Διαφορισιμότητα στον $\mathbb{R}^n$

Χρήστος Χατζηφούντας

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Τότε ορίζουμε την μέση τιμή της στο διάστημα $[x - r, x + r]$ να είναι η ποσότητα

$$A_r f(x) = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(y)\, dy.$$

Αφού η f είναι συνεχής, γνωρίζουμε ότι η $A_r f(x)$ είναι μια καλή προσέγγιση της $f(x)$ για πολύ μικρά $r > 0$, δηλαδή

$$\lim_{r \to 0^+} A_r f(x) = f(x) \; \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Η ιδιότητα αυτή των συνεχών συναρτήσεων ισχύει και σε ανώτερες διαστάσεις. Αν έχουμε μια $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τότε κατ'αντιστοιχία με την μια διάσταση θέτουμε

$$A_r f(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy,$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει το διάστημα $[x - r, x + r] \subset \mathbb{R}$ με την μπάλα $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ κέντρου x και ακτίνας r, και το μήκος του διαστήματος με το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}^n$, το οποίο συμβολίζεται με $| \cdot |$. Ισχύει όπως και στο $\mathbb{R}$ ότι

$$\lim_{r \to 0^+} A_r(x) = f(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη

Έστω τυχόν $\epsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα r με $0 < r < \delta$ να ισχύει

$$\forall\, y \in B(x, r) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Επομένως για κάθε τέτοιο $r > 0$

$$|A_f(x) - f(x)| \leq \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(x) - f(y)|\, dy \leq \epsilon.$$

$\square$

Η υπόθεση της συνέχειας της f είναι απαραίτητη. Πράγματι αν θέσουμε

$$A = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$$

και $f(x) = \mathcal{X}_A(x)$ τότε για κάθε x στο σύνορο του A έχουμε

$$A_r f(x) = \frac{|A \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 1 = f(x).$$

Παρατηρούμε ότι το σύνορο, δηλαδή εκεί ακριβώς όπου η $A_r f$ αποτυγχάνει να συγκλίνει στην f, έχει μέτρο 0. Αυτό μας δίνει το έναυσμα να αναρωτηθούμε σε τί βαθμό η μέση τιμή μπορεί να προσεγγίσει «αυθαίρετες» (όχι κατ'ανάγκη συνεχείς) συναρτήσεις. Στο προηγούμενο παράδειγμα, το σύνολο των προβληματικών σημείων είναι μέτρου μηδέν. Μήπως λοιπόν, γενικότερα, η μέση τιμή λειτουργεί καλά για σχεδόν όλα τα x; Αν η απάντηση είναι «ναι», μήπως απλά αρκεί η συνάρτηση να είναι ολοκληρώσιμη πάνω σε κάθε μπάλα ($f \in L^1_{loc}$); Αυτή είναι η ελάχιστη απαίτηση που μπορούμε να έχουμε από μια συνάρτηση για να ορίζεται η μέση τιμή της. Η έρευνα πάνω σε αυτά τα ερωτήματα - τα οποία όπως θα δούμε λαμβάνουν καταφατικές απαντήσεις - θα είναι και ένας από του στόχους στο υπόλοιπο αυτής της διπλωματικής εργασίας. Θα ξεκινήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο με μια προσεκτική μελέτη των ποικίλων εκφράσεων της μέσης τιμής και ειδικότερα του τελεστή

$$M : L^1_{loc} \to \mathbb{R} \,, Mf = \sup_{r>0} A_r|f|.$$

Ο τελεστής αυτός ονομάζεται μεγιστική συνάρτηση των Hardy & Littlewood. Στο κεφάλαιο 2 θα δείξουμε πως δρα πάνω σε ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, αποδεικνύοντας την θεμελιώδη ιδιότητά του, την λεγόμενη *weak type* ανισότητα. Στο κεφάλαιο 3 θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα αυτή για δείξουμε ότι η προσέγγιση από την μέση τιμή είναι εφικτή (θεώρημα διαφορισιμότητας του Lebesgue). Στο τελευταίο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε διάφορες ιδιότητες της μεγιστικής συνάρτηση οι οποίες έχουν ανεξάρτητο ενδιαφέρον.

Κεφάλαιο 1

Η μεγιστική συνάρτηση των Hardy & Littlewood

Η μεγιστική συνάρτηση των Hardy & Littlewood είναι ένας υπογραμμικός τελεστής στον χώρο των τοπικά Lebesgue ολοκληρώσιμων πραγματικών συναρτήσεων. Δίνεται από τον τύπο:

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} |f(x-y)|\, dy,$$

όπου $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Στην πορεία θα χρειαστούμε δύο ακόμα βοηθητικές συναρτήσεις με παρόμοιες εκφράσεις. Την μεγιστική συνάρτηση πάνω σε κύβους:

$$M'f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{(2r)^n} \int_{Q_r} |f(x-y)|\, dy,$$

όπου με Q_r συμβολίζουμε τους κύβους της μορφής $[-r,r]^n$, και την δυαδική μεγιστική συνάρτηση η οποία ορίζεται ως εξής. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έστω $\mathcal{Q}_k$ το σύνολο όλων των k-δυαδικών κύβων, δηλαδή

$$\mathcal{Q}_k = \left\{ \prod_{i=1}^n \left[\frac{j_i}{2^k}, \frac{j_i+1}{2^k} \right) : j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

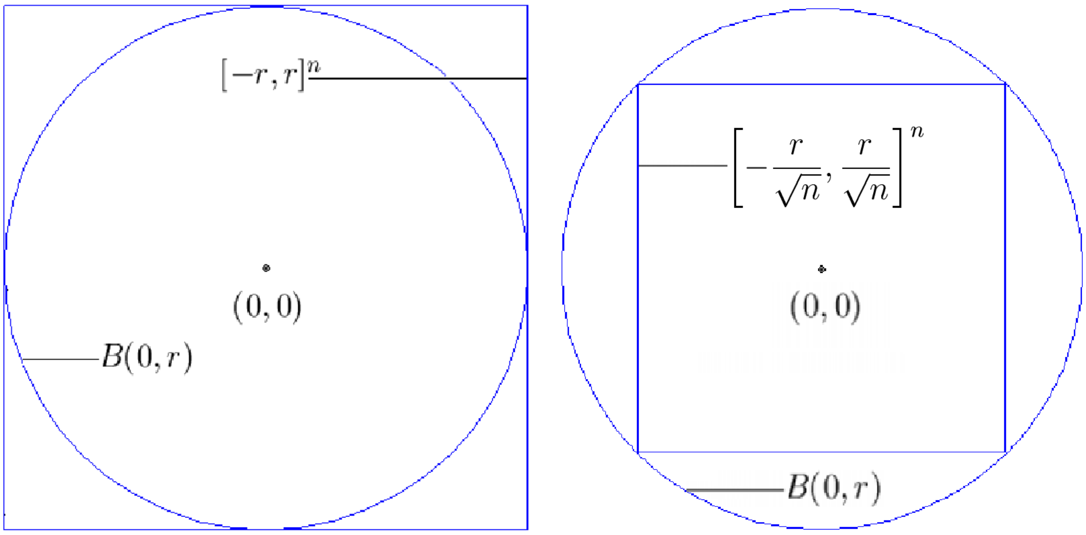
Θέτουμε

$$E_k f(x) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f \right) \mathcal{X}_Q(x)$$

και ορίζουμε τη δυαδική μεγιστική συνάρτηση να είναι

$$M_d f(x) = \sup_k |E_k f(x)|.$$

Παρατηρούμε ότι οι Mf και $M'f$ είναι κατά σημείο συγκρίσιμες. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.



