Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστημίου Κρήτης

Τα Θεωρήματα Παρεμβολής των M. Riesz και G. Thorin.

Διπλωματική εργασία του
Δημητρίου Δ. Βάρσου

Φεβρουάριος 2006

Η κριτική επιτροπή αποτελείται από τους:

Γαλανόπουλος Πέτρος
Κατσοπρινάκης Μανώλης
Παπαδημητράκης Μιχάλης (επιβλέπων).

Πρόλογος

Δύο από τα πιο σημαντικά και χρήσιμα αποτελέσματα της ανάλυσης είναι το Θεώρημα Παρεμβολής του M. Riesz και η γενίκευσή του, το Θεώρημα Παρεμβολής του G. Thorin. Τα Θεωρήματα αυτά παίζουν σημαντικό ρόλο στην Συναρτησιακή Ανάλυση, στην Αρμονική Ανάλυση και στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις.

Στην εργασία αυτή θα μελετήσουμε την ακόλουθη μορφή του Θεωρήματος Παρεμβολής του M. Riesz.

Έστω (a_{ij}) ένας πραγματικός $m \times n$ πίνακας και έστω

$$A_{\mathbb{R}}(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

η **πραγματική διγραμμική μορφή**, που ορίζεται από τον πίνακα αυτόν. Το $x = (x_1, ..., x_m)$ διατρέχει τον $\mathbb{R}^m$ και το $y = (y_1, ..., y_n)$ διατρέχει τον $\mathbb{R}^n$. Η (p,q)-**νόρμα** της διγραμμικής μορφής ορίζεται ως το

$$M_{\mathbb{R}}(p,q) = \sup\left\{|A_{\mathbb{R}}(x,y)| : |x_1|^p + ... + |x_m|^p \le 1,\ |y_1|^q + ... + |y_n|^q \le 1\right\}.$$

Θεωρούμε ότι $1 \le p, q \le +\infty$, όπου στην περίπτωση $p = +\infty$ η ανισότητα $|x_1|^p + ... + |x_m|^p \le 1$ αντικαθίσταται από την $\max |x_i| \le 1$ και στην περίπτωση $q = +\infty$ η ανισότητα $|y_1|^q + ... + |y_n|^q \le 1$ αντικαθίσταται από την $\max |y_j| \le 1$. Επίσης, υποθέτουμε ότι το ζεύγος (p,q) ικανοποιεί τον περιορισμό $1 \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ ή, με άλλα λόγια, το ζεύγος $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$, ως σημείο του $\mathbb{R}^2$, διατρέχει το τρίγωνο

$$T = \{(\alpha, \beta) : 0 \le \alpha \le 1,\ 0 \le \beta \le 1,\ \alpha + \beta \ge 1\}.$$

Το Θεώρημα Παρεμβολής του M. Riesz λέει ότι **η συνάρτηση** $\log M_{\mathbb{R}}(p,q)$ **είναι κυρτή συνάρτηση του σημείου** $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ **στο τρίγωνο** T.

Αν ο $m \times n$ πίνακας (a_{ij}) έχει μιγαδικές συντεταγμένες, τότε ορίζεται η μιγαδική διγραμμική μορφή,

$$A_{\mathbb{C}}(z,w) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_i w_j,$$

όπου το $z = (z_1, ..., z_m)$ διατρέχει τον $\mathbb{C}^m$ και το $w = (w_1, ..., w_n)$ διατρέχει τον $\mathbb{C}^n$. Ομοίως ορίζεται η (p, q)-νόρμα

$$M_{\mathbb{C}}(p, q) = \sup \{|A_{\mathbb{C}}(z, w)| : |z_1|^p + ... + |z_m|^p \leq 1, \ |w_1|^q + ... + |w_n|^q \leq 1\},$$

με την προσήκουσα μετατροπή όταν $p = +\infty$ ή $q = +\infty$. Τώρα υποθέτουμε ότι το (p, q) ικανοποιεί μόνον τους περιορισμούς $1 \leq p, q \leq +\infty$ ή, ισοδύναμα, ότι το ζεύγος $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$, διατρέχει το τετράγωνο

$$Q = \{(\alpha, \beta) : 0 \leq \alpha \leq 1, \ 0 \leq \beta \leq 1\}.$$

Το Θεώρημα Παρεμβολής του G. Thorin λέει ότι **η συνάρτηση** $\log M_{\mathbb{C}}(p, q)$ **είναι κυρτή συνάρτηση του σημείου** $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ **στο τετράγωνο** Q.

Η απόδειξη του θεωρήματος του M. Riesz είναι στοιχειώδης, αλλα αρκετα περίπλοκη. Η απόδειξη του θεωρήματος του G. Thorin χρησιμοποιεί μιγαδική ανάλυση και, ειδικότερα, το Θεώρημα των Τριών Ευθειών του J. Hadamard.

Θα δούμε επίσης δυο εφαρμογές των θεωρημάτων. Η μία εφαρμογή είναι σχετική με εκτιμήσεις νορμών γραμμικών μετασχηματισμών και η άλλη αποτελεί το ουσιαστικό μέρος της απόδειξης του θεωρήματος Hausdorf-Young της Αρμονικής Ανάλυσης.

Η μελέτη αυτή ακολούθησε το βιβλίο "Inequalities" των Hardy, Littlewood και Polya.

Η εργασία αυτή ήταν για μένα η σημαντικότερη εμπειρία των προπτυχιακών μου σπουδών και αποτελεί ουσιαστικά την πρώτη μου προσπάθεια για την εις βάθος ανάλυση ενός συγκεκριμένου επιστημονικού αντικειμένου. Εκτός όμως από το κομμάτι της ανάλυσης, η διαδικασία της συγγραφής των συμπερασμάτων που προέκυπταν, αποτέλεσε μια εμπειρία πρωτόγνωρη για εμένα και εξ ίσου σημαντική για την διαδικασία της μαθησης.

Θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου, Μιχάλη Παπαδημητράκη, που με την υπομονή και την επιμονή του σε αυτά που οι μαθητές συχνά λέμε "λεπτομέρειες", με βοήθησε να καταλάβω την ουσία όσων διάβαζα, αλλά και μου άνοιξε δρόμους πέρα από τα στενά όρια αυτού του πονήματος.

Σε αυτό το σημείο θέλω να ευχαριστήσω και όλους, όσοι στάθηκαν Δάσκαλοι για μένα, όχι μόνο για τις γνώσεις που μου μετέδωσαν, αλλά και για το ήθος τους, από τα μαθητικά μου χρόνια μέχρι και σήμερα.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ χρωστάω στους φίλους και συμφοιτητές που βοήθησαν, έμμεσα ή άμεσα, στην εργασία αυτή.

Τέλος δεν ξέρω με τι λόγια να αναφερθώ στους γονείς μου και την οικογένειά μου, που όλα αυτά τα χρόνια ήταν παρόντες σε κάθε μου βήμα.

Κεφάλαιο 1

Γενικά

1.1 Η έννοια της κυρτότητας.

Ορισμός: *Έστω σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Το A ονομάζεται* **κυρτό** *αν*

$$\forall x, y \in A \quad \forall t \in (0,1): \qquad tx + (1-t)y \in A.$$

Ορισμός: *Έστω A κυρτό σύνολο και συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Η f λέγεται* **κυρτή** *αν*

$$\forall x, y \in A \quad \forall t \in (0,1): \qquad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Η **γεωμετρική σημασία** της έννοιας της κυρτότητας είναι η εξής:
Μια συνάρτηση f είναι κυρτή, αν κάθε ευθύγραμμο τμήμα στον $\mathbb{R}^{N+1}$, με άκρα επί της επιφάνειας, η οποία αποτελεί την γραφική παράσταση της f, βρίσκεται ολόκληρο πάνω από την επιφάνεια ή επί της επιφάνειας αυτής.

Πρόταση 1.1.1. *Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κυρτό $A \subseteq \mathbb{R}^N$ και*

$$\forall a, b \in A \quad \exists t \in (0,1): \quad f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b),$$

τότε η συνάρτηση f είναι κυρτή στο A.

Απόδειξη. Έστω συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

1. Η f είναι συνεχής στο A.
2. $\forall a, b \in A \quad \exists t \in (0,1) \ : \quad f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$.
3. $\exists a_0, b_0 \in A \ \exists t_0 \in (0,1): \quad f(t_0 a_0 + (1-t_0)b_0) > t_0 f(a_0) + (1-t_0)f(b_0)$.

Ορίζουμε συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$g(t) = f(ta_0 + (1-t)b_0) - (tf(a_0) + (1-t)f(b_0)).$$

Ορίζουμε επίσης τα σύνολα:

$$S = \{t \in [0,1] : g(t) = 0, t < t_0\}, \quad T = \{t \in [0,1] : g(t) = 0, t > t_0\}.$$

Το σύνολο S είναι μη-κενό, διότι $0 \in S$, και άνω φραγμένο από το t_0. Άρα υπάρχει το $t_S = \sup S$ και $t_S \leq t_0$. Είναι γνωστό ότι υπάρχει ακολουθία $\{t_n\}$ στο S τέτοια ώστε $t_n \to t_S$. Επειδή η g είναι συνεχής συνεπάγεται ότι $g(t_n) \to g(t_S)$ και, αφού $g(t_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι $g(t_S) = 0$. Επειδή $g(t_0) > 0$, συνεπάγεται ότι $t_S < t_0$. Άρα $t_S \in S$ και το t_S είναι το μέγιστο στοιχείο του S. Ομοίως ορίζεται το $t_T = \inf T$ και αποδεικνύεται ότι το t_T είναι το ελάχιστο στοιχείο του T και ότι $t_0 < t_T$.

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε $t_S < t_0 < t_T$ και $\forall t \in (t_S, t_T) : \; g(t) \neq 0$. Επειδή όμως η g είναι συνεχής και $g(t_0) > 0$ από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών έπεται ότι $\forall t \in (t_S, t_T) : \; g(t) > 0$. Άρα

$$\forall t \in (t_S, t_T) : \quad f(ta_0 + (1-t)b_0) > tf(a_0) + (1-t)f(b_0).$$

Έστω $a = t_S a_0 + (1-t_S)b_0$ και $b = t_T a_0 + (1-t_T)b_0$. Από τον ορισμό των a, b και από το γεγονός ότι $g(t_S) = 0 = g(t_T)$ προκύπτει ότι

$$f(a) = t_S f(a_0) + (1-t_S)f(b_0), \quad f(b) = t_T f(a_0) + (1-t_T)f(b_0).$$

Ας εξετάσουμε την συμπεριφορά της f στο ευθύγραμμο τμήμα $[a,b]$. Έστω $t \in (0,1)$. Τότε:

$$\begin{aligned} ta + (1-t)b &= t(t_S a_0 + (1-t_S)b_0) + (1-t)(t_T a_0 + (1-t_T)b_0) \\ &= t' a_0 + (1-t')b_0, \\ \text{όπου} \qquad t' &= tt_S + (1-t)t_T. \end{aligned}$$

Επίσης ισχύει:

$$\begin{aligned} tf(a) + (1-t)f(b) &= t(t_S f(a_0) + (1-t_S)f(b_0)) \\ &\qquad + (1-t)(t_T f(a_0) + (1-t_T)f(b_0)) \\ &= t' f(a_0) + (1-t')f(b_0). \end{aligned}$$

Για κάθε $t \in (0,1)$ ισχύει $t' \in (t_S, t_T)$, οπότε:

$$\begin{aligned} f(ta + (1-t)b) &= f(t'a_0 + (1-t')b_0) \\ &> t'f(a_0) + (1-t')f(b_0) = tf(a) + (1-t)f(b). \end{aligned}$$

Άτοπο λόγω της ιδιότητας 2. $\square$

1.2 Εσωτερικό γινόμενο και νόρμα στον $\mathbb{R}^m$.

