ldots,k-1\}$ για το οποίο το σύνολο

$$\{1 \leq n \leq N/k \colon ||\alpha(nk + r)|| \leq \epsilon\}$$

έχει πληθάριθμο τουλάχιστον $\delta N/k$. Αφού $||k\alpha|| \leq 2\epsilon \leq 0.02$, παρατηρούμε ότι το σύνολο αποτελείται από διαστήματα μήκους το πολύ $2\epsilon/||k\alpha||$, ακολουθούμενα από κενά μήκους τουλάχιστον $0.9/||q\alpha||$. Δεδομένου ότι τα κενά είναι τουλάχιστον $0.45/\epsilon$ φορές τόσο μεγάλα όσο τα διαστήματα, βλέπουμε ότι εάν δύο η περισσότερα από αυτά τα διαστήματα εμφανίζονται στο σύνολο, τότε ο πληθάριθμος του συνόλου είναι το πολύ $\frac{\epsilon}{0.45}\frac{N}{k} < \delta\frac{N}{k}$, και καταλήγουμε σε αντίφαση. Έτσι το πολύ ένα διάστημα εμφανίζεται στο σύνολο και συνεπάγεται ότι

$$2\epsilon/||k\alpha|| \geq \delta N/k.$$

Για $k \leq 2/\delta$ έχουμε τον ισχυρισμό. □

Το επόμενο είναι μία ποσοτική παραλλαγή του λήμματος van der Corput και θα το χρησιμοποιήσουμε παρακάτω.

Λήμμα 4.4.3. *Έστω $\delta \in \mathbb{R}$ με $0 < \delta < 1$ και $N \in \mathbb{N}$ με $N \geq 256/\delta^4$. Έστω (x_n), $n = 1, \ldots, N$, είναι μιγαδικοί αριθμοί με $|x_n| \leq 1$. Τότε υπάρχουν σταθερές $C_1(\delta)$, $C_2(\delta)$ τέτοιες ώστε αν*

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n\Big| \geq \delta,$$

τότε για τουλάχιστον $C_1(\delta)N$ τιμές των $m \in \{1, \ldots, N\}$ έχουμε

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_{n+m} \cdot \overline{x_n}\Big| \geq C_2(\delta).$$

Επιπλέον, μπορούμε να πάρουμε $C_1(\delta) = \frac{\delta^4}{256}$ και $C_2(\delta) = \frac{\delta^2}{16}$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.1 [10] για κάθε $M \leq N$ έχουμε

$$\delta^2 \leq \Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n\Big|^2 \leq \frac{4}{M}\sum_{m=1}^{M}\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_{n+m} \cdot \overline{x_n}\Big| + \frac{4}{M} + \frac{4M}{N}.$$

Επιλέγοντας $N \geq 256/\delta^4$ και $M = [\delta^2 N/16] + 1$, έχουμε ότι

$$\frac{4}{M} + \frac{4M}{N} \leq \frac{\delta^2}{2}.$$

Έστω ότι το A είναι το σύνολο εκείνων των $m \in \{1, \ldots, M\}$ τέτοια ώστε $\big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_{n+m} \cdot \overline{x_n}\big| \geq \delta^2/16$. Συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\delta^2}{2} \leq 4\Big(\frac{|A|}{M} + \frac{\delta^2}{16}\Big) \Rightarrow |A| \geq \frac{\delta^2}{16}M \geq \frac{\delta^4}{256}N.$$

Η απόδειξη ολοκληρωθήκε. □

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα τρία λήμματα θα δείξουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

Λήμμα 4.4.4. *Έστω p είναι πολυώνυμο με πραγματικούς συντέλεστες, βαθμού $d \geq 1$, με μεγιστοβαθμίο συντελεστή α. Υποθέτουμε ότι*

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i p(n)}\Big| \geq \delta$$

για κάποιο $\delta \in \mathbb{R}$ με $0 < \delta < 1/2$, και N είναι αρκετά μεγάλο ανάλογα με το δ. Τότε υπάρχουν σταθερές $C_1 := C_1(d, \delta)$, $C_2 := C_2(d, \delta)$, και $k \in \mathbb{Z}$ με $|k| \leq C_1$, τέτοιες ώστε

$$||k\alpha|| \ll C_2/N^d.$$

Επιπλέον, μπορούμε να πάρουμε $C_1(d, \delta) = d!\delta^{-4(d-1)}$ και $C_2(d, \delta) = \delta^{-(8d-7)}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο d. Για $d = 1$ το αποτέλεσμα ικανοποιείται από το Λήμμα 4.4.1 με $C_1(1, \delta) = 1$ $C_2(1, \delta) = \delta$. Υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για $d-1 \geq 1$, και θα δείξουμε ότι ισχύει για d. Υποθέτοντας ότι το N είναι αρκετά μεγάλο, και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.4.3 συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $\gg \delta^4 N$ τιμές των $m \in \{1, \ldots, N\}$ τέτοιες ώστε