(α') $B(r,0) \subset [-r,r]^n$ (β') $B(r,0) \supset [-r/\sqrt{n}, r/\sqrt{n}]^n$

Σχήμα 1.1: Συγκρισιμότητα μπάλας - κύβου

Πρόταση 1.1 *Υπάρχουν θετικές σταθερές c_n, C_n, οι οποίες εξαρτώνται μόνο από τη διάσταση n, έτσι ώστε*

$$Mf \leq c_n M'f \text{ και } M'f \leq C_n Mf.$$

Απόδειξη

Έστω $r > 0$ τότε $B(0,r) \subset [-r,r]^n = Q_r$ (σχήμα 1.1(α')). Αφού η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι θετική το ολοκλήρωμα θα είναι μεγαλύτερο στο μεγαλύτερο χωρίο:

$$\int_{B(0,r)} |f(x-y)|\, dy \leq \int_{[-r,r]^n} |f(x-y)|\, dy.$$

Επομένως, αν v_n είναι ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας, τότε έχουμε

$$\frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0,r)} |f(x-y)|\, dy = \frac{2^n}{v_n}\frac{1}{|Q_r|}\int_{B(0,r)} |f(x-y)|\, dy \leq \frac{2^n}{v_n}\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r} |f(x-y)|\, dy.$$

Συνεπώς

$$Mf(x) \leq \frac{2^n}{v_n} M'f(x).$$

Από το σχήμα 1.1(β') παρατηρούμε επίσης ότι $B(0,r) \supset [-r/\sqrt{n}, r/\sqrt{n}]^n = Q_{r/\sqrt{n}}$. Επομένως, όπως πριν, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q_{r/\sqrt{n}}|}\int_{Q_{r/\sqrt{n}}} |f(x-y)|\, dy &= v_n \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n \frac{1}{|B(0,r)|}\int_{Q_{r/\sqrt{n}}} |f(x-y)|\, dy \\ &\leq v_n \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n \frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0,r)} |f(x-y)|\, dy. \end{aligned}$$

Άρα

$$M'f(x) \leq v_n \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n Mf(x).$$

□

Θα δούμε τώρα κάποιες στοιχειώδεις ιδιότητες της μεγιστικής συνάρτησης.

Πρόταση 1.2 *Η Mf είναι μετρήσιμη για κάθε f τοπικά ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι το σύνολο $A_\lambda = \{x : Mf(x) > \lambda\}$ είναι μετρήσιμο για τυχόντα πραγματικό αριθμό λ. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι $x \in A_\lambda$ τότε

$$\sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} |f(x-y)|\, dy > \lambda.$$

Άρα υπάρχει $r_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{|B(0,r_0)|} \int_{B(0,r_0)} |f(x-y)|\, dy > \lambda.$$

Με αλλαγή μεταβλητής έχουμε

$$\frac{1}{|B(x,r_0)|} \int_{B(x,r_0)} |f(y)|\, dy > \lambda.$$

Επιλέγουμε $\epsilon > 0$ έτσι ώστε

$$\frac{1}{|B(x,r_0+\epsilon)|} \int_{B(x,r_0)} |f(y)|\, dy > \lambda.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x' \in B(x,\epsilon)$ έχουμε $B(x', r_0+\epsilon) \supset B(x, r_0)$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.2. Άρα

$$Mf(x') \geq \frac{1}{|B(x',r_0+\epsilon)|} \int_{B(x',r_0+\epsilon)} |f(y)|\, dy > \frac{1}{|B(x,r_0+\epsilon)|} \int_{B(x,r_0)} |f(y)|\, dy > \lambda$$

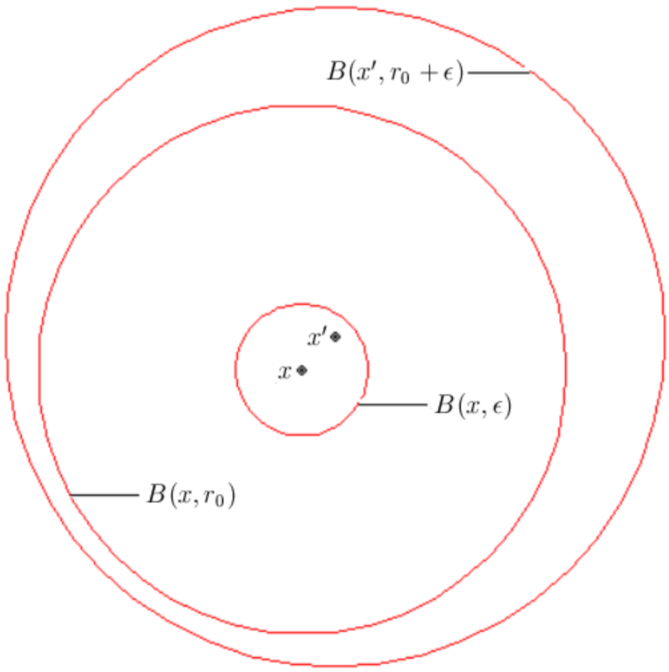
Τελικά συμπεραίνουμε ότι $B(x,\epsilon) \subset A_\lambda$ και ότι το A_λ είναι ανοιχτό, άρα μετρήσιμο. □

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η $M'f$ είναι μετρήσιμη. Η μετρησιμότητα της $M_d f$ είναι άμεση συνέπεια της μετρησιμότητας των $E_k f$. Παρολαυτά, σε ότι αφορά την ολοκληρωσιμότητα, η M αποτυγχάνει. Πράγματι αν η f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν τότε υπάρχουν $R > 0$ και $\epsilon > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$\int_{B(0,R)} |f| \geq \epsilon.$$

Τώρα για κάθε x με $|x| > R$ έχουμε $B(0,R) \subset B(x, 2|x|)$. Άρα

$$Mf(x) \geq \frac{1}{|B(x,2|x|)|} \int_{B(x,2|x|)} |f| \geq \frac{1}{2^n v_n |x|^n} \int_{B(0,R)} |f| \geq \frac{\epsilon}{2^n v_n |x|^n}.$$



Σχήμα 1.2: $B(x, r_0) \subset B(x', r_0 + \epsilon)$

Επομένως
$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf \geq \int_{|x|>R} Mf(x)dx \geq \frac{\epsilon}{2^n v_n} \int_{|x|>R} \frac{dx}{|x|^n} = +\infty.$$
Δηλαδή, η Mf δεν είναι ποτέ στον L^1, εκτός και αν η f είναι ταυτοτικά μηδέν.

Κεφάλαιο 2

Η weak type ανισότητα

Όπως είδαμε το αποτέλεσμα της δράσης της μεγιστικής συνάρτησης πάνω στον L^1 δεν είναι ποτέ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Έχουμε όμως μια λίγο ασθενέστερη ιδιότητα, τη λεγόμενη weak (1,1) ανισότητα.

Ορισμός 2.1 *Έστω $(\mathbb{X}, \mu)$, $(\mathbb{Y}, \nu)$ δύο χώροι μέτρου και T ένας τελεστής από τον $L^p(\mathbb{X}, \mu)$ στον χώρο των μετρήσιμων συναρτήσεων από τον $\mathbb{Y}$ στο $\mathbb{R}$. Θα λέμε ότι ο T είναι weak (p, q) , $1 \leq p, q < \infty$, αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει*

$$\nu(\{y \in \mathbb{Y} : |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C||f||_p}{\lambda} \right)^q,$$

για κάθε $\lambda > 0$.