Ορισμός: *Έστω* $a = (a_1, a_2, ..., a_m) \in \mathbb{R}^m$ *και* $b = (b_1, b_2, ..., b_m) \in \mathbb{R}^m$. *Συμβολίζουμε:*

$$(a|b) = a_1 b_1 + ... + a_m b_m,$$

το σύνηθες **εσωτερικό γινόμενο**.

Ορισμός: *Μια απεικόνιση* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *λέγεται* **νόρμα** *αν ισχύει:*

1. $\forall x \in \mathbb{R}^m$: $\quad \|x\| \geq 0$ και, αν $\|x\| = 0$, τότε $x = 0$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^m$: $\quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$: $\quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ορισμός: *Αν* $x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$ *ορίζουμε:*

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(|x_1|^p + |x_2|^p + ... + |x_m|^p\right)^{1/p}, & \text{αν } 1 \leq p < +\infty, \\ \max_{1 \leq j \leq m} |x_j|, & \text{αν } p = +\infty. \end{cases}$$

Ορισμός: *Έστω* $1 \leq p \leq +\infty$. *Ορίζουμε:*

$$p' = \begin{cases} \frac{p}{p-1}, & 1 < p < +\infty, \\ +\infty, & p = 1, \\ 1, & p = +\infty. \end{cases}$$

Τότε[1] $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. *Ο* p' *καλείται* **συζυγής** *του* p.

Ισχύει $(p')' = p$ για κάθε $p \in [1, +\infty]$.

Λήμμα 1.2.1. *Έστω* $1 < p < +\infty$ *(οπότε* $1 < p' < +\infty$*) και* $0 \leq a, b < +\infty$. *Τότε:*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $a^p = b^{p'}$.

Απόδειξη. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(*i*) $a = 0$. Τότε η ανισότητα γίνεται $0 \leq \dfrac{1}{p'} b^{p'}$ που ισχύει προφανώς. Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $b = 0$, δηλαδή αν και μόνον αν $a^p = b^{p'}$.

[1] με τη συνθήκη: $\frac{1}{+\infty} = 0$ και $\frac{1}{0} = +\infty$

(ii) $b = 0$. Τότε η ανισότητα γίνεται $0 \leq \frac{1}{p}a^p$ που ισχύει προφανώς. Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $a = 0$, δηλαδή αν και μόνον αν $a^p = b^{p'}$.

(iii) $0 < a, b < +\infty$. Η ανισότητα τότε γίνεται: $\frac{ab}{b^{p'}} \leq \frac{1}{p}\frac{a^p}{b^{p'}} + \frac{1}{p'}$ και αν θέσουμε $t = \frac{a}{b^{p'/p}}$ η ανισότητα γίνεται: $t \leq \frac{1}{p}t^p + \frac{1}{p'}$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(t) = \frac{1}{p}t^p - t + \frac{1}{p'}$. Τότε:

$$f'(t) = t^{p-1} - 1 \begin{cases} > 0, & t > 1, \\ = 0, & t = 1, \\ < 0, & t < 1. \end{cases}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$. Άρα $\forall t \in (0, +\infty)\backslash\{1\} : \ f(t) > f(1) = 0$. Άρα ισχύει η ανισότητα και μάλιστα γίνεται ισότητα αν και μόνον αν $t = 1$ ή, ισοδύναμα, αν και μόνον αν $a^p = b^{p'}$.

$\square$

Πρόταση 1.2.2. (Ανισότητα Hölder) *Έστω $1 \leq p, p' \leq +\infty$. Ισχύει ότι:*

$$\forall a = (a_1, ..., a_m), b = (b_1, ..., b_m) \in \mathbb{R}^m : \qquad \big|(a|b)\big| \leq \|a\|_p \|b\|_{p'}.$$

Η ισότητα ισχύει για κάποια $a, b \in \mathbb{R}^m$ αν και μόνον αν:

(i) $\forall j : \quad a_j b_j \geq 0 \quad$ *ή* $\quad \forall j : \quad a_j b_j \leq 0 \qquad$ *και*

(ii) *(α) αν* $p = 1$, $p' = +\infty$, *τότε* $\quad \forall a_j \neq 0 : \ |b_j| = \|b\|_\infty$.

(β) αν $p = +\infty$, $p' = 1$, *τότε* $\quad \forall b_j \neq 0 : \ |a_j| = \|a\|_\infty$.

(γ) αν $1 < p, p' < +\infty$, *τότε*

είτε $\ \exists t \geq 0 \ \forall j : \quad |a_j|^p = t|b_j|^{p'}$,

είτε $\ \exists t \geq 0 \ \forall j : \quad |b_j|^{p'} = t|a_j|^p$.

Απόδειξη. Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις ανάλογα με τις τιμές των p, p':

(α) $p = 1$ και $p' = +\infty$.

$$\begin{aligned} |(a|b)| &= |a_1 b_1 + ... + a_m b_m| \ \leq \ |a_1||b_1| + ... + |a_m||b_m| \\ &\leq |a_1|\|b\|_\infty + ... + |a_m|\|b\|_\infty \ = \ (|a_1| + ... + |a_m|)\|b\|_\infty \\ &= \|a\|_1 \|b\|_\infty. \end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν (i) είτε $\ \forall j : \ a_j b_j \geq 0 \ $ είτε $\ \forall j : a_j b_j \leq 0$ και (ii) $\forall a_j \neq 0 : |b_j| = \|b\|_\infty$.

(β) $p=+\infty$ και $p'=1$.

Απόλυτα συμμετρικά με το (a).

(γ) $1<p,p'<+\infty$.

Αν $\|a\|_p=0$, τότε $\forall j: \quad a_j=0$, οπότε η ανισότητα ισχύει ως ισότητα $0=0$ και, με $t=0$, ισχύει $\forall j: \quad |a_j|^p=t|b_j|^{p'}$. Ομοίως, αν $\|b\|_{p'}=0$, τότε η ανισότητα ισχύει ως ισότητα $0=0$ και, με $t=0$, ισχύει $\forall j$: $|b_j|^{p'}=t|a_j|^p$. Μένει η περίπτωση $\|a\|_p>0,\ \|b\|_{p'}>0$. Τότε:

$$\begin{aligned}
\big|(a|b)\big| &= |a_1b_1+...+a_mb_m| \\
&\leq |a_1||b_1|+...+|a_m||b_m| \\
&= \left(\frac{|a_1||b_1|}{\|a\|_p\|b\|_{p'}}+...+\frac{|a_m||b_m|}{\|a\|_p\|b\|_{p'}}\right)\|a\|_p\|b\|_{p'} \\
&\leq \left(\frac{1}{p}\frac{|a_1|^p}{\|a\|_p^p}+\frac{1}{p'}\frac{|b_1|^{p'}}{\|b\|_{p'}^{p'}}+...+\frac{1}{p}\frac{|a_m|^p}{\|a\|_p^p}+\frac{1}{p'}\frac{|b_m|^{p'}}{\|b\|_{p'}^{p'}}\right)\|a\|_p\|b\|_{p'} \\
&= \left(\frac{1}{p}\frac{|a_1|^p+...+|a_m|^p}{\|a\|_p^p}+\frac{1}{p'}\frac{|b_1|^{p'}+...+|b_m|^{p'}}{\|b\|_{p'}^{p'}}\right)\|a\|_p\|b\|_{p'} \\
&= \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}\right)\|a\|_p\|b\|_{p'} \\
&= \|a\|_p\|b\|_{p'}.
\end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν:

(i) $\forall j: \quad a_ib_j\geq 0 \quad$ ή $\quad \forall j: \quad a_ib_j\leq 0 \quad$ και

(ii)

$$\forall j: \quad \frac{|a_i|^p}{\|a\|_p^p}=\frac{|b_i|^{p'}}{\|b\|_{p'}^{p'}} \qquad .$$

Αν ισχύει η (ii) τότε, με $t=\dfrac{\|a\|_p^p}{\|b\|_{p'}^{p'}}$, ισχύει $\forall j: \quad |a_j|^p=t|b_j|^{p'}$.

Αντίστροφα: αν υπάρχει $t\geq 0$ ώστε $\forall j: \quad |a_j|^p=t|b_j|^{p'}$, τότε $|a_1|^p+...+|a_m|^p=t(|b_1|^{p'}+...+|b_m|^{p'})$, δηλαδή $\|a\|_p^p=t\ \|b\|_{p'}^{p'}$, και το (ii) προκύπτει από την διαίρεση των δύο παραπάνω σχέσεων.

□

Πρόταση 1.2.3. *Έστω* $1 \le p_1, p_2 < +\infty$ *και* $t \in (0,1)$. *Για κάθε* $a \in \mathbb{R}^m$ *ισχύει*

$$\|a\|_p^p \le \|a\|_{p_1}^{p_1 t} \|a\|_{p_2}^{p_2(1-t)},$$

όπου $p = tp_1 + (1-t)p_2$.

Απόδειξη. Ορίζουμε $q = \frac{1}{t}$, οπότε $q' = \frac{1}{1-t}$. Τότε

$$\begin{aligned} \|a\|_p^p &= |a_1|^p + \dots + |a_m|^p = |a_1|^{p_1 t}|a_1|^{p_2(1-t)} + \dots + |a_m|^{p_1 t}|a_m|^{p_2(1-t)} \\ &\le \Big(|a_1|^{p_1 t q} + \dots + |a_m|^{p_1 t q}\Big)^{1/q} \Big(|a_1|^{p_2(1-t)q'} + \dots + |a_m|^{p_2(1-t)q'}\Big)^{1/q'} \\ &= \|a\|_{p_1}^{p_1 t} \|a\|_{p_2}^{p_2(1-t)q'}. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 1.2.4. (Ανισότητα Minkowski) *Έστω* $1 \le p \le +\infty$. *Τότε*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^m : \quad \|a+b\|_p \le \|a\|_p + \|b\|_p.$$

Απόδειξη. Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις ανάλογα με τις τιμές του p:

(α) $p = 1$. Τότε

$$\begin{aligned} \|a+b\|_1 &= |a_1 + b_1| + \dots + |a_m + b_m| \\ &\le |a_1| + |b_1| + \dots + |a_m| + |b_m| = \|a\|_1 + \|b\|_1. \end{aligned}$$

(β) $p = +\infty$. Τότε $|a_j + b_j| \le |a_j| + |b_j| \le \|a\|_\infty + \|b\|_\infty$. Άρα:

$$\|a+b\|_\infty = \max_{1 \le j \le m} |a_j + b_j| \le \|a\|_\infty + \|b\|_\infty.$$

(γ) $1 < p < +\infty$. Αν $\|a+b\|_p = 0$, τότε η ανισότητα ισχύει προφανώς. Αρκεί λοιπόν να υποθέσουμε $\|a+b\|_p > 0$. Τότε

$$\begin{aligned} \|a+b\|_p^p &= |a_1 + b_1|^p + \dots + |a_m + b_m|^p \\ &= |a_1 + b_1||a_1 + b_1|^{p-1} + \dots + |a_m + b_m||a_m + b_m|^{p-1} \\ &\le |a_1||a_1 + b_1|^{p-1} + |b_1||a_1 + b_1|^{p-1} + \\ &\quad \dots + |a_m||a_m + b_m|^{p-1} + |b_m||a_m + b_m|^{p-1} \\ &= (|a_1||a_1 + b_1|^{p-1} + \dots + |a_m||a_m + b_m|^{p-1}) \\ &\quad + (|b_1||a_1 + b_1|^{p-1} + \dots + |b_m||a_m + b_m|^{p-1}). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder στην παραπάνω σχέση,

$$\begin{aligned}
\|a+b\|_p^p &\leq (|a_1|^p + ... + |a_m|^p)^{1/p} \\
&\quad (|a_1+b_1|^{(p-1)p'} + ... + |a_m+b_m|^{(p-1)p'})^{1/p'} \\
&\quad +(|b_1|^p + ... + |b_m|^p)^{1/p} \\
&\quad (|a_1+b_1|^{(p-1)p'} + ... + |a_m+b_m|^{(p-1)p'})^{1/p'} \\
&= \|a\|_p \|a+b\|_p^{p/p'} + \|b\|_p \|a+b\|_p^{p/p'}.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\|a+b\|_p = \|a+b\|_p^{p-p/p'} \leq \|a\|_p + \|b\|_p.$$

□

Πρόταση 1.2.5. *Η* $\|\cdot\|_p$ *είναι νόρμα στον* $\mathbb{R}^m$.