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i(p(n+m)-p(n))}\Big| \gg \delta^2.$$

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ το πολυώνυμο $p(n+m)-p(n)$ έχει βαθμό $d-1$ και μεγιστοβάθμιο συντελεστή $md\alpha$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχουν σταθερές $C_1 := C_1(d-1, \delta)$, $C_2 := C_2(d-1, \delta)$ ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα: Για $\gg \delta^4 N$ τιμές των $m \in \{1, \ldots, N\}$ υπάρχουν $k_m \in \mathbb{Z}$ με $|k_m| \leq C_1$, ώστε

$$||mk_m d\alpha|| \ll C_2/N^{d-1}.$$

Οπότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $k \leq C_1 d$ τέτοιο ώστε

$$||mk\alpha|| \ll C_2/N^{d-1}$$

για $\gg \delta^4 N$ τιμές των $m \in \{1, \ldots, N\}$. Από το Λήμμα 4.4.2 έπεται ότι υπάρχει $k' \in \mathbb{N}$ με $k' \ll \delta^{-4}$ και

$$||k'k\alpha|| \ll C_2\delta^{-8}/N^d.$$

Επίσης, μπορούμε να πάρουμε $C_1(d, \delta) = C_1(d-1, \delta)d\delta^{-4}$ και $C_2(d, \delta) = C_2(d-1, \delta)\delta^{-8}$. Χρησιμοποιώντας ότι $C_1(1, \delta) = 1$, $C_2(1, \delta) = \delta$, συμπεραίνουμε ότι $C_1(d, \delta) = d!\delta^{-4(d-1)}$ και $C_2(d, \delta) = \delta^{-(8d-7)}$. □

Τώρα είναι εύκολο να αποδείξουμε το Λήμμα 4.3.1.

Απόδειξη Λήμματος 4.3.1. Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ και ακολουθία (N_l) με $N_l \to \infty$ τέτοιο ώστε

$$\Big|\frac{1}{N_l}\sum_{n=1}^{N_l} e^{2\pi i(n^k a_N + p_N(n))}\Big| \geq \delta$$

για κάθε $l \in \mathbb{N}$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω με το Λήμμα 4.4.4 παίρνουμε ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε για άπειρα $l \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$N_l^k ||m\alpha_{N_l}|| \ll 1.$$

Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υποθεσή μας $N^k\|ma_N\| \to +\infty$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε □

Βιβλιογραφία

[1] M. Boshernitzan. Uniform distribution and Hardy fields. *J. Anal. Math.* **62** (1994), 225–240.

[2] M. Boshernitzan, G. Kolesnik, A. Quas, M. Wierdl. Ergodic averaging sequences. *J. Anal. Math.* **95** (2005), 63–103.

[3] V. Bergelson. Weakly mixing PET. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **7** (1987), no. 3, 337–349.

[4] N. Bourbaki. Fonctions d'une variable réele. Chapitre V (Étude Locale des Fonctions), 2nd edition, Hermann, Parris, (1961).

[5] N. Frantzikinakis. Equidistribution of sparse sequences on nilmanifolds. *J. Analyse Math.* **109** (2009), 1–43.

[6] G. Hardy. Properties of logarithmico-exponential functions. *Proc. London Math. Soc. 2* **10** (1912), 54-90.

[7] G. Hardy. Orders of Infinity. *Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys.* **12** (2nd edition), Cambridge, (1924).

[8] G.Hardy. Divergent Series. Oxford Univ. Press, London, (1949).

[9] T. Kamae, M. Mendès-France. Van der Corput's difference theorem. *Isr. J. Math.* **31** (1978), 335–342.

[10] L. Kuipers, H. Niederreiter. Uniform distribution of sequences. Pure and Applied Mathematics. *Wiley-Interscience*, New York-London-Sydney, (1974).

[11] J. van der Corput. Zahlentheoretische Abschätzungen. *Math. Ann.* **84** (1921), no. 1-2, 53–79.

[12] H.Weyl. Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 330 (1910), 377–407.

[13] H. Weyl. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins. *Math. Ann.* **77** (1916), 313–352.