Όταν οι δύο χώροι $(\mathbb{X}, \mu)$, $(\mathbb{Y}, \nu)$ ταυτίζονται και $p = q$ η weak ανισότητα είναι η γνωστή ανισότητα του *Chebychev*. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η M_d είναι weak (1,1) .

Θεώρημα 2.1 *Η M_d είναι weak (1,1).*

Απόδειξη

Έστω $f \in L^1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f \geq 0$. Για $\lambda > 0$, ορίζουμε τα σύνολα

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\},$$

και

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : E_k f(x) > \lambda \text{ και } E_j f(x) \leq \lambda \text{ αν } j < k\},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Αν $k_1 \neq k_2$ τότε τα σύνολα Ω_{k_2} και Ω_{k_2} είναι ξένα μεταξύ τους. Πράγματι, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $k_1 > k_2$. Τότε αν $x \in \Omega_{k_1}$ έχουμε

$$E_{k_2} f(x) < \lambda \Rightarrow x \notin \Omega_{k_2}.$$

Όμοια αν $x \in \Omega_{k_2}$ τότε

$$E_{k_1} f(x) > \lambda \Rightarrow x \notin \Omega_{k_1}$$

και τελικά $\Omega_{k_1} \cap \Omega_{k_2} = \emptyset$. Παρατηρούμε ότι κάθε Ω_k μπορεί να γραφτεί σαν ένωση k-δυαδικών κύβων, και ότι

$$\Omega = \bigcup_k \Omega_k.$$

Πράγματι, η σχέση

$$\bigcup_k \Omega_k \subset \Omega$$

είναι προφανής. Αντίστροφα, αν $x \in \Omega$, τότε υπάρχει μια ακολουθία δυαδικών κύβων $Q_k^x \in \mathcal{Q}_k$ τέτοια ώστε $x \in Q_k^x$. Προφανώς

$$E_k f(x) = \frac{1}{|Q_k^x|} \int_{Q_k^x} f.$$

Εφόσον τώρα $M_d f(x) > \lambda$, το σύνολο

$$I = \{k \in \mathbb{Z} : E_k f(x) > \lambda\}$$

είναι μη κενό. Εφόσον $f \in L^1$, έχουμε ότι

$$\lim_{k \to -\infty} \frac{1}{|Q_k^x|} \int_{Q_k^x} f = 0,$$

άρα το I είναι κάτω φραγμένο. Θέτουμε $k(x) = \min I$. Τότε $x \in \Omega_{k(x)}$. Επομένως

$$\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}| = |\Omega| = \left|\bigcup_k \Omega_k\right| &= \sum_k |\Omega_k| \leq \sum_k \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_k} E_k f \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_k \int_{\Omega_k} \left[\sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} \frac{1}{|Q|} \left(\int_Q f \right) \mathcal{X}_Q \right] \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_k \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} \left(\int_Q f \right) \frac{|Q \cap \Omega_k|}{|Q|} \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_k \sum_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_k \\ Q \subset \Omega_k}} \int_Q f = \frac{1}{\lambda} \sum_k \int_{\Omega_k} f = \frac{1}{\lambda} \int_{\bigcup_k \Omega_k} f \leq \frac{1}{\lambda} ||f||_1
\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση είναι η weak (1,1) ανισότητα με $C = 1$. $\square$

Η weak (1,1) ανισότητα για την μεγιστική συνάρτηση είναι αμεση συνέπεια της weak (1,1) ανισότητας για την δυαδική, που μόλις αποδείξαμε, και του παρακάτω λήμματος.

Λήμμα 2.1 *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M'f(x) > 4^n\lambda\}| \leq 2^n|\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}|$$

Απόδειξη

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι μη αρνητική. Με το συμβολισμό της προηγούμενης απόδειξης έχουμε

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\} = \bigcup_k \Omega_k = \bigcup_j Q_j,$$

όπου οι Q_j είναι δυαδικοί κύβοι. Για τον τυχόντα Q_j θεωρούμε τον αντίστοιχο κύβο με το ίδιο κέντρο και διπλάσιο μήκος πλευράς, τον οποίο συμβολίζουμε με $2Q_j$. Σταθεροποιούμε τώρα ένα $x_0 \notin \bigcup_j 2Q_j$. Αν ο Q είναι ένας κύβος με κέντρο το x_0 και μήκος πλευράς $l(Q)$ τότε υπάρχει κάποιος ακέραιος k τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{2^{k+1}} \leq l(Q) < \frac{1}{2^k}.$$

Αφού το μήκος πλευράς του Q είναι το πολύ 2^{-k}, τέμνει το πολύ 2^n το πλήθος k-δυαδικούς κύβους τους οποίους θα συμβολίσουμε με $R_1, R_2, \ldots, R_m$. Αν οποιοσδήποτε από αυτούς τους κύβους περιεχόταν σε κάποιο Q_j θα είχαμε ότι

$$\bigcup_i R_i \subset \bigcup_j 2Q_j \Rightarrow x_0 \in \bigcup_j 2Q_j,$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση. Αφού δυο δυαδικοί κύβοι είτε είναι ξένοι, είτε περιέχεται ο ένας στον άλλον, συμπεραίνουμε ότι $R_i \cap Q_j = \varnothing$ για κάθε i, j. Άρα

$$\frac{1}{|R_i|}\int_{R_i} f \leq \lambda,$$

για κάθε i. Συνεπώς

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q f = \frac{1}{|Q|}\sum_{i=1}^m \int_{Q\cap R_i} f &\leq \sum_{i=1}^m \frac{|R_i|}{|Q|}\frac{1}{|R_i|}\int_{R_i} f \\ &\leq 2^n \sum_{i=1}^m \frac{1}{|R_i|}\int_{R_i} f \leq 2^n m\lambda \leq 4^n\lambda,\end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την εκτίμηση

$$\frac{|R_i|}{|Q|} = \frac{2^{-kn}}{l(Q)^n} \leq \frac{2^{-kn}}{2^{-(k+1)n}} = 2^n.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$M'f(x_0) \le 4^n\lambda$$

Άρα

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M'f(x) > 4^n\lambda\} \subset \bigcup_j 2Q_j.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}|\{x \in \mathbb{R}^n : M'f(x) > 4^n\lambda\}| &\le \left|\bigcup_j 2Q_j\right| \le \sum_j |2Q_j| = 2^n \sum_j |Q_j| \\ &= 2^n \left|\bigcup_j Q_j\right| = 2^n |\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}|\end{aligned}$$

□

Τώρα έχουμε τα απαραίτητα εργαλεία για την Hardy & Littlewood weak (1,1) ανισότητα.

Πόρισμα 2.1 *Η μεγιστική συνάρτηση των Hardy & Littlewood είναι weak (1,1).*

Απόδειξη

Από το προηγούμενο κεφάλαιο γνωρίζουμε ότι

$$Mf \le \frac{2^n}{v_n} M'f.$$

Επομένως συνδυάζοντας τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου παίρνουμε

$$\begin{aligned}|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| &\le \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : M'f(x) > \lambda\frac{v_n}{2^n}\right\}\right| \\ &\le 2^n \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\frac{v_n}{8^n}\right\}\right| \le \frac{16^n}{v_n} \cdot \frac{||f||_1}{\lambda},\end{aligned}$$

το οποίο είναι και το ζητούμενο. □

Θα δώσουμε τώρα μια εναλλακτική απόδειξη της weak type ανισότητας.