Απόδειξη. Αρκεί να ικανοποιεί τον ορισμό της νόρμας:

(i) Η $\|a\|_p \geq 0$ ισχύει για κάθε $a \in \mathbb{R}^m$ και

$$\|a\|_p = 0 \quad \text{αν και μόνον αν} \quad a = (0,0,...,0)\,.$$

(ii) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\|ta\|_p = (|ta_1|^p + ... + |ta_m|^p)^{1/p} = |t|\,(|a_1|^p + ... + |a_m|^p)^{1/p} = |t|\|a\|_p,$$

$$\|ta\|_\infty = \max_{1\leq j\leq m} |ta_j| = |t| \max_{1\leq j\leq m} |a_j| = |t|\|a\|_\infty.$$

(iii) Η τριγωνική ανισότητα $\|a+b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$ είναι η ανισότητα Minkowski.

□

Ορισμός: *Ορίζουμε:*

$$B_p(\mathbb{R}^m) = \left\{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_p \leq 1\right\}, \quad S_p(\mathbb{R}^m) = \left\{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_p = 1\right\}.$$

Το $B_p(\mathbb{R}^m)$ ονομάζεται **μοναδιαία p-μπάλα** του $\mathbb{R}^m$ και το $S_p(\mathbb{R}^m)$ **μοναδιαία p-σφαίρα** του $\mathbb{R}^m$.

Πρόταση 1.2.6. *Τα* $B_p(\mathbb{R}^m)$ *και* $S_p(\mathbb{R}^m)$ *είναι συμπαγή υποσύνολα του* $\mathbb{R}^m$.

Απόδειξη. Αρκεί να δειχθεί ότι είναι κλειστά και φραγμένα.

(*i*) Τα $B_p(\mathbb{R}^m)$ και $S_p(\mathbb{R}^m)$ είναι φραγμένα διότι, αν $x \in B_p(\mathbb{R}^m)$ ή $x \in S_p(\mathbb{R}^m)$, τότε $\forall j : |x_j| \leq \|x\|_p \leq 1$, οπότε $\sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_m|^2} \leq \sqrt{m}$.

(*ii*) Έστω ακολουθία $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, ..., x_m^{(k)})$ στη μπάλα $B_p(\mathbb{R}^m)$ και $x^{(k)} \to x = (x_1, ..., x_m)$. Άρα $\forall j : x_j^{(k)} \to x_j$.

(α) Αν $1 \leq p < +\infty$, τότε:

$$\left\|x^{(k)}\right\|_p = \left(\left|{x_1}^{(k)}\right|^p + ... + \left|{x_m}^{(k)}\right|^p\right)^{1/p} \to \left(|x_1|^p + ... + |x_m|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p.$$

και, επειδή $\forall k : \left\|x^{(k)}\right\|_p \leq 1$, παίρνουμε $\|x\|_p \leq 1$, άρα $x \in B_p(\mathbb{R}^m)$

(β) Αν $p = +\infty$, τότε $\forall j, k : \left|{x_j}^{(k)}\right| \leq 1$, οπότε $|x_j| \leq 1$ και, επομενως, $x \in B_\infty(\mathbb{R}^m)$.

Άρα το $B_p(\mathbb{R}^m)$ είναι κλειστό και, ομοίως, το $S_p(\mathbb{R}^m)$ είναι επίσης κλειστό.

□

Πρόταση 1.2.7. *Έστω $a = (a_1, ..., a_m) \in \mathbb{R}^m$. Τότε:*

1. $\|a\|_p = \max\left\{\left|(a|b)\right| : b \in B_{p'}(\mathbb{R}^m)\right\}$
$= \max\left\{\left|(a|b)\right| : b \in S_{p'}(\mathbb{R}^m)\right\}.$

2. *Ο αριθμός $\|a\|_p$ είναι ο ελάχιστος M για τον οποίο ισχύει:*

$$\forall b \in \mathbb{R}^m : \ \left|(a|b)\right| \leq M \|b\|_{p'}.$$

3. *Αν τα a_j δεν είναι όλα 0 και $\left|(a|b)\right| = \|a\|_p$ για κάποιο $b \in B_{p'}(\mathbb{R}^m)$, τότε $b \in S_{p'}(\mathbb{R}^m)$.*

Απόδειξη.

1. Κατ' αρχάς ισχύει:

$$\begin{aligned}
\sup\left\{\left|(a|b)\right| : b \in S_{p'}(\mathbb{R}^m)\right\} &\le \sup\left\{\left|(a|b)\right| : b \in B_{p'}(\mathbb{R}^m)\right\} \\
&\le \sup\left\{\|a\|_p\|b\|_{p'} : b \in B_{p'}(\mathbb{R}^m)\right\} \\
&\le \sup\left\{\|a\|_p : b \in B_{p'}(\mathbb{R}^m)\right\} \\
&= \|a\|_p.
\end{aligned}$$

Άρα αρκεί να βρεθεί ένα στοιχείο του μικρότερου συνόλου που να είναι ίσο με $\|a\|_p$. Δηλαδή αρκεί να βρεθεί $b \in S_{p'}(\mathbb{R}^m)$ ώστε $|(a|b)| = \|a\|_p$. Αν $\|a\|_p = 0$, τότε $|(a|b)| = \|a\|_p$ για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$. Άρα αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση $\|a\|_p > 0$. Έστω λοιπόν $\|a\|_p > 0$.

(i) Αν $1 < p, p' < +\infty$, ορίζουμε:

$$b_j = \begin{cases} \dfrac{|a_j|^{p/p'}}{\|a\|_p^{p/p'}}, & a_j \ge 0, \\ -\dfrac{|a_j|^{p/p'}}{\|a\|_p^{p/p'}}, & a_j < 0. \end{cases}$$

Τότε $\|b\|_{p'} = 1$ και $|(a|b)| = \|a\|_p$.

(ii) Αν $p = 1,\ p' = +\infty$, ορίζουμε:

$$b_j = \begin{cases} +1, & \text{αν } a_j > 0, \\ 0, & \text{αν } a_j = 0, \\ -1, & \text{αν } a_j < 0. \end{cases}$$

Τότε $\|b\|_{p'} = 1$ και $|(a|b)| = \|a\|_p$.

(iii) Αν $p = +\infty, p' = 1$, ορίζουμε N να είναι το πλήθος των j για τα οποία $|a_j| = \|a\|_\infty$ και

$$b_j = \begin{cases} \dfrac{1}{N}, & \text{αν } a_j = \|a\|_\infty, \\ -\dfrac{1}{N}, & \text{αν } a_j = -\|a\|_\infty, \\ 0, & \text{αν } |a_j| < \|a\|_\infty. \end{cases}$$

Τότε $\|b\|_{p'} = 1$ και $|(a|b)| = \|a\|_p$.

2. Από την ανισότητα Hölder γνωρίζουμε οτι ο $M = \|a\|_p$ είναι ένας αριθμός που ικανοποιεί την $\left| (a|b) \right| \leq M\|b\|_{p'}$ για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$. Έστω M οποιοσδήποτε αριθμός με $\left| (a|b) \right| \leq M\|b\|_{p'}$ για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$. Τότε $\|a\|_p = \max\left\{ \left| (a|b) \right| : \ b \in S_{p'}(\mathbb{R}^m) \right\} \leq M$.

3. Αν τα a_j δεν είναι όλα μηδέν και $\left| (a|b) \right| = \|a\|_p$ για κάποιο $b \in B_{p'}(\mathbb{R}^m)$, τότε $\|a\|_p = \left| (a|b) \right| \leq \|a\|_p\|b\|_{p'}$ και, επειδή $\|a\|_p \neq 0$, θα ισχύει $1 \leq \|b\|_{p'}$. Επειδή $b \in B_{p'}(\mathbb{R}^m)$, συνεπάγεται $b \in S_{p'}(\mathbb{R}^m)$.

□

1.3 Διγραμμικές μορφές.

Ορισμός: *Έστω $a_{ij} \in \mathbb{R}$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$ με $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Ορίζουμε*

$$A_{\mathbb{R}}(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$

όπου $x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$, $\quad y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε επίσης

$$M_{\mathbb{R}}(p,q) = \sup\left\{ |A_{\mathbb{R}}(x,y)| \ : \ x \in B_p(\mathbb{R}^m) \ , \ y \in B_q(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Πρόταση 1.3.1. *Το $A_{\mathbb{R}}(x,y)$ είναι γραμμικό ως προς x στον $\mathbb{R}^m$ και ως προς y στον $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{R}}(\lambda x_1 + \mu x_2, y) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda x_1 + \mu x_2)_i y_j \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda x_{1,i} + \mu x_{2,i}) y_j \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{1,i}y_j + \mu \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{2,i}y_j \\ &= \lambda A_{\mathbb{R}}(x_1, y) + \mu A_{\mathbb{R}}(x_2, y). \end{aligned}$$

Ακριβώς όμοια δείχνουμε ότι $A_{\mathbb{R}}(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda A_{\mathbb{R}}(x, y_1) + \mu A_{\mathbb{R}}(x, y_2)$. □

Λόγω της παραπάνω ιδιότητάς του, το $A_{\mathbb{R}}(x,y)$ ονομάζεται **διγραμμική μορφή**. Τωρα παρατηρούμε τα εξής:

1. Αν όλα τα a_{ij} είναι μηδέν τότε $A_{\mathbb{R}}(x,y) \equiv 0$ και, επομένως, $M_{\mathbb{R}}(p,q) = 0$ για κάθε p, q.

2. Αν κάποιο a_{ij} είναι $\neq 0$, τότε $M_{\mathbb{R}}(p,q) > 0$.

Πράγματι, αν πάρουμε $x = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, όπου το 1 βρίσκεται στην i-οστή θέση και $y = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, όπου το 1 βρίσκεται στην j-οστή θέση, τότε $M_{\mathbb{R}}(p,q) \geq |A_{\mathbb{R}}(x,y)| = |a_{ij}| > 0$.

Πρόταση 1.3.2. *Έστω $1 \leq p, q \leq +\infty$. Τότε*

1. $M_{\mathbb{R}}(p,q) = \max\left\{|A_{\mathbb{R}}(x,y)| : x \in B_p\left(\mathbb{R}^m\right), y \in B_q\left(\mathbb{R}^n\right)\right\}$.

2. *Αν τα a_{ij} δεν είναι όλα μηδέν και $|A_{\mathbb{R}}(x_0,y_0)| = M_{\mathbb{R}}(p,q)$ για κάποια $x_0 \in B_p\left(\mathbb{R}^m\right)$, $y_0 \in B_q\left(\mathbb{R}^n\right)$, τότε $x_0 \in S_p\left(\mathbb{R}^m\right)$, $y_0 \in S_q\left(\mathbb{R}^n\right)$.*

3. $M_{\mathbb{R}}(p,q) = \max\left\{|A_{\mathbb{R}}(x,y)| : x \in S_p\left(\mathbb{R}^m\right), y \in S_q\left(\mathbb{R}^n\right)\right\}$.

Απόδειξη.