Θέτουμε $E = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$, και έστω $K \subset E$ συμπαγές. Για κάθε $x \in K$ υπάρχει μια μπάλα B_x με κέντρο x έτσι ώστε

$$\frac{1}{|B_x|}\int_{B_x} |f| > \lambda.$$

Αφού το K είναι συμπαγές υπάρχει πεπερασμένη οικογένεια $\mathcal{F} \subset \{B_x : x \in K\}$ τέτοια ώστε

$$K \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B.$$

Επιλέγουμε μια ξένη υποοικογένεια $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ ως εξής. Το πρώτο στοιχείο της $\mathcal{D}$ είναι η μεγαλύτερη μπάλα στην $\mathcal{F}$, έστω B_1. Αφαιρούμε από την $\mathcal{F}$ την B_1 και όλες τις μπάλες οι οποίες την τέμνουν.

Το δεύτερο στοιχείο της $\mathcal{D}$ είναι η μεγαλύτερη μπάλα ανάμεσα σ'αυτές που έχουν μείνει στην $\mathcal{F}$, έστω B_2. Όπως πριν, αφαιρούμε από την $\mathcal{F}$ την B_2 και όλες τις μπάλες οι οποίες την τέμνουν. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να εξαντλήσουμε την $\mathcal{F}$. Προφανώς, η $\mathcal{D}$ είναι ξένη και επί πλέον

$$\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B\in\mathcal{D}} 3B,$$

διότι στο k-βήμα, όλες οι μπάλες που τέμνουν την B_k έχουν ακτίνα μικρότερη από την ακτίνα της B_k και άρα περιέχονται στην $3B_k$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}|K| &\leq \left|\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B\right| \leq \left|\bigcup_{B\in\mathcal{D}} 3B\right| \leq \sum_{B\in\mathcal{D}} |3B| = 3^n \sum_{B\in\mathcal{D}} |B| < \frac{3^n}{\lambda} \sum_{B\in\mathcal{D}} \int_B |f| \\ &= \frac{3^n}{\lambda} \int_{\bigcup_{B\in\mathcal{D}} B} |f| \leq \frac{3^n}{\lambda} \|f\|_1.\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε συμπαγές υποσύνολο του E, άρα από την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue έχουμε

$$|E| = \sup_{\substack{K\subset E\\ K \text{ συμπαγές}}} |K| \leq \frac{3^n}{\lambda} \|f\|_1.$$

Ο λόγος που επιλέξαμε να δώσουμε μια έμμεση και «περίπλοκη» απόδειξη της weak (1,1) ανισότητας ενώ υπάρχει η παραπάνω απλούστερη, θα γίνει κατανοητός στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 3

Το θεώρημα διαφορισιμότητας του Lebesgue

Είμαστε έτοιμοι να χρησιμοποιήσουμε τώρα την weak (1,1) ανισότητα και στοιχειώδη εργαλεία ανάλυσης για να αποδείξουμε το *θεώρημα διαφορισιμότητας του Lebesgue* .

Θεώρημα 3.1 *(Θεώρημα διαφορισιμότητας του Lebesgue.) Αν η f είναι μια ολοκληρώσιμη πραγματική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ τότε ισχύει*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\,dy = f(x) \quad \text{για σχεδόν όλα τα } x.$$

Ισοδύναμα, αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό για τη μέση τιμή από την Εισαγωγή

$$\lim_{r\to 0} A_r f = f \quad \text{σχεδόν παντού.}$$

Απόδειξη

Έστω λοιπόν μια $f \in L^1$. Ορίζουμε δύο βοηθητικούς τελεστές

$$T_r f(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\,dy$$

και

$$Tf(x) = \limsup_{r\to 0} T_r f(x).$$

Θα δείξουμε ότι $Tf(x) = 0$ για σχεδόν όλα τα x. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα είναι πυκνό στον L^1. Αυτό σημαίνει ότι για τυχόν $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ με $\|f - g\|_1 < 1/k$. Θέτουμε $h = f - g$. Τότε

$$T_r f \leq T_r h + T_r g.$$

Άρα

$$Tf \leq Th + Tg.$$

Παρατηρούμε ότι

$$T_r g(x) = A_r(|g - g(x)|)(x).$$

Αφού για σταθεροποιημένο x η $|g - g(x)|$ είναι συνεχής, έχουμε από την Εισαγωγή ότι

$$\lim_{r \to 0} A_r(|g - g(x)|)(z) = |g(z) - g(x)| \quad \text{για κάθε } z.$$

Επομένως

$$Tg = 0,$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$Tf \leq Th \tag{3.1}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} T_r h(x) &= \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |h(y) - h(x)| \, dy \leq \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |h(y)| \, dy + |h(x)| \\ &\leq Mh(x) + |h(x)|. \end{aligned}$$

Άρα

$$Th \leq Mh + |h|. \tag{3.2}$$

Συνδυάζοντας τις (3.1) και (3.2) παίρνουμε

$$Tf \leq Mh + |h|.$$

Έστω τώρα $\lambda > 0$. Θα εκτιμήσουμε το μέτρο του συνόλου όπου $Tf > 2\lambda$. Αν για κάποιο x έχουμε $Tf(x) > 2\lambda$, τότε $Mh(x) + |h(x)| > 2\lambda$, άρα είτε $Mh(x) > \lambda$, είτε $|h(x)| > \lambda$. Συνεπώς

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > 2\lambda\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : Mh(x) > \lambda\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : |h(x)| > \lambda\}.$$

Άρα

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > 2\lambda\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : Mh(x) > \lambda\}| + |\{x \in \mathbb{R}^n : |h(x)| > \lambda\}|. \tag{3.3}$$

Η weak (1,1) ανισότητα δίνει

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mh(x) > \lambda\}| \leq \frac{16^n}{v_n \lambda} \|h\|_1.$$

Ενώ η Chebychev

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |h(x)| > \lambda\}| \leq \frac{1}{\lambda} \|h\|_1.$$

Συνδυάζοντας με την (3.3) παίρνουμε

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > 2\lambda\}| \le \frac{16^n + v_n}{v_n \lambda}\|h\|_1 \le \frac{16^n + v_n}{v_n \lambda} \cdot \frac{1}{k}.$$

Η ανισότητα αυτή είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό k, άρα το αριστερό μέλος πρέπει να είναι μηδέν

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > 2\lambda\}| = 0$$

Αφού εκτιμήσαμε το μέτρο του $\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > 2\lambda\}$ όταν $\lambda > 0$ μπορούμε εύκολα να βγάλουμε συμπέρασμα και όταν $\lambda = 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > 0\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > \frac{2}{j}\right\}.$$

Επομένως

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > 0\}| \le \sum_{j=1}^{\infty} \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > \frac{2}{j}\right\}\right| = 0.$$

Το οποίο σημαίνει ότι η Tf είναι σχεδόν παντού μηδέν. Τα σημεία που η Tf είναι μηδέν ονομάζονται *σημεία Lebesgue*. $\square$

Παρατηρήσεις

1. Στο θεώρημα διαφορισιμότητας υποθέσαμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε την weak type ανισότητα. Παρολαυτά το θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει για οποιαδήποτε τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Πράγματι, αν $f \in L^1_{loc}$ και θέσουμε $f_k = f\mathcal{X}_{B(0,k)}$, $k \in \mathbb{N}$, τότε $f_k \in L^1$. Επομένως υπάρχει $E_k \subset \mathbb{R}^n$ με $|E_k| = 0$ έτσι ώστε

   $$\lim_{r \to 0} A_r f_k(x) = f_k(x) \quad \text{για κάθε } x \notin E_k.$$

   Άρα

   $$\lim_{r \to 0} A_r f(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

2. Κάθε $f \in L^p$, $1 \le p < \infty$, είναι τοπικά ολοκληρώσιμη, διότι για κάθε $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές η ανισότητα Hölder δίνει

   $$\int_K |f| \le |K|^{1/p'} \|f\|_p < \infty \quad \text{όπου } p' = \frac{p}{p-1}.$$

   Επομένως από την προηγούμενη παρατήρηση

   $$\lim_{r \to 0} A_r f = f \quad \text{σχεδόν παντού}.$$

3. Μια προφανής παραλλαγή του θεωρήματος διαφορισιμότητας είναι η εξής: Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έστω $\{U_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$ μια οικογένεια από μπάλες ή κύβους τέτοια ώστε

$$x \in U_k(x) \quad \text{και} \quad \lim_{k\to\infty} \mathrm{diam}(U_k(x)) = 0,$$

όπου diam είναι η διάμετρος του συνόλου. Τότε για κάθε $f \in L^1_{loc}$ έχουμε

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|U_k(x)|} \int_{U_k(x)} f(y)dy = f(x) \quad \text{για σχεδόν όλα τα } x.$$

4. Μια άλλη παραλλαγή του θεωρήματος διαφορισιμότητας είναι η ακόλουθη: Αν $f \in L^p$, $1 \le p < \infty$, τότε

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p \, dy = 0 \quad \text{για σχεδόν όλα τα } x.$$

Πράγματι, για κάθε $t \in \mathbb{Q}$ υπάρχει $E_t \subset \mathbb{R}^n$ με $|E_t| = 0$ έτσι ώστε

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - t|^p \, dy = |f(x) - t|^p \quad \text{για κάθε } x \notin E_t.$$

Έστω τώρα $x \notin \bigcup\limits_{t\in\mathbb{Q}} E_t$, και $\epsilon > 0$. Επιλέγουμε $t_0 \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $|f(x) - t_0| < \epsilon$. Τότε από την ανισότητα Minkowski έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p \, dy\right)^{1/p} \\ \le \left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - t_0|^p \, dy\right)^{1/p} + |f(x) - t_0|.\end{aligned}$$

Άρα

$$\limsup_{r\to 0} \left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p \, dy\right)^{1/p} \le 2|f(x) - t_0| < 2\epsilon,$$

και το συμπέρασμα έπεται.

5. Αν $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και εφαρμόσουμε το θεώρημα διαφορισιμότητας στη συνάρτηση $\mathcal{X}_A$ παίρνουμε

$$\lim_{r\to 0} \frac{|A \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} = 1 \quad \text{για σχεδόν όλα τα } x \in A,$$

και

$$\lim_{r\to 0} \frac{|A \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} = 0 \quad \text{για σχεδόν όλα τα } x \notin A.$$

Το αποτέλεσμα αυτό συνήθως ονομάζεται *θεώρημα πυκνότητας του Lebesgue*. Διαισθητικά σημαίνει ότι από μετροθεωρητική άποψη, ένα μετρήσιμο σύνολο «μοιάζει» με διάστημα σε πολύ μικρές κλίμακες.

Μια πολύ σημαντική εφαρμογή του θεωρήματος διαφορισιμότητας στην Ανάλυση είναι η λεγόμενη *διάσπαση Calderón-Zygmund*. Η απόδειξη χρησιμοποιεί ιδέες που αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 3.2 *(Διάσπαση Calderón-Zygmund σε ύψος λ.) Έστω f μια μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση, και $\lambda > 0$. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $\{Q_j\}$ ξένων ανά δύο δυαδικών κύβων τέτοια ώστε:*

1. $\left|\bigcup_j Q_j\right| \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_1$.
2. $\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f \le 2^n\lambda$ *για κάθε* j.
3. $f(x) \le \lambda$ *για σχεδόν όλα τα* $x \notin \bigcup_j Q_j$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα σύνολα Ω_k και τους αντίστοιχους δυαδικούς κύβους Q_j του προηγούμενου κεφαλαίου. Η πρώτη ανισότητα είναι ακριβώς η weak (1,1) για την M_d. Αν τώρα $Q_j \subset \Omega_k$ είναι ένας k-δυαδικός κύβος και $\widetilde{Q}_j$ είναι ο μοναδικός $(k-1)$-δυαδικός κύβος ο οποίος τον περιέχει, τότε από τον ορισμό των συνόλων Ω_k έχουμε

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f \quad \text{και} \quad \frac{1}{|\widetilde{Q}_j|}\int_{\widetilde{Q}_j} f \le \lambda.$$

Αλλά $|\widetilde{Q}_j| = 2^n|Q_j|$ και έτσι παίρνουμε τη δεύτερη ανισότητα. Τέλος αν $x \notin \bigcup_j Q_j$ είναι ένα σημείο Lebesgue της f, και $\{R_i\}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία δυαδικών κύβων τέτοια ώστε $x \in R_i$, τότε από τον ορισμό των συνόλων Ω_k έχουμε ότι

$$\frac{1}{|R_i|}\int_{R_i} f \le \lambda.$$

Παίρνοντας όριο καθώς $i \to \infty$, έχουμε την τελευταία ανισότητα. $\square$

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε μια τυπική εφαρμογή αυτής της διάσπασης.

Κεφάλαιο 4

Η μεγιστική συνάρτηση σε χώρους Lebesgue

Στα προηγούμενα κεφάλαια είδαμε τον σημαντικό ρόλο που έχει η weak type (1,1) ανισότητα. Η ανισότητα αυτή αντανακλά τον τρόπο με τον οποίο ο μεγιστικός τελεστής δρα πάνω σε L^1 συναρτήσεις. Τώρα θα εξετάσουμε μερικές επιπλέον ιδιότητες ξεκινώντας με τον τρόπο που δρα πάνω σε L^p συναρτήσεις. Για το επόμενο θεώρημα που θα δείξουμε θα χρειαστούμε την βοήθεια της παρακάτω πρότασης.