1. Η $A_{\mathbb{R}}(x,y)$ είναι συνεχής συνάρτηση των x, y (ως πολυώνυμο των x, y). Υπάρχουν ακολουθίες $\left\{x^{(k)}\right\} \in B_p\left(\mathbb{R}^m\right)$ και $\left\{y^{(k)}\right\} \in B_q\left(\mathbb{R}^n\right)$ τέτοιες ώστε $\mid A_{\mathbb{R}}(x^{(k)}, y^{(k)}) \mid \to M_{\mathbb{R}}(p,q)$. Επειδή τα $B_p(\mathbb{R}^m)$ και $B_q(\mathbb{R}^n)$ είναι συμπαγή σύνολα θα υπάρχουν υπακολουθίες $\left\{x^{(k_l)}\right\}$, $\left\{y^{(k_l)}\right\}$ (με κοινούς δείκτες) ώστε:

$$\begin{aligned} x^{(k_l)} &\to \text{ κάποιο } x \in B_p\left(\mathbb{R}^m\right), \\ y^{(k_l)} &\to \text{ κάποιο} y \in B_q\left(\mathbb{R}^n\right). \end{aligned}$$

   Τότε $|A_{\mathbb{R}}(x,y)| = \lim_{l\to+\infty} \mid A_{\mathbb{R}}(x^{(k_l)}, y^{(k_l)}) \mid = M_{\mathbb{R}}(p,q)$. Άρα στον ορισμό του $M_{\mathbb{R}}(p,q)$ το sup μπορεί να αντικατασταθεί με max.

2. Έστω ότι τα a_{ij} δεν είναι όλα μηδέν. Και έστω επίσης ότι υπάρχουν $x_0 \in B_p\left(\mathbb{R}^m\right), y_0 \in B_q\left(\mathbb{R}^n\right)$ τέτοια ώστε: $|A_{\mathbb{R}}(x_0,y_0)| = M_{\mathbb{R}}(p,q)$ με ένα τουλάχιστον από τα $\|x_0\|_p$, $\|y_0\|_q$ να είναι < 1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $\|x_0\|_p < 1$.

   Κατ' αρχάς $\|x_0\|_p > 0$. Διότι, αν $\|x_0\|_p = 0$, τότε $x_0 = 0$, οπότε $M_{\mathbb{R}}(p,q) = |A_{\mathbb{R}}(x_0,y_0)| = 0$, που είναι άτοπο.

   Τώρα θεωρούμε $t = \dfrac{1}{\|x_0\|_p} > 1$, οπότε $tx_0 \in B_p\left(\mathbb{R}^m\right)$. Άρα $tM_{\mathbb{R}}(p,q) = t|A_{\mathbb{R}}(x_0,y_0)| = |A_{\mathbb{R}}(tx_0,y_0)| \leq M_{\mathbb{R}}(p,q)$ και, επειδή $M_{\mathbb{R}}(p,q) > 0$, παίρνουμε $t \leq 1$. Άτοπο!

3. Αν δεν είναι όλα τα a_{ij} ίσα με μηδέν, τότε η απόδειξη του (3) είναι άμεση από τα δύο προηγούμενα και από το ότι

$$\begin{aligned}&\max\{|A_{\mathbb{R}}(x,y)| : x \in S_p(\mathbb{R}^m), y \in S_q(\mathbb{R}^n)\}\\ &\qquad\qquad \le \max\{|A_{\mathbb{R}}(x,y)| : x \in B_p(\mathbb{R}^m), y \in B_q(\mathbb{R}^n)\}.\end{aligned}$$

Αν ολα τα a_{ij} είναι ίσα με μηδέν τότε $A_{\mathbb{R}}(x,y) \equiv 0$, οπότε $M_{\mathbb{R}}(p,q) = 0$ και το $|A_{\mathbb{R}}(x,y)|$ μεγιστοποιείται σε οποιαδήποτε x, y και επομένως και σε οποιαδήποτε $x \in S_p(\mathbb{R}^m), y \in S_q(\mathbb{R}^n)$.

□

Πρόταση 1.3.3. *Το $M_{\mathbb{R}}(p,q)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός M για τον οποίο ισχύει:*

$$\forall x \in \mathbb{R}^m,\ \ \forall y \in \mathbb{R}^n : \qquad |A_{\mathbb{R}}(x,y)| \le M\|x\|_p\|y\|_q.$$

Απόδειξη. Αν $x = 0$ ή $y = 0$, τότε η $|A_{\mathbb{R}}(x,y)| = M_{\mathbb{R}}(p,q)\|x\|_p\|y\|_q$ γίνεται $0 \le 0$ που ισχύει. Αν $x \neq 0$ και $y \neq 0$, τότε θέτουμε $x' = \dfrac{x}{\|x\|_p}$, $\quad y' = \dfrac{y}{\|y\|_q}$, οπότε $\|x'\|_p = \|y'\|_q = 1$. Συνεπάγεται ότι

$$|A_{\mathbb{R}}(x,y)| = |A_{\mathbb{R}}(\|x\|_p x', \|y\|_q y')| = |A_{\mathbb{R}}(x',y')|\|x\|_p\|y\|_q \le M_{\mathbb{R}}(p,q)\|x\|_p\|y\|_q$$

και η ανισότητα ισχύει με $M = M_{\mathbb{R}}(p,q)$.
Έστω ότι $\forall x \in \mathbb{R}^m, \forall y \in \mathbb{R}^n : |A_{\mathbb{R}}(x,y)| \le M\|x\|_p\|y\|_q$. Τότε $|A_{\mathbb{R}}(x,y)| \le M$ για κάθε $x \in B_p(\mathbb{R}^m)$, $y \in B_q(\mathbb{R}^n)$ και, επομένως, $M_{\mathbb{R}}(p,q) \le M$. □

1.4 Γραμμικοί μετασχηματισμοί.

Ορισμός: *Θεωρούμε τον $m \times n$ πίνακα $A_{\mathbb{R}} = (a_{ij})$ που ορίζει την διγραμμική μορφή $A_{\mathbb{R}}(x,y)$ και έστω $A_{\mathbb{R}}^t$ ο ανάστροφος πίνακας. Τότε ορίζονται οι* **γραμμικοί μετασχηματισμοί** *$S_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ και $T_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με τύπους:*

$$\begin{aligned}S_{\mathbb{R}}x &= A_{\mathbb{R}}^t \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}^m,\\ T_{\mathbb{R}}y &= A_{\mathbb{R}} \cdot y, \quad y \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε $(x|T_{\mathbb{R}}y) = (S_{\mathbb{R}}x|y) = A_{\mathbb{R}}(x,y)$, όπου το πρώτο είναι το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^m$ και το δεύτερο του $\mathbb{R}^n$:

$$(x|T_{\mathbb{R}}y) = \sum_{i=1}^m x_i (T_{\mathbb{R}}y)_i = \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i y_j = A_{\mathbb{R}}(x,y),$$

$$(S_{\mathbb{R}}x|y) = \sum_{j=1}^{n} y_j (S_{\mathbb{R}}x)_j = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j = A_{\mathbb{R}}(x,y).$$

Λόγω της ιδιότητας $(x|T_{\mathbb{R}}y) = (S_{\mathbb{R}}x|y)$ οι $T_{\mathbb{R}}, S_{\mathbb{R}}$ λέγονται **συζυγείς τελεστές**.

Πρόταση 1.4.1. *Έστω $1 \le p, q \le +\infty$. Τότε*

1. $M_{\mathbb{R}}(p,q) = \max\left\{\|S_{\mathbb{R}}x\|_{q'} : x \in B_p(\mathbb{R}^m)\right\}$
$$= \max\left\{\|S_{\mathbb{R}}x\|_{q'} : x \in S_p(\mathbb{R}^m)\right\}.$$
2. $M_{\mathbb{R}}(p,q) = \max\left\{\|T_{\mathbb{R}}y\|_{p'} : y \in B_q(\mathbb{R}^n)\right\}$
$$= \max\left\{\|T_{\mathbb{R}}y\|_{p'} : y \in S_q(\mathbb{R}^n)\right\}.$$
3. *Ο $M_{\mathbb{R}}(p,q)$ είναι ο ελάχιστος M για τον οποίο ισχύει:*
$$\forall x \in \mathbb{R}^m : \ \|S_{\mathbb{R}}x\|_{q'} \le M\|x\|_p.$$
4. *Ο $M_{\mathbb{R}}(p,q)$ είναι ο ελάχιστος M για τον οποίο ισχύει:*
$$\forall y \in \mathbb{R}^n : \ \|T_{\mathbb{R}}y\|_{p'} \le M\|y\|_q.$$

Παρατήρηση Το (3) λέει, ισοδύναμα, ότι το $M_{\mathbb{R}}(p,q)$ είναι η νόρμα του τελεστή $S_{\mathbb{R}} : \left(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p\right) \to \left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{q'}\right)$ και το (4) λέει, ισοδύναμα, ότι το $M_{\mathbb{R}}(p,q)$ είναι η νόρμα του τελεστή $T_{\mathbb{R}} : \left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q\right) \to \left(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{p'}\right)$.

Απόδειξη.

1. Έστω τυχόν $x \in B_p(\mathbb{R}^m)$. Για κάθε $y \in B_q(\mathbb{R}^n)$έχουμε: $\left|(S_{\mathbb{R}}x|y)\right| = |A_{\mathbb{R}}(x,y)| \le M_{\mathbb{R}}(p,q)$ Από την πρόταση 1.2.7 (με $a = S_{\mathbb{R}}x$) παίρνουμε $\|S_{\mathbb{R}}x\|_{q'} = \max\left\{\left|(S_{\mathbb{R}}x|y)\right| : \ y \in B_q(\mathbb{R}^n)\right\} \le M_{\mathbb{R}}(p,q)$ και, επομένως,
$$\begin{aligned} \sup\left\{\|S_{\mathbb{R}}x\|_{q'} \ : x \in S_p(\mathbb{R}^m)\right\} &\le \sup\left\{\|S_{\mathbb{R}}x\|_{q'} \ : x \in B_p(\mathbb{R}^m)\right\} \\ &\le M_{\mathbb{R}}(p,q). \end{aligned}$$
Αρκεί λοιπόν να βρεθεί ένα $x \in S_p(\mathbb{R}^m)$ τέτοιο ώστε $\|S_{\mathbb{R}}x\|_{q'} = M_{\mathbb{R}}(p,q)$. Από την πρόταση 1.3.2 υπάρχουν $x_0 \in S_p(\mathbb{R}^m)$ και $y_0 \in S_q(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε: $|A_{\mathbb{R}}(x_0,y_0)| = M_{\mathbb{R}}(p,q)$, οπότε $\left|(S_{\mathbb{R}}x_0|y_0)\right| = M_{\mathbb{R}}(p,q)$. Συνεπάγεται
$$M_{\mathbb{R}}(p,q) = \left|(S_{\mathbb{R}}x_0|y_0)\right| \le \|S_{\mathbb{R}}x_0\|_{q'}\|y_0\|_q = \|S_{\mathbb{R}}x_0\|_{q'} \le M_{\mathbb{R}}(p,q).$$
Άρα $\|S_{\mathbb{R}}x_0\|_{q'} = M_{\mathbb{R}}(p,q)$.

2. Ακριβώς όμοια με το (1).

3. Αν $x = 0$, τότε η ανισότητα $\|S_{\mathbb{R}}x\|_{q'} \leq M_{\mathbb{R}}(p,q)\|x\|_p$ γίνεται $0 \leq 0$. Αν $x \neq 0$, τότε θέτουμε $x' = \frac{x}{\|x\|_p}$. Συνεπάγεται ότι $x' \in S_p(\mathbb{R}^m)$, οπότε

$$\|S_{\mathbb{R}}x\|_{q'} = \left\|S_{\mathbb{R}}(\|x\|_p x')\right\|_{q'} = \left\|S_{\mathbb{R}}x'\right\|_{q'}\|x\|_p \leq M_{\mathbb{R}}(p,q)\|x\|_p.$$

Άρα για το $M = M_{\mathbb{R}}(p,q)$ ισχύει ότι $\forall x \in \mathbb{R}^m : \ \|S_{\mathbb{R}}x\|_{q'} \leq M\|x\|_p$.