Πρόταση 4.1 *Για κάθε πραγματική συνάρτηση $f \in L^p$ ισχύει ότι*

$$\|f\|_p^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} |\{|f| > \lambda\}| \, d\lambda.$$

Απόδειξη

Έστω $f \in L^p$. Με εφαρμογή του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού παρατηρούμε ότι

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{|f(x)|} p\lambda^{p-1} \, d\lambda \, dx$$

Το ζητούμενο προκύπτει με μια αλλαγή στη σειρά της ολοκλήρωσης:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{|f(x)|} p\lambda^{p-1} \, d\lambda \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \mathcal{X}_{\{|f|>\lambda\}}(x) \, d\lambda \, dx \\ &= p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_{|\{|f|>\lambda\}|}(x) \, dx \, d\lambda \\ &= p \int_0^\infty \lambda^{p-1} |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}| \, d\lambda. \end{aligned}$$

$\square$

Με χρήση τώρα του προηγούμενου αποτελέσματος θα δείξουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.1 *Η μεγιστική συνάρτηση των Hardy & Littlewood είναι φραγμένος τελεστής από τον L^p στον L^p για κάθε p με $1 < p \leq \infty$.*

Απόδειξη

Έστω $f \in L^p$. Διασπάμε την f σε δύο συναρτήσεις.

$$f_0 = f\mathcal{X}_{\{|f|>\lambda/2\}},$$
$$f_1 = f\mathcal{X}_{\{|f|\leq\lambda/2\}}.$$

Είναι προφανές ότι $f = f_0 + f_1$. Επιπλέον το χωρίο πάνω στο οποίο η f είναι μεγαλύτερη του $\lambda/2$ έχει πεπερασμένο μέτρο διαφορετικά θα είχαμε $\|f\|_p = +\infty$. Άρα από την ανισότητα Hölder

$$\|f_0\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f|\mathcal{X}_{\{|f|>\lambda/2\}} \leq |\{|f| > \lambda/2\}|^{1/q}\|f\|_p < +\infty,$$

όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p. Δηλαδή η f_0 είναι L^1. Η f_1 από την άλλη είναι προφανώς L^∞. Από την υπογραμμικότητα τώρα του M έχουμε

$$Mf \leq Mf_0 + Mf_1.$$

Άρα

$$|\{|Mf| > \lambda\}| \leq |\{|Mf_0| > \lambda/2\}| + |\{|Mf_1| > \lambda/2\}| = |\{|Mf_0| > \lambda/2\}|.$$

Εφαρμόζοντας την weak (1,1) ανισότητα για την M και την προηγούμενη πρόταση παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\|Mf\|_p^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}|\{|Mf| > \lambda\}|\, d\lambda \leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1}|\{|Mf_0| > \lambda/2\}|\, d\lambda \\
&\leq p\, C_n \int_0^\infty \lambda^{p-2}\|f_0\|_1\, d\lambda = p\, C_n \int_0^\infty \lambda^{p-2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\mathcal{X}_{\{|f|>\lambda/2\}}(x)\, dx d\lambda \\
&= p\, C_n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_0^\infty \lambda^{p-2}\mathcal{X}_{\{|f|>\lambda/2\}}(x)\, d\lambda dx = p\, C_n \int_{R^n} |f(x)| \int_0^{2|f(x)|} \lambda^{p-2}\, d\lambda dx \\
&= \frac{2^p p\, C_n}{p-1}\|f(x)\|_p^p,
\end{aligned}$$

όπου C_n η σταθερά της weak (1,1) ανισότητας. $\square$

Η σταθερά που εμφανίζεται στην προηγούμενη $L^p \to L^p$ εκτίμηση εξαρτάται από την αντίστοιχη weak type σταθερά, η οποία με τη σειρά της, αν παρατηρήσει κανείς τις αποδείξεις του κεφαλαίου 2, εξαρτάται εκθετικά από τη διάσταση n. Θα δώσουμε τώρα μια απόδειξη η οποία βελτιώνει την εξάρτηση αυτή από εκθετική σε γραμμική. Για τις ανάγκες της απόδειξης εισάγουμε τις παρακάτω βοηθητικές συναρτήσεις.

Έστω $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.Για $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την μονοδιάστατη Hardy-Littlewood μεγιστική συνάρτηση:

$$M_1 h(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} |h(x-t)|\, dt.$$

Αν $x \in \mathbb{R}^n$ τότε για $\xi \in S^{n-1}$ και $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ ορίζουμε την Hardy-Littlewood μεγιστική συνάρτηση στην κατεύθυνση ξ:

$$M_\xi f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r} \int_0^r |f(x - t\xi)|\, dt.$$

Τέλος για τυχούσα $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και για $\overline{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ορίζουμε την $f_{\overline{x}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f_{\overline{x}}(x) = f(x, \overline{x}).$$

Έστω λοιπόν μια f στον L^p για $1 < p < +\infty$ και ένα $\xi \in S^{n-1}$. Τότε υπάρχει συνάρτηση στροφής

$$A_\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

με την ιδιότητα

$$A_\xi(\xi) = e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0).$$

Δηλαδή η A_ξ ταυτίζει το ξ με το μοναδιαίο e_1 του $\mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} M_\xi f\left(A_\xi^{-1}(x)\right) &= \sup_{r>0} \frac{1}{r} \int_0^r |f\left(A_\xi^{-1}(x - t\xi)\right)|\, dt = \sup_{r>0} \frac{1}{r} \int_0^r |\left(f \circ A_\xi^{-1}\right)(x - te_1)|\, dt \\ &= \sup_{r>0} \frac{1}{r} \int_0^r |\left(f \circ A_\xi^{-1}\right)_{\overline{x}}(x_1 - t)|\, dt \le 2M_1\left(f \circ A_\xi^{-1}\right)_{\overline{x}}(x_1), \end{aligned}$$

όπου x_1 η πρώτη συντεταγμένη στο διάνυσμα x. Εφόσον το μέτρο Lebesgue είναι αναλλοίωτο στις στροφές έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (M_\xi f(x))^p\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(M_\xi f\left(A_\xi^{-1}(x)\right)\right)^p dx \\ &\le 2^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \left(M_1\left(f \circ A_\xi^{-1}\right)_{\overline{x}}(x_1)\right)^p dx_1\, d\overline{x} \end{aligned}$$

Για την μονοδιάστατη Hardy-Littlewood έχουμε ήδη δείξει την ανισότητα

$$\|M_1 f\|_P \le C_p \|f\|_p, \quad C_p > 0.$$

Συνδυάζοντας την με την τελευταία ανισότητα παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_\xi f(x))^p\, dx \le 2^p C_p^p \|f \circ A_\xi^{-1}\|_p^p = 2^p C_p^p \|f\|_p^p.$$

Τώρα με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} |f(x-y)|\, dy &= \frac{1}{v_n r^n} \int_0^r t^{n-1} \int_{S^{n-1}} Mf(x - t\xi)\, d\sigma(\xi)\, dt \\ &\le \frac{1}{v_n} \cdot \frac{1}{r} \int_0^r \int_{S^{n-1}} Mf(x - t\xi)\, d\sigma(\xi)\, dt \\ &= \frac{1}{v_n} \int_{S^{n-1}} \frac{1}{r} \int_0^r Mf(x - t\xi)\, dt\, d\sigma(\xi) \\ &\le \frac{1}{v_n} \int_{S^{n-1}} M_\xi f(x)\, d\sigma(\xi), \end{aligned}$$

όπου $d\sigma$ είναι το επιφανειακό μέτρο Lebesgue στην μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}. Άρα

$$Mf(x) \leq \frac{1}{v_n} \int_{S^{n-1}} M_\xi f(x)\, d\sigma(\xi).$$

Επομένως από την ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα έχουμε

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p \, dx \right)^{p^{-1}} &\leq \frac{1}{v_n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{S^{n-1}} M_\xi f(x) \right)^p dx \right]^{p^{-1}} \\
&\leq \frac{1}{v_n} \int_{S^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (M_\xi f(x))^p \, dx \right)^{p^{-1}} d\sigma(\xi) \\
&= \frac{1}{v_n} \int_{S^{n-1}} \left\| M_\xi f(x) \right\|_p d\sigma(\xi) \\
&\leq \frac{2C_p}{v_n} \sigma\left(S^{n-1}\right) \|f\|_p.
\end{aligned}$$

Επιπλέον για το v_n έχουμε

$$v_n = \int_{B(0,1)} dx = \int_0^1 r^{n-1} \int_{S^{n-1}} d\sigma(\xi)\, dr = \sigma\left(S^{n-1}\right) \int_0^1 r^{n-1}\, dr = \sigma\left(S^{n-1}\right) \frac{1}{n}$$

Τελικά καταλήγουμε

$$\begin{aligned}
\|Mf\|_p = \left(\int \mathbb{R}^n \, (Mf(x))^p \, dx \right)^{p^{-1}} &\leq \frac{2C_p}{v_n} \sigma\left(S^{n-1}\right) \|f\|_p = \frac{2nC_p}{\sigma\left(S^{n-1}\right)} \sigma\left(S^{n-1}\right) \|f\|_p \\
= 2nC_p \|f\|_p,
\end{aligned}$$

το οποίο είναι και το ζητούμενο.