Έστω τώρα ένα M για το οποίο ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}^m : \ \|S_{\mathbb{R}}x\|_{q'} \leq M\|x\|_p$. Τότε $\forall x \in B_p(\mathbb{R}^m) : \ \|S_{\mathbb{R}}x\|_{q'} \leq M$. Από το (1) όμως

$$M_{\mathbb{R}}(p,q) = \max\left\{\|S_{\mathbb{R}}x\|_{q'} \ : x \in B_p(\mathbb{R}^m)\right\} \leq M.$$

4. Ακριβώς όμοια με το (3).

□

Πρόταση 1.4.2. *Αν τα a_{ij} δεν είναι όλα ίσα με μηδέν και $|A_{\mathbb{R}}(x_0,y_0)| = M_{\mathbb{R}}(p,q)$ για κάποια $x_0 \in B_p(\mathbb{R}^m), y_0 \in B_q(\mathbb{R}^n)$, τότε $x_0 \in S_p(\mathbb{R}^m)$, $y_0 \in S_q(\mathbb{R}^n)$, $\|S_{\mathbb{R}}x_0\|_{q'} = M_{\mathbb{R}}(p,q)$, $\|T_{\mathbb{R}}y_0\|_{p'} = M_{\mathbb{R}}(p,q)$.*

Απόδειξη. Το ότι $\|x_0\|_p = \|y_0\|_q = 1$ είναι άμεσο από την πρόταση 1.3.2. Το ότι $\|S_{\mathbb{R}}x_0\|_{q'} = M_{\mathbb{R}}(p,q)$ αποδείχθηκε στην απόδειξη του (1) της πρότασης 1.4.1 και το ότι $\|T_{\mathbb{R}}y_0\|_{p'} = M_{\mathbb{R}}(p,q)$ αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο όπως και το $\|S_{\mathbb{R}}x_0\|_{q'} = M_{\mathbb{R}}(p,q)$. □

Κεφάλαιο 2

Το θεώρημα του *M. Riesz*

2.1 Το θεώρημα του *M. Riesz*.

Ορισμός: *Ορίζουμε τα υποσύνολα του* $\mathbb{R}^2$:

$$Q = \Big\{(\alpha,\beta) : \ \ 0 \le \alpha,\beta \le 1\Big\}, \quad T = \Big\{(\alpha,\beta) : \ \ 0 \le \alpha,\beta \le 1, \ \alpha+\beta \ge 1\Big\},$$
$$Q' = \Big\{(\alpha,\beta) : \ \ 0 < \alpha,\beta \le 1\Big\}, \quad T' = \Big\{(\alpha,\beta) : \ \ 0 < \alpha,\beta \le 1, \ \alpha+\beta \ge 1\Big\},$$
$$T_{\mathbb{R}} = \Big\{(\alpha,\beta) : 0 < \alpha,\beta < 1, \ \alpha+\beta \ge 1\Big\}.$$

Θεωρούμε την διγραμμική μορφή

$$A_{\mathbb{R}}(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$

και ορίζουμε

$$M_{\mathbb{R}}(p,q) = \max\{\ |A_{\mathbb{R}}(x,y)| \ : x \in B_p\left(\mathbb{R}^m\right), y \in B_q\left(\mathbb{R}^n\right)\}.$$

Κάνοντας μια στοιχειώδη αλλαγή συμβολισμού, θέτουμε:

$$\alpha = \frac{1}{p}, \ \ \beta = \frac{1}{q}, \quad N_{\mathbb{R}}(\alpha,\beta) = M_{\mathbb{R}}(p,q)$$

οπότε

$$N_{\mathbb{R}}(\alpha,\beta) = \max\{\ |A_{\mathbb{R}}(x,y)| \ : x \in B_{1/\alpha}\left(\mathbb{R}^m\right), y \in B_{1/\beta}\left(\mathbb{R}^n\right)\}$$

Αν $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$, ορίζουμε $\frac{1}{0} = +\infty$.

Πρόκειται να αποδείξουμε την εξής ιδιότητα του $N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta)$:

$$\forall (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in T \ \ \forall t \in (0,1): \quad N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) \leq N_{\mathbb{R}}(\alpha_1, \beta_1)^t N_{\mathbb{R}}(\alpha_2, \beta_2)^{1-t},$$

όπου $(\alpha, \beta) = t(\alpha_1, \beta_1) + (1-t)(\alpha_2, \beta_2)$.

Άν όλα τα a_{ij} είναι ίσα με μηδέν, τότε $N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) = 0$ για κάθε α, β. Σε αυτήν την περίπτωση η παραπάνω ανισότητα είναι προφανής. Άν ένα τουλάχιστον από τα a_{ij} δεν είναι μηδέν, τότε, όπως έχουμε δει, ισχύει $N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) > 0$ για κάθε α, β, οπότε η ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$\log N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) \leq t \log N_{\mathbb{R}}(\alpha_1, \beta_1) + (1-t) \log N_{\mathbb{R}}(\alpha_2, \beta_2).$$

Αυτό ισοδυναμεί με την κυρτότητα του $\log N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta)$ στο τρίγωνο T.

Θεώρημα 2.1.1. (M. Riesz) *Έστω:*

$$A_{\mathbb{R}}(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

όπου τουλάχιστον ένα από τα a_{ij} είναι $\neq 0$, και

$$N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) = \max \{ \, |A_{\mathbb{R}}(x, y)| \ : x \in B_{1/\alpha}\left(\mathbb{R}^m\right), y \in B_{1/\beta}\left(\mathbb{R}^n\right) \}.$$

Τότε η $\log N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta)$ είναι κυρτή συνάρτηση του (α, β) στο τρίγωνο T.

Σημείωση: Σε όλα τα επόμενα αποτελέσματα υποθέτουμε ότι ένα τουλάχιστον a_{ij} είναι $\neq 0$.

2.2 Χρήσιμα ενδιάμεσα λήμματα.

Λήμμα 2.2.1. *Η συνάρτηση $\log N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta)$ είναι συνεχής στο Q'.*

Απόδειξη. Έστω $(\alpha, \beta) \in Q', (\alpha', \beta') \in Q'$ και $(\alpha', \beta') \to (\alpha, \beta)$. Θα δείξουμε ότι $N_{\mathbb{R}}(\alpha', \beta') \to N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta)$. Συμβολίζουμε για το $N_{\mathbb{R}}(\alpha', \beta')$:

$$\bar{x}' = \left(\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, ..., \bar{x}'_m\right) \quad \text{και} \quad \bar{y}' = \left(\bar{y}'_1, \bar{y}'_2, ..., \bar{y}'_n\right)$$

τα σημεία που μεγιστοποιούν το $|A_{\mathbb{R}}(x, y)|$, όταν $x \in B_{1/\alpha'}\left(\mathbb{R}^m\right)$ και $y \in B_{1/\beta'}\left(\mathbb{R}^n\right)$ και αντίστοιχα για το $N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta)$ τα σημεία:

$$\bar{x} = \left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_m\right) \quad \text{και} \quad \bar{y} = \left(\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_n\right).$$

Από την πρόταση 1.3.2 συνεπάγεται ότι $\bar{x} \in S_{1/\alpha}(\mathbb{R}^m)$ και $\bar{y} \in S_{1/\beta}(\mathbb{R}^n)$. Ομοίως, $\bar{x}' \in S_{1/\alpha'}(\mathbb{R}^m)$, $\bar{y}' \in S_{1/\beta'}(\mathbb{R}^n)$. Από την πρόταση 1.3.3 γνωρίζουμε πως για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\Big| A_{\mathbb{R}}(x,y) \Big| \leq N_{\mathbb{R}}(\alpha',\beta') \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^{1/\alpha'} \right)^{\alpha'} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^{1/\beta'} \right)^{\beta'}.$$

Συγκεκριμένα, για το σημείο μεγίστου $(\bar{x},\bar{y})$:

$$N_{\mathbb{R}}(\alpha,\beta) = |A_{\mathbb{R}}(\bar{x},\bar{y})| \leq N_{\mathbb{R}}(\alpha',\beta') \left(\sum_{i=1}^{m} |\bar{x}_i|^{1/\alpha'} \right)^{\alpha'} \left(\sum_{j=1}^{n} |\bar{y}_j|^{1/\beta'} \right)^{\beta'}.$$

Άρα:

$$N_{\mathbb{R}}(\alpha',\beta') \geq \frac{N_{\mathbb{R}}(\alpha,\beta)}{\left(\sum_{i=1}^{m} |\bar{x}_i|^{1/\alpha'} \right)^{\alpha'} \left(\sum_{j=1}^{n} |\bar{y}_j|^{1/\beta'} \right)^{\beta'}}.$$

Αν πάρουμε όρια στην παραπάνω σχέση καθώς $(\alpha',\beta') \to (\alpha,\beta)$ τότε:

$$\begin{aligned} \liminf_{(\alpha',\beta') \to (\alpha,\beta)} N_{\mathbb{R}}(\alpha',\beta') &\geq \frac{N_{\mathbb{R}}(\alpha,\beta)}{\left(\sum_{i=1}^{m} |\bar{x}_i|^{1/\alpha} \right)^{\alpha} \left(\sum_{j=1}^{n} |\bar{y}_j|^{1/\beta} \right)^{\beta}} \\ &= N_{\mathbb{R}}(\alpha,\beta). \end{aligned}$$

Άρα $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2 + (\beta'-\beta)^2} < \delta_1 \;\; \Rightarrow \;\; N_{\mathbb{R}}(\alpha,\beta) - \varepsilon < N_{\mathbb{R}}(\alpha',\beta').$$

Θα δείξουμε ότι $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2 + (\beta'-\beta)^2} < \delta_2 \;\; \Rightarrow \;\; N_{\mathbb{R}}(\alpha',\beta') < N_{\mathbb{R}}(\alpha,\beta) + \varepsilon.$$

Έστω ότι υπάρχει κάποιο $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ να μην ισχύει η παραπάνω συνεπαγωγή. Τότε υπάρχουν $(\alpha'_k,\beta'_k) \to (\alpha,\beta)$ με $N_{\mathbb{R}}(\alpha'_k,\beta'_k) \geq N_{\mathbb{R}}(\alpha,\beta) + \varepsilon$. Από τις:

$$\sum_{i=1}^{m} \left| \bar{x}'_{i,k} \right|^{1/\alpha'_k} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \left| \bar{y}'_{j,k} \right|^{1/\beta'_k} = 1$$

συνεπάγεται ότι:

$$\forall i \;\; \forall j : \qquad |\bar{x}'_{i,k}| \leq 1, \quad |\bar{y}'_{j,k}| \leq 1.$$

Από το θεώρημα Bolzano-Weirstraß υπάρχει υπακολουθία (που για λόγους απλούστευσης της γραφής υποθέτουμε ότι είναι η αρχική ακολουθία) τέτοια ώστε:

$$\bar{x}'_{i,k} \to \text{κάποιο } x_i \quad \text{και} \quad \bar{y}'_{j,k} \to \text{κάποιο } y_j$$

για κάθε i και j, που σημαίνει ότι $(\bar{x}'^{(k)}, \bar{y}'^{(k)}) \to$ κάποιο (x, y). Παίρνοντας όριο βρίσκουμε ότι:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^{1/\alpha} \right)^{\alpha} = 1, \quad \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^{1/\beta} \right)^{\beta} = 1.$$

Βάσει της υπόθεσής μας:

$$\begin{aligned} N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) + \varepsilon &\leq N_{\mathbb{R}}(\alpha'_k, \beta'_k) \\ &= \left| A_{\mathbb{R}} \left(\bar{x}'^{(k)}, \bar{y}'^{(k)} \right) \right|. \end{aligned}$$

Παίρνοντας όριο:

$$\begin{aligned} N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) + \varepsilon &\leq \left| A_{\mathbb{R}}(x, y) \right| \\ &\leq N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^{1/\alpha} \right)^{\alpha} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^{1/\beta} \right)^{\beta} \\ &= N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Άτοπο! Άρα $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2} < \delta_2 \Rightarrow N_{\mathbb{R}}(\alpha', \beta') \leq N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) + \varepsilon.$$

Έστω $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Τότε:

$$\begin{aligned} \sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2} < \delta &\Rightarrow N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) - \varepsilon \leq N_{\mathbb{R}}(\alpha', \beta') \leq N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) + \varepsilon \\ &\Rightarrow \left| N_{\mathbb{R}}(\alpha', \beta') - N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα η $N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta)$ είναι συνεχής στο Q'. □

Λήμμα 2.2.2. *Όταν $\alpha \to 0^+$, τότε $N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) \to N_{\mathbb{R}}(0, \beta)$ για κάθε $\beta \in [0, 1]$ και, όταν $\beta \to 0^+$, τότε $N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) \to N_{\mathbb{R}}(\alpha, 0)$ για κάθε $\alpha \in [0, 1]$.*

Απόδειξη. Έστω $\bar{x} \in B_{\infty}(\mathbb{R}^m)$, $\bar{y} \in B_{1/\beta}(\mathbb{R}^n)$, $\bar{x}' \in B_{1/\alpha}(\mathbb{R}^m)$, $\bar{y}' \in B_{1/\beta}(\mathbb{R}^n)$ σημεία στα οποία $|A_{\mathbb{R}}(\bar{x}, \bar{y})| = N_{\mathbb{R}}(0, \beta)$ και $|A_{\mathbb{R}}(\bar{x}', \bar{y}') = N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta)$.

Γνωρίζουμε ότι $\|\bar{x}'\|_{1/\alpha} = \|\bar{y}'\|_{1/\beta} = 1$ και $\|\bar{x}\|_\infty = \|\bar{y}\|_{1/\beta} = 1$. Επειδή $\|\bar{x}'\|_\infty \leq \|\bar{x}'\|_{1/\alpha} = 1$, συνεπάγεται $\bar{x}' \in B_\infty(\mathbb{R}^m)$, οπότε

$$N_{\mathbb{R}}(\alpha,\beta) = |A_{\mathbb{R}}(\bar{x}',\bar{y}')| \leq N_{\mathbb{R}}(0,\beta).$$

Επειδή $\|\bar{x}\|_\infty$=1, συνεπάγεται $\sum_{i=1}^m |\bar{x}_i|^{1/\alpha} \leq m$ και, επομένως,

$$\left\| \frac{\bar{x}}{m^a} \right\|_{1/\alpha} \leq 1.$$

Επειδή $\|\bar{y}\|_{1/\beta} = 1$ και το $|A_{\mathbb{R}}(x,y)|$ έχει μέγιστο $N_{\mathbb{R}}(\alpha,\beta)$ όταν $x\in B_{1/\alpha}(\mathbb{R}^m)$, $y \in B_{1/\beta}(\mathbb{R}^n)$, συνεπάγεται

$$\left| A_{\mathbb{R}}\left(\frac{\bar{x}}{m^a},\bar{y}\right) \right| \leq N_{\mathbb{R}}(\alpha,\beta)$$

και, επομένως,

$$m^{-\alpha} N_{\mathbb{R}}(0,\beta) = m^{-\alpha} A_{\mathbb{R}}(\bar{x},\bar{y}) \leq N_{\mathbb{R}}(\alpha,\beta).$$

Έτσι τελικά φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι:

$$m^{-\alpha} N_{\mathbb{R}}(0,\beta) \leq N_{\mathbb{R}}(\alpha,\beta) \leq N_{\mathbb{R}}(0,\beta)$$

και, παίρνοντας όρια, εύκολα φαίνεται ότι:

$$N_{\mathbb{R}}(\alpha,\beta) \to N_{\mathbb{R}}(0,\beta) \quad \text{καθώς} \quad \alpha \to 0^+.$$

Όμοια γίνεται η απόδειξη του $N_{\mathbb{R}}(\alpha,\beta) \to N_{\mathbb{R}}(\alpha,0)$ καθώς $\beta \to 0^+$. □

Λήμμα 2.2.3. *Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο T', κυρτή στο T^* και με τις ιδιότητες $f(1,0) = \lim_{\beta\to 0} f(1,\beta)$ και $f(0,1) = \lim_{\alpha\to 0} f(\alpha,1)$ τότε η f είναι κυρτή στο T.*

Απόδειξη. Έστω $x', x'' \in T$. Για να είναι κυρτή η συνάρτηση f, αρκεί να δειχθεί ότι

$$\forall t \in (0,1): \quad f(tx' + (1-t)x'') \leq tf(x') + (1-t)f(x'').$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(*i*) $x', x'' \in T^*$. Τότε η ανισότητα ισχύει από υπόθεση.

(ii) Ένα ή και τα δύο από τα x', x'' ανήκουν στο $T' \setminus T^*$. Τότε παίρνουμε ακολουθία $\{x'_n\}$ στο T^* που τείνει στο x' και $\{x''_n\}$ στο T^* που τείνει στο x''. Επειδή τα x'_n, x''_n περιέχονται στο T^*, από υπόθεση:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall t \in (0,1): \quad f(tx'_n + (1-t)x''_n) \leq tf(x'_n) + (1-t)f(x''_n).$$

Όμως η f είναι συνεχής στο T', οπότε αν πάρουμε όρια προκύπτει ότι:

$$\forall t \in (0,1): \quad f(tx' + (1-t)x'') \leq tf(x') + (1-t)f(x'').$$

(iii) Ένα από τα x', x'' βρίσκεται σε μια από κορυφές $(1,0)$ και $(0,1)$ και το άλλο ανήκει στο T'. Για παράδειγμα έστω ότι $x'' = (1,0)$. Θεωρούμε ακολουθία $\{x''_n\}$ στο T' που τείνει στο $(1,0)$ παράλληλα στον άξονα β. Τα x', x''_n, περιέχονται στο T' οπότε από τις περιπτώσεις (i),(ii)

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall t \in (0,1): \quad f(tx' + (1-t)x''_n) \leq tf(x') + (1-t)f(x''_n).$$

Επειδή αφενός το σημείο $tx' + (1-t)x''$ ανήκει στο T' και, επομένως, $f(tx' + (1-t)x''_n) \to f(tx' + (1-t)x'')$ και αφετέρου $f(x''_n) \to f(x'')$, προκύπτει ότι:

$$\forall t \in (0,1): \quad f(tx' + (1-t)x'') \leq tf(x') + (1-t)f(x'').$$

(iv) $x' = (0,1)$ και $x'' = (1,0)$. Τότε θεωρούμε ακολουθία σημείων $\{x'_n\}$ στο T' που τείνει στο x' παράλληλα στον άξονα α. Από την περίπτωση (iii) συνεπάγεται

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall t \in (0,1): \quad f(tx'_n + (1-t)x'') \leq tf(x'_n) + (1-t)f(x'').$$

Και, επειδή αφενός το σημείο $tx' + (1-t)x''$ ανήκει στο T' και, άρα, $f(tx'_n + (1-t)x'') \to f(tx' + (1-t)x'')$ και αφετέρου $f(x'_n) \to f(x')$, προκύπτει ότι:

$$\forall t \in (0,1): \quad f(tx' + (1-t)x'') \leq tf(x') + (1-t)f(x'').$$

□

2.3 Η απόδειξη του θεωρήματος του *M. Riesz*.

Απόδειξη. Λόγω των λημματων 2.2.1-3, αρκεί να δειχθεί η κυρτότητα στο 'ημιανοικτό' τρίγωνο T^*. Από την προταση 1.1.1 αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε ζευγάρι σημείων (α_1, β_1), (α_2, β_2) στο T^* υπάρχει **ένα** (τουλάχιστον) $t \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\log N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) \leq t \log N_{\mathbb{R}}(\alpha_1, \beta_1) + (1-t) \log N_{\mathbb{R}}(\alpha_2, \beta_2),$$

όπου $(\alpha, \beta) = t(\alpha_1, \beta_1) + (1-t)(\alpha_2, \beta_2)$. Ισοδύναμα, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) \leq N_{\mathbb{R}}^t(\alpha_1, \beta_1) N_{\mathbb{R}}^{1-t}(\alpha_2, \beta_2).$$

Στο T^* ισχύει $N_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta) = M_{\mathbb{R}}(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta})$ άρα η παραπάνω σχέση μπορεί να αντικατασταθεί από την:

$$M_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right) \leq M_{\mathbb{R}}^t\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\beta_1}\right) M_{\mathbb{R}}^{1-t}\left(\frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\beta_2}\right).$$

Έστω τυχαία σημεία (α_1, β_1) και (α_2, β_2) εντός του T^*. Ορίζουμε

$$p_1 = \frac{1}{\alpha_1}, \quad p_2 = \frac{1}{\alpha_2}, \quad q_1 = \frac{1}{\beta_1}, \quad q_2 = \frac{1}{\beta_2}$$

και έστω p_1', p_2', q_1', q_2' οι συζυγείς τους. Από τις ιδιότητες των α_1, α_2, β_1, β_2, εύκολα φαίνεται πως:

$$1 < p_1,\ p_2,\ q_1,\ q_2,\ p_1',\ p_2',\ q_1',\ q_2' < +\infty.$$

Επειδή $(\alpha_1, \beta_1) \in T^*$, ισχύει $\alpha_1 + \beta_1 \geq 1$. Άρα $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} \geq 1$ και, επομένως, $p_1' \geq q_1$. Ομοίως, από την σχέση $\alpha_2 + \beta_2 \geq 1$ συμπεραίνουμε πως: $q_2' \geq p_2$. Διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες παίρνουμε $\frac{q_1}{q_2'} \leq \frac{p_1'}{p_2}$. Επειδή η συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(t) = \dfrac{t}{1-t}$ έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$ και, επειδή $0 < \dfrac{q_1}{q_2'} \leq \dfrac{p_1'}{p_2} < +\infty$, συνεπάγεται ότι:

$$\exists t \in (0,1) : \qquad \frac{q_1}{q_2'} \leq \frac{t}{1-t} \leq \frac{p_1'}{p_2}.$$

Ορίζουμε:

$$\mu = \frac{p_2}{p_1'} \frac{t}{1-t}, \quad \nu = \frac{q_1}{q_2'} \frac{1-t}{t}.$$

Λόγω της παραπάνω ανισότητας εύκολα φαίνεται πως $0 < \mu \leq 1$, $0 < \nu \leq 1$. Ορίζουμε, επίσης,

$$p = \frac{p_2 + p_1'\mu}{p_1'\mu + (1-\mu)}, \quad q = \frac{q_1 + q_2'\nu}{q_2'\nu + (1-\nu)}.$$

Από τον ορισμό τους βλέπουμε πως $1 < p, q < +\infty$. Αν μάλιστα στον ορισμό των p, q αντικαταστήσουμε τα μ, ν, έχουμε για το p:

$$p = \frac{p_2 + p_1'\mu}{p_1'\mu + (1-\mu)} = \frac{p_2 + p_2\frac{t}{1-t}}{p_2\frac{t}{1-t} + 1 - \frac{p_2}{p_1'}\frac{t}{1-t}}.$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} &= \frac{p_2\dfrac{t}{1-t} + 1 - \dfrac{p_2}{p_1'}\dfrac{t}{1-t}}{p_2 + p_2\dfrac{t}{1-t}} = \frac{\dfrac{t}{1-t} + \dfrac{1}{p_2} - \dfrac{1}{p_1'}\dfrac{t}{1-t}}{1 + \dfrac{t}{1-t}} \\
&= \frac{\left(1 - \dfrac{1}{p_1'}\right)\dfrac{t}{1-t} + \dfrac{1}{p_2}}{\dfrac{1-t+t}{1-t}} = \frac{\dfrac{1}{p_1}\dfrac{t}{1-t} + \dfrac{1}{p_2}}{\dfrac{1}{1-t}}
\end{aligned}$$

και, επομένως

$$\frac{1}{p} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_2}.$$

Όμοια βρίσκουμε πως $\dfrac{1}{q} = \dfrac{t}{q_1} + \dfrac{1-t}{q_2}$. Άρα

$$\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) = t\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right) + (1-t)\left(\frac{1}{p_2}, \frac{1}{q_2}\right)$$

και αρκεί να δειχθεί ότι:

$$M_{\mathbb{R}}(p,q) \leq M_{\mathbb{R}}^t(p_1,q_1) M_{\mathbb{R}}^{1-t}(p_2,q_2).$$

Αν τις σχέσεις που ορίζουν τα p, q τις λύσουμε ως προς p_2 και q_1 αντίστοιχα παίρνουμε:

$$p_2 = (p-1)p_1'\mu + p(1-\mu), \quad q_1 = (q-1)q_2'\nu + q(1-\nu).$$

Επειδή $0 < \mu, \nu \leq 1$ μπορούμε να θεωρήσουμε το p_2 σαν κυρτό γραμμικό συνδυασμό των $(p-1)p_1'$ και p και το q_1 σαν κυρτό γραμμικό συνδυασμό των $(q-1)q_2'$ και q.

Έστω τώρα $\bar{x} \in B_p(\mathbb{R}^m)$ και $\bar{y} \in B_q(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $|A_{\mathbb{R}}(\bar{x},\bar{y})| = M_{\mathbb{R}}(p,q)$. Από την πρόταση 1.2.3

$$\|\bar{x}\|_{p_2}^{p_2} \leq \|\bar{x}\|_{(p-1)p_1'}^{(p-1)p_1'\mu} \|\bar{x}\|_p^{p(1-\mu)}.$$

Όμως από την πρόταση 1.4.2 έχουμε ότι $\bar{x} \in S_p(\mathbb{R}^m)$ και $\bar{y} \in S_q(\mathbb{R}^n)$, οπότε $\|\bar{x}\|_p = 1$. Επομένως,

$$\|\bar{x}\|_{p_2}^{p_2} \leq \|\bar{x}\|_{(p-1)p_1'}^{(p-1)p_1'\mu}.$$

Όμοια για το q_1 θα έχουμε

$$\|\bar{y}\|_{q_1}^{q_1} \leq \|\bar{y}\|_{(q-1)q_2'}^{(q-1)q_2'\nu}.$$

Αν στις παραπάνω σχέσεις αντικαταστήσουμε τα μ, ν, τότε μετά τις απλοποιήσεις θα έχουμε:

$$\|\bar{x}\|_{p_2}^{1-t} \leq \|\bar{x}\|_{(p-1)p_1'}^{(p-1)t}, \quad \|\bar{y}\|_{q_1}^{t} \leq \|\bar{y}\|_{(q-1)q_2'}^{(q-1)(1-t)}.$$

Έστω τώρα $S_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ και $T_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ οι γραμμικοί μετασχηματισμοί με τύπους:

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{R}}x &= A_{\mathbb{R}}^t \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}^m, \\ T_{\mathbb{R}}y &= A_{\mathbb{R}} \cdot y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

όπου $A_{\mathbb{R}}$ είναι ο πίνακας (a_{ij}) που ορίζει την $A_{\mathbb{R}}(x,y)$. Από την πρόταση 1.4.2 γνωρίζουμε πως $M_{\mathbb{R}}(p,q) = \|S_{\mathbb{R}}\bar{x}\|_{q'}$. Άρα τώρα έχουμε: $\left|\,(S_{\mathbb{R}}\bar{x}|\bar{y})\,\right| = \left|\,A_{\mathbb{R}}(\bar{x},\bar{y})\,\right| = M_{\mathbb{R}}(p,q) = \|S_{\mathbb{R}}\bar{x}\|_{q'} = \|S_{\mathbb{R}}\bar{x}\|_{q'}\|\bar{y}\|_q$, δηλαδή:

$$\left|\,(S_{\mathbb{R}}\bar{x}|\bar{y})\,\right| = \|S_{\mathbb{R}}\bar{x}\|_{q'}\|\bar{y}\|_q.$$

Από την πρόταση 1.2.2 συμπεραίνουμε:

(i) $\exists s \geq 0$ τέτοιο ώστε $\forall j$: $\left|(S_{\mathbb{R}}\bar{x})_j\right|^{q'} = s^{q'}|\bar{y}_j|^q$ ή, ισοδύναμα, $\forall j$: $\left|(S_{\mathbb{R}}\bar{x})_j\right| = s|\bar{y}_j|^{q-1}$ και

(ii) $\forall j \quad (S_{\mathbb{R}}\bar{x})_j y_j \geq 0 \quad$ ή $\quad \forall j \quad (S_{\mathbb{R}}\bar{x})_j y_j \leq 0.$

Επίσης:

$$\begin{aligned} M_{\mathbb{R}}(p,q) &= \left|\,A_{\mathbb{R}}(\bar{x},\bar{y})\,\right| = (S_{\mathbb{R}}\bar{x}|\bar{y}) = \left|\sum_{j=1}^n (S_{\mathbb{R}}\bar{x})_j\bar{y}_j\right| \\ &= \sum_{j=1}^n |(S_{\mathbb{R}}\bar{x})_j||\bar{y}_j| = \sum_{j=1}^n s|\bar{y}_j|^{q-1}|\bar{y}_j| = \sum_{j=1}^n s|\bar{y}_j|^q \\ &= s\|y\|_q^{1/q} = s. \end{aligned}$$

Άρα

$$\forall j: \quad |(S_{\mathbb{R}}\bar{x})_j| = M_{\mathbb{R}}(p,q)|\bar{y}_j|^{q-1}$$

και όμοια
$$\forall i: \quad |(T_{\mathbb{R}}\bar{y})_i| = M_{\mathbb{R}}(p,q)|\bar{x}_i|^{p-1}.$$
Επομένως
$$\begin{aligned} M_{\mathbb{R}}(p,q)\|\bar{x}\|_{(p-1)p_1'}^{p-1} &= M_{\mathbb{R}}(p,q)\left(\sum_{i=1}^{m}|\bar{x}_i|^{(p-1)p_1'}\right)^{\frac{1}{(p-1)p_1'}(p-1)} \\ &= \left(M_{\mathbb{R}}^{p_1'}(p,q)\sum_{i=1}^{m}|\bar{x}_i|^{(p-1)p_1'}\right)^{\frac{1}{p_1'}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m}|(T_{\mathbb{R}}\bar{y})_i|^{p_1'}\right)^{\frac{1}{p_1'}} \\ &= \|T_{\mathbb{R}}\bar{y}\|_{p_1'} \end{aligned}$$
και, λόγω του (4) της πρότασης 1.4.1:
$$M_{\mathbb{R}}(p,q)\|\bar{x}\|_{(p-1)p_1'}^{p-1} = \|T_{\mathbb{R}}\bar{y}\|_{p_1'} \le M_{\mathbb{R}}(p_1,q_1)\|\bar{y}\|_{q_1}.$$
Ακριβώς όμοια προκύπτει ότι:
$$M_{\mathbb{R}}(p,q)\|\bar{y}\|_{(q-1)q_2'}^{q-1} = \|S_{\mathbb{R}}\bar{x}\|_{q_2'} \le M_{\mathbb{R}}(p_2,q_2)\|\bar{x}\|_{p_2}.$$
Από τις παραπάνω ανισότητες συνεπάγεται ότι:
$$M_{\mathbb{R}}(p,q)\|\bar{x}\|_{(p-1)p_1'}^{(p-1)t}\|\bar{y}\|_{(q-1)q_2'}^{(q-1)(1-t)} \le M_{\mathbb{R}}^{t}(p_1,q_1)M_{\mathbb{R}}^{1-t}(p_2,q_2)\|\bar{y}\|_{q_1}^{t}\|\bar{x}\|_{p_2}^{1-t}.$$
Όμως νωρίτερα αποδείξαμε ότι:
$$\|\bar{x}\|_{p_2}^{1-t} \le \|\bar{x}\|_{(p-1)p_1'}^{(p-1)t}, \quad \|\bar{y}\|_{q_1}^{t} \le \|\bar{y}\|_{(q-1)q_2'}^{(q-1)(1-t)}.$$
Άρα
$$M_{\mathbb{R}}(p,q) \le M_{\mathbb{R}}^{t}(p_1,q_1)M_{\mathbb{R}}^{1-t}(p_2,q_2).$$
□

Κεφάλαιο 3

Το θεώρημα του $G. Thorin$

3.1 Εσωτερικό γινόμενο και νόρμα στον $\mathbb{C}^m$.

Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$ συμβολίζουμε $\bar{z} = x - iy$ τον **συζυγή** του z και $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ το **μέτρο** του. Κάθε $z \in \mathbb{C}$ έχει **πολική αναπαράσταση**

$$z = re^{i\vartheta},$$

όπου $r = |z|$ και $\vartheta \in \mathbb{R}$. Αν $z \neq 0$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\vartheta \in (-\pi, \pi]$ το οποίο ονομάζεται **πρωτεύον όρισμα** του z και συμβολίζεται $\mathrm{Arg}z$. Το σύνολο των ϑ της πολικής αναπαράστασης του $z \neq 0$ δίδεται από την:

$$\vartheta = \mathrm{Arg}z + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ορισμός: *Έστω $z = (z_1, z_2, ..., z_m) \in \mathbb{C}^m$ και $w = (w_1, w_2, ..., w_m) \in \mathbb{R}^m$. Ορίζουμε*

$$(z|w) = z_1\overline{w_1} + ... + z_m\overline{w_m}$$

το μιγαδικό **εσωτερικό γινόμενο**.

Ορισμός: *Μια απεικόνιση $\|\cdot\| : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}$ λέγεται* **νόρμα** *αν ισχύει:*

1. $\forall z \in \mathbb{C}^m :$ $\quad \|z\| \geq 0 \quad$ και, αν $\quad \|z\| = 0, \quad$ τότε $\quad z = 0.$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall z \in \mathbb{C}^m :$ $\quad \|\lambda z\| = |\lambda| \|z\|.$
3. $\forall z, w \in \mathbb{C}^m :$ $\quad \|z + w\| \leq \|z\| + \|w\|.$

Ορισμός: *Αν $z = (z_1, ..., z_m) \in \mathbb{C}^m$ ορίζουμε:*

$$\|z\|_p = \begin{cases} \left(|z_1|^p + |z_2|^p + ... + |z_m|^p\right)^{1/p}, & \text{αν } 1 \leq p < +\infty, \\ \max_{1 \leq j \leq m} |z_j|, & \text{αν } p = +\infty. \end{cases}$$

Όλα τα συμπεράσματα των ενοτήτων 1.2, 1.3 και 1.4 ισχύουν και για μιγαδικούς αριθμούς, εκτός από ελάχιστες αλλαγές στις διατυπωσεις ή στις αποδείξεις τους.

Η πρόταση 1.2.2 γίνεται:

Πρόταση 3.1.1. *Έστω $1 \leq p, p' \leq +\infty$. Ισχύει ότι*

$$\forall z = (z_1, ..., z_m), w = (w_1, ..., w_m) \in \mathbb{C}^m : \quad \big| (z|w) \big| \leq \|z\|_p \|w\|_{p'}.$$

Η ισότητα ισχύει για κάποια $z, w \in \mathbb{C}^m$ αν και μόνον αν:

(i) για τα $z_j\overline{w_j} \neq 0$, το $\mathrm{Arg}(z_j\overline{w_j})$ είναι ανεξάρτητο του j και

(ii) (α) αν $p = 1$, $p' = +\infty$, τότε $\forall z_j \neq 0 : \ |w_j| = \|w\|_\infty$

(β) αν $p = +\infty$, $p' = 1$, τότε $\forall w_j \neq 0 : \ |z_j| = \|z\|_\infty$

(γ) αν $1 < p, p' < +\infty$, τότε

είτε $\exists t \geq 0 \ \forall j : \quad |z_j|^p = t|w_j|^{p'}$

είτε $\exists t \geq 0 \ \forall j : \quad |w_j|^{p'} = t|z_j|^p$.

Η απόδειξή της είναι ακριβώς ίδια με την απόδειξη της πρότασης 1.2.2, εκτός από το σημείο στο οποίο διατυπώνεται η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει $|a_1b_1 + ... + a_mb_m| = |a_1||b_1| + ... + |a_m||b_m|$. Στην περίπτωση των πραγματικών μεταβλητών η συνθήκη είναι: είτε $\forall j : \ a_jb_j \geq 0$ είτε $\forall j : a_jb_j \leq 0$. Στην περίπτωση των μιγαδικών μεταβλητών η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει $|z_1\overline{w_1} + ... + z_m\overline{w_m}| = |z_1||w_1| + ... + |z_m||w_m|$ είναι η: για όλα τα $z_j\overline{w_j} \neq 0$ το $\mathrm{Arg}(z_j\overline{w_j})$ είναι ανεξάρτητο του j.

Κατόπιν έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα.

Πρόταση 3.1.2. *Έστω $1 \leq p_1, p_2 < +\infty$ και $t \in (0,1)$. Για κάθε $z \in \mathbb{C}^m$ ισχύει*

$$\|z\|_p^p \leq \|z\|_{p_1}^{p_1 t} \|z\|_{p_2}^{p_2(1-t)},$$

όπου $p = tp_1 + (1-t)p_2$.

Πρόταση 3.1.3. (Ανισότητα Minkowski) *Έστω $1 \leq p \leq +\infty$. Τότε*

$$\forall z, w \in \mathbb{C}^m : \quad \|z + w\|_p \leq \|z\|_p + \|w\|_p.$$

Πρόταση 3.1.4. *Η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα στον $\mathbb{C}^m$.*

Οι αποδείξεις των προτάσεων αυτών είναι ίδιες με τις αποδείξεις των προτάσεων 1.2.3, 1.2.4 και 1.2.5.

Ορισμός: *Ορίζουμε:*

$$B_p(\mathbb{C}^m) = \Big\{ z \in \mathbb{C}^m : \|z\|_p \leq 1 \Big\}, \quad S_p(\mathbb{C}^m) = \Big\{ z \in \mathbb{C}^m : \|z\|_p = 1 \Big\},$$

που ονομάζονται **μοναδιαία p-μπάλα** του $\mathbb{C}^m$ και **μοναδιαία p-σφαίρα** του $\mathbb{C}^m$ αντίστοιχα.

Πρόταση 3.1.5. *Τα $B_p(\mathbb{C}^m)$ και $S_p(\mathbb{C}^m)$ είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}^m$.*

Η απόδειξη είναι ίδια με την απόδειξη της πρότασης 1.2.6.

Πρόταση 3.1.6. *Έστω $z = (z_1, ..., z_m) \in \mathbb{C}^m$. Τότε:*

1. $\|z\|_p = \max \big\{ \big| (z|w) \big| : w \in B_{p'}(\mathbb{C}^m) \big\}$
$= \max \big\{ \big| (z|w) \big| : w \in S_{p'}(\mathbb{C}^m) \big\}$.

2. *Ο αριθμός $\|z\|_p$ είναι ο ελάχιστος M για τον οποίο ισχύει:*

$$\forall w \in \mathbb{C}^m : \quad \big| (z|w) \big| \leq M \|w\|_{p'}.$$

3. *Αν τα z_j δεν είναι όλα 0 και $\big| (z|w) \big| = \|z\|_p$ για κάποιο $w \in B_{p'}(\mathbb{C}^m)$, τότε $w \in S_{p'}(\mathbb{C}^m)$.*

Η μόνη αλλαγή στην απόδειξη της αντίστοιχης πρότασης 1.2.7 είναι στο μέρος 1, όπου ο ορισμός των b_j θα γίνει τώρα

$$w_j = \begin{cases} \dfrac{z_j}{|z_j|} \cdot \dfrac{|z_j|^{p/p'}}{\|z\|_p^{p/p'}}, & \text{αν } z_j \neq 0, \\ 0, & \text{αν } z_j = 0. \end{cases}$$

στην περίπτωση (i) ή

$$w_j = \begin{cases} \dfrac{z_j}{|z_j|}, & \text{αν } z_j \neq 0, \\ 0, & \text{αν } z_j = 0. \end{cases}$$

στην περίπτωση (ii) ή

$$w_j = \begin{cases} \dfrac{z_j}{|z_j|} \cdot \dfrac{1}{N}, & \text{αν } |z_j| = \|z\|_\infty, \\ 0, & \text{αν } |z_j| < \|z\|_\infty. \end{cases}$$

στην περίπτωση (iii).

Ορισμός: *Έστω* $a_{ij} \in \mathbb{C}$ *για κάθε* $i, j \in \mathbb{N}$ *με* $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. *Ορίζουμε*

$$A_{\mathbb{C}}(z,w) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_i w_j$$

όπου $z = (z_1, ..., z_m) \in \mathbb{C}^m, \quad w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n$. *Ορίζουμε επίσης*

$$M_{\mathbb{C}}(p,q) = \sup\{|A_{\mathbb{C}}(z,w)| \ : \ z \in B_p(\mathbb{C}^m) \ , \ w \in B_q(\mathbb{C}^n)\},$$

$$N_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta) = \sup\left\{|A_{\mathbb{C}}(z,w)| \ : \ z \in B_{1/\alpha}(\mathbb{C}^m) \ , \ w \in B_{1/\beta}(\mathbb{C}^n)\right\}.$$

Πρόταση 3.1.7. *Το* $A_{\mathbb{C}}(z,w)$ *είναι γραμμικό ως προς* z *στον* $\mathbb{C}^m$ *και ως προς* w *στον* $\mathbb{C}^n$.

Πρόταση 3.1.8. *Έστω* $1 \leq p, q \leq +\infty$. *Τότε*

1. $M_{\mathbb{C}}(p,q) = \max\{|A_{\mathbb{C}}(z,w)| : z \in B_p(\mathbb{C}^m), w \in B_q(\mathbb{C}^n)\}$.
2. *Αν τα* a_{ij} *δεν είναι όλα μηδέν και* $|A_{\mathbb{C}}(z_0,w_0)| = M_{\mathbb{C}}(p,q)$ *για κάποια* $z_0 \in B_p(\mathbb{C}^m)$, $w_0 \in B_q(\mathbb{C}^n)$, *τότε* $z_0 \in S_p(\mathbb{C}^m)$, $w_0 \in S_q(\mathbb{C}^n)$.
3. $M_{\mathbb{C}}(p,q) = \max\{|A_{\mathbb{C}}(z,w)| : z \in S_p(\mathbb{C}^m), w \in S_q(\mathbb{C}^n)\}$.

Πρόταση 3.1.9. *Το* $M_{\mathbb{C}}(p,q)$ *είναι ο ελάχιστος αριθμός* M *για τον οποίο ισχύει:*

$$\forall z \in \mathbb{C}^m, \ \forall w \in \mathbb{C}^n : \qquad |A_{\mathbb{C}}(z,w)| \leq M\|z\|_p\|w\|_q.$$

Οι αποδείξεις των προτάσεων 3.1.7, 3.1.8 και 3.1.9 είναι ίδιες με τις αποδείξεις των προτάσεων 1.3.1, 1.3.2 και 1.3.3.

Ορισμός: *Θεωρούμε τον* $m \times n$ *μιγαδικό πίνακα* $A_{\mathbb{C}} = (a_{ij})$ *που ορίζει την διγραμμική μορφή* $A_{\mathbb{C}}(z,w)$ *και έστω* $A_{\mathbb{C}}^*$ *ο συζυγής πίνακας. Τότε ορίζονται οι* **γραμμικοί μετασχηματισμοί** $S_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ *και* $T_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ *με τύπους:*

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{C}}z &= A_{\mathbb{C}}^* \cdot z, \quad z \in \mathbb{C}^m, \\ T_{\mathbb{C}}w &= A_{\mathbb{C}} \cdot w, \quad w \in \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$

Τότε ισχύει

$$(z|T_{\mathbb{C}}w) = (S_{\mathbb{C}}z|w) = \overline{A_{\mathbb{C}}(\bar{z},w)}, \quad z \in \mathbb{C}^m, w \in \mathbb{C}^n.$$

Πρόταση 3.1.10. *Έστω* $1 \leq p, q \leq +\infty$. *Τότε*

1. $$\begin{aligned} M_{\mathbb{C}}(p,q) &= \max\left\{\|S_{\mathbb{C}}z\|_{q'} : z \in B_p(\mathbb{C}^m)\right\} \\ &= \max\left\{\|S_{\mathbb{C}}z\|_{q'} : z \in S_p(\mathbb{C}^m)\right\}. \end{aligned}$$

2. $M_{\mathbb{C}}(p,q) = \max\left\{\|T_{\mathbb{C}}w\|_{p'} : w \in B_q(\mathbb{C}^n)\right\}$
$= \max\left\{\|T_{\mathbb{C}}w\|_{p'} : w \in S_q(\mathbb{C}^n)\right\}.$

3. *Ο $M_{\mathbb{C}}(p,q)$ είναι ο ελάχιστος M για τον οποίο ισχύει:*
$$\forall z \in \mathbb{C}^m : \|S_{\mathbb{C}}z\|_{q'} \leq M\|z\|_p.$$

4. *Ο $M_{\mathbb{C}}(p,q)$ είναι ο ελάχιστος M για τον οποίο ισχύει:*
$$\forall w \in \mathbb{C}^n : \|T_{\mathbb{C}}w\|_{p'} \leq M\|w\|_q.$$

Πρόταση 3.1.11. *Αν τα a_{ij} δεν είναι όλα ίσα με μηδέν και $|A_{\mathbb{C}}(z_0,w_0)| = M_{\mathbb{C}}(p,q)$ για κάποια $z_0 \in B_p(\mathbb{C}^m), w_0 \in B_q(\mathbb{C}^n)$, τότε $z_0 \in S_p(\mathbb{C}^m)$, $w_0 \in S_q(\mathbb{C}^n)$, $\|S_{\mathbb{C}}z_0\|_{q'} = M_{\mathbb{C}}(p,q)$, $\|T_{\mathbb{C}}w_0\|_{p'} = M_{\mathbb{C}}(p,q)$.*

Οι αποδείξεις των προτάσεων 3.1.10 και 3.1.11 είναι ίδιες με τις αποδείξεις των προτάσεων 1.4.1 και 1.4.2.

3.2 Χρήσιμα λήμματα.

Λήμμα 3.2.1. *Η συνάρτηση $\log N_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta)$ είναι συνεχής στο Q'.*

Λήμμα 3.2.2. *Όταν $\alpha \to 0^+$, τότε $N_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta) \to N_{\mathbb{C}}(0,\beta)$ για κάθε $\beta \in [0,1]$ και, όταν $\beta \to 0^+$, τότε $N_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta) \to N_{\mathbb{C}}(\alpha,0)$ για κάθε $\alpha \in [0,1]$.*

Απόδειξη. Οι αποδείξεις των λημμάτων 3.2.1 και 3.2.2 είναι ίδιες με τις αποδείξεις των λημμάτων 2.2.1 και 2.2.2. □

Τώρα θα κάνουμε μια **σημαντική παρατήρηση**. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των $A_{\mathbb{C}}(x,y)$, $M_{\mathbb{C}}(p,q)$, τα λήμματα 3.2.1, 3.2.2 μαζί με το λήμμα 2.2.3 μας επιτρέπουν να επαναλάβουμε **απαράλλακτη** την απόδειξη του θεωρήματος του