Όπως έχουμε δεί το παραπάνω θεώρημα δεν ισχύει αν $p = 1$. Παρόλαυτα μπορούμε να κάνουμε κάποιες εκτιμήσεις για την L^1 νόρμα της Mf αν επιβάλλουμε κάποιους περιορισμούς στην f. Το θεώρημα που ακολουθεί μετά το παρακάτω λήμμα έχει ακριβώς αυτό τον σκοπό.

Λήμμα 4.1 *Υπάρχουν θετικές σταθερές C_1, C_2 και c έτσι ώστε για κάθε $f \in L^1$ και κάθε $\lambda > 0$*

1. $|\{x : Mf(x) > 2\lambda\}| \leq \dfrac{C_1}{\lambda} \displaystyle\int_{\{|f|>\lambda\}} |f(x)|\, dx.$
2. $|\{x : Mf(x) > c\lambda\}| \geq \dfrac{C_2}{\lambda} \displaystyle\int_{\{|f|>\lambda\}} |f(x)|\, dx.$

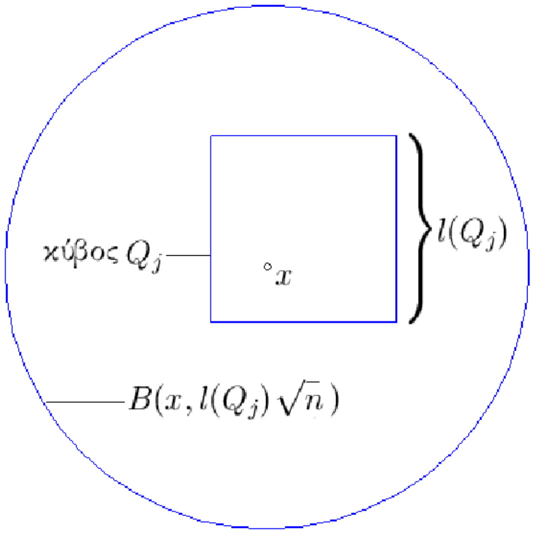
Απόδειξη

1. Θέτουμε $f_1 = f\mathcal{X}_{\{|f|>\lambda\}}$. Τότε

$$\{x : Mf(x) > 2\lambda\} \subset \{x : Mf_1(x) > \lambda\}$$

και η weak (1,1) ανισότητα δίνει

$$|\{Mf > 2\lambda\}| \leq |\{Mf_1 > \lambda\}| \leq \frac{C_1}{\lambda} \int |f_1(x)|\, dx = \frac{C_1}{\lambda} \int_{\{|f|>\lambda\}} |f(x)|\, dx.$$



Σχήμα 4.1: $Q_j \subset B(x, l(Q_j)\sqrt{n})$

2. Εστω $\{Q_j\}$ μια διάσπαση Calderón-Zygmund της $|f|$ σε ύψος λ. Για τυχόν $x \in Q_j$ θέτουμε $B_j = B(x, l(Q_j)\sqrt{n})$. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.1, έχουμε $Q_j \subset B_j$, άρα

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(x)|\,dx \le \frac{|B_j|}{|Q_j|}\frac{1}{|B_j|}\int_{B_j} |f(x)|\,dx \le \frac{1}{c} Mf(x).$$

όπου $1/c = |B_j|/|Q_j|$. Αυτό ισχύει για όλους τους κύβους Q_j άρα

$$\begin{aligned} Q_j \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |Mf(x)| > c\lambda\} &\Rightarrow \bigcup_j Q_j \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |Mf(x)| > c\lambda\} \\ &\Rightarrow \left|\bigcup_j Q_j\right| \le |\{x \in \mathbb{R}^n : |Mf(x)| > c\lambda\}| \end{aligned}$$

Από τις ιδιότητες της διάσπασης γνωρίζουμε ότι $|f(x)| \le \lambda$ για σχεδόν όλα τα $x \notin \bigcup_j Q_j$. Επομένως

$$\begin{aligned} \int_{\{|f|>\lambda\}} |f(x)|\,dx \le \int_{\bigcup_j Q_j} |f(x)|\,dx &= \sum_j \int_{Q_j} |f(x)|\,dx \\ &= \sum_j |Q_j| \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(x)|\,dx \\ &\le 2^n\lambda \sum_j |Q_j| = 2^n \lambda \left|\bigcup_j Q_j\right| \\ &\le 2^n\lambda |\{x : Mf(x) > c\lambda\}| \end{aligned}$$

□

Το προηγούμενο λήμμα λέει ότι, κατά μια έννοια, η weak type ανισότητα μπορεί να αντιστραφεί. Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 4.2 *Έστω $B \subset \mathbb{R}^n$ μια μπάλα και έστω $f \in L^1$ μια συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ με φορέα το B. Τότε*

$$Mf \in L^1(B) \quad \textit{αν και μόνο αν} \int_B |f| \log^+ |f| < +\infty,$$

όπου $\log^+ |f| = \max\{0, \log |f|\}$.

Απόδειξη

Για απλότητα θα συμβολίζουμε όλες τις σταθερές με C. Έστω ότι

$$\int_B |f| \log^+ |f| < +\infty.$$

Τότε

$$\begin{aligned}\int_B Mf(x)\,dx &= 2\int_0^{+\infty} |\{x \in B : Mf(x) > 2\lambda\}\,d\lambda \\ &= 2\int_0^1 |\{x \in B : Mf(x) > 2\lambda\}\,d\lambda + 2\int_1^{+\infty} |\{x \in B : Mf(x) > 2\lambda\}\,d\lambda.\end{aligned}$$

Όμως ισχύει ότι

$$\int_0^1 |\{x \in B : Mf(x) > 2\lambda\}\,d\lambda \leq \int_0^1 |B|d\lambda = |B|$$

και από το προηγούμενο λήμμα ότι

$$\int_1^{+\infty} |\{x \in B : Mf(x) > 2\lambda\}\,d\lambda \leq C\int_1^{+\infty} \frac{1}{\lambda}\int_{\{x\in B:|f(x)|>\lambda\}} |f(x)|\,dx.$$

Το ζητούμενο έπεται συνδυάζοντας τα παραπάνω:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_B Mf(x)\,dx &\leq |B| + C\int_1^{+\infty} \frac{1}{\lambda}\int_{\{x\in B:|f(x)|>\lambda\}} |f(x)|\,dx d\lambda \\ &= |B| + C\int_B |f(x)| \int_1^{+\infty} \mathcal{X}_{\{x\in B:|f(x)|>\lambda\}}(x)\frac{1}{\lambda}\,d\lambda\,dx \\ &= |B| + C\int_B |f(x)| \int_1^{\max\{1,|f(x)|\}} \frac{d\lambda}{\lambda}\,dx \\ &= |B| + C\int_B |f| \log^+ |f| < +\infty.\end{aligned}$$

Αντίστροφα, έστω ότι

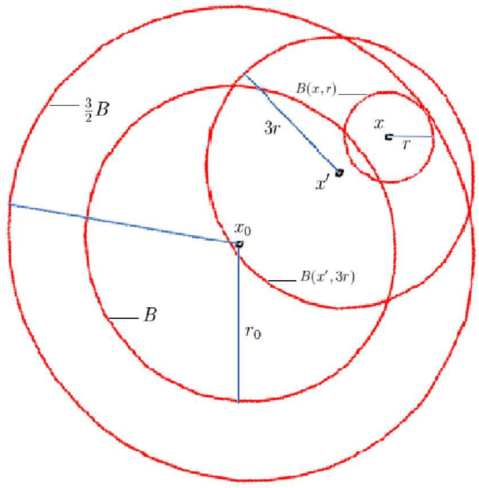
$$\int_B Mf(x)\,dx < +\infty.$$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$\int_{\frac{3}{2}B} Mf(x)\,dx < +\infty.$$

Πράγματι αν θέσουμε $B(x_0, r_0) = B$ τότε για $x \in \frac{3}{2}B \setminus B$ και $r > |x - x_0| - r_0$ από το σχήμα 4.2 έχουμε

$$B(x, r) \subset B(x', 3r),$$



Σχήμα 4.2: $B(x,r) \subset B(x',3r)$

όπου x' είναι το συμμετρικό σημείο του x ως προς την επιφάνεια της B. Άρα, αφού ο φορέας της f είναι το B έχουμε

$$
\begin{aligned}
Mf(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy = \sup_{r>|x-x_0|-r_0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy \\
&\le C \sup_{r>|x-x_0|-r_0} \frac{1}{|B(x',3r)|} \int_{B(x',3r)} |f(y)|\, dy \le CMf(x').
\end{aligned}
$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\int_{B\setminus\frac{3}{2}B} Mf(x)\, dx &= \int_{r_0}^{\frac{3}{2}r_0} r^{n-1} \int_{S^{n-1}} Mf(x_0 + r\xi)\, d\sigma(\xi)\, dr \\
&\le C \int_{r_0}^{\frac{3}{2}r_0} r^{n-1} \int_{S^{n-1}} Mf(x_0 + (2r_0 - r)\xi)\, d\sigma(\xi)\, dr \\
&= C \int_{\frac{r_0}{2}}^{r_0} (2r_0 - r)^{n-1} \int_{S^{n-1}} Mf(x_0 + r\xi)\, d\sigma(\xi)\, dr \\
&\le C \int_{\frac{r_0}{2}}^{r_0} r^{n-1} \int_{S^{n-1}} Mf(x_0 + r\xi)\, d\sigma(\xi)\, dr \\
&= C \int_{B\setminus\frac{1}{2}B} Mf(x) dx < +\infty.
\end{aligned}
$$

Το συμπέρασμα είναι ότι

$$
\int_{\frac{3}{2}B} Mf(x)\, dx < +\infty.
$$

Μπορούμε να επαναλάβουμε τα βήματα της απόδειξης με το $3/2B$ στη θέση του B και επαγωγικά να καταλήξουμε στο ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\left(\frac{3}{2}\right)^k B} Mf(x)dx < +\infty.$$

Δηλαδή η Mf είναι τοπικά ολοκληρώσιμη. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$Mf(x) \to 0 \quad \text{καθώς} \quad |x| \to +\infty.$$

Πράγματι, αν $\epsilon > 0$ τότε επιλέγουμε $R > 0$ έτσι ώστε $B \subset B(0, R)$ και $1/R < \epsilon$. Τότε για κάθε x με $|x| > 2R$ έχουμε

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f| = \sup_{r>R} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f| \leq C \frac{\|f\|_1}{R^n} < C\|f\|_1 \epsilon^n.$$

Αφού το ϵ είναι αυθαίρετο έπεται ότι

$$\lim_{|x| \to +\infty} Mf(x) = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια αρκετά μεγάλη μπάλα B_0 τέτοια ώστε

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > C\} \subset B_0.$$

Άρα

$$\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > C\}} Mf(x)\, dx \leq \int_{B_0} Mf(x)\, dx < +\infty$$

διότι η Mf είναι τοπικά ολοκληρώσιμη. Έτσι από το προηγούμενο λήμμα έχουμε

$$\begin{aligned} +\infty > \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > C\}} Mf(x)\, dx &\geq \int_C^{+\infty} |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}|\, d\lambda \\ &\geq C \int_1^{+\infty} \frac{1}{\lambda} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}} |f(x)|\, dx\, d\lambda = C \int_B |f| \log^+ |f|. \end{aligned}$$

□

Το σύνολο των συναρτήσεων που ικανοποιούν τη συνθήκη του προηγούμενου θεωρήματος λέγεται «*χώρος* $L \log L$» και βρίσκεται μεταξύ του L^1 και όλων των υπόλοιπων L^p, $p > 1$.

Παρατηρήσεις

Ο μεγιστικός τελεστής για $n = 1$ εισήχθη από τους Hardy και Littlewood [3] οι οποίοι έδωσαν και την πρώτη απόδειξη της weak type ανισότητας. Η απόδειξη που παρουσιάσαμε, μέσω δυαδικών κύβων, στηρίζεται σε ιδέες των Calderón και Zygmund [1] στους οποίους οφείλεται και η ομώνυμη διάσπαση.

Η εναλλακτική απόδειξη στο τέλος του κεφαλαίου 2 δόθηκε από τον Wiener [6].

Το θεώρημα 4.1 είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος παρεμβολής του Marcinkiewicz , το οποίο μας επιτρέπει να περνάμε από weak type ανισότητες σε L^p ανισότητες.

Η τεχνική μέσω της οποίας βελτιώσαμε τη σταθερά στο θεώρημα 4.1 ονομάζεται «μέθοδος των περιστροφών» και οφείλεται στους Calderón και Zygmund [2]. Στην πραγματικότητα, η εν λόγω σταθερά αποδεικνύεται [5] ότι δεν εξαρτάται από την διάσταση n. Είναι ανοιχτό πρόβλημα αν ισχύει το ίδιο και για την weak type σταθερά.

Το θεώρημα 4.2 ονομάζεται «$L \log L$-θεώρημα». Το ευθύ οφείλεται στον Stein [4]. Το αντίστροφο στον Wiener [6].

Βιβλιογραφία

[1] A. Calderón and A. Zygmund. *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. **88** (1952) 85-139.

[2] A. Calderón and A. Zygmund. *On singular integrals*, Amer. J. Math. **18** (1956) 289-309.

[3] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. *A maximal theorem with function-theoretic applications*, Acta Math. **54** (1930) 81-116.

[4] E. M. Stein. *Note on the class* $L \log L$, Studia Math. **32** (1969) 305-310.

[5] E. M. Stein and J. O. Strömberg. *Behavior of maximal functions in* $\mathbb{R}^n$ *for large* n, Ark. Mat. **21** (1983) 259-269.

[6] N. Wiener. *The ergodic theorem*, Duke Math. J. **5** (1939) 1-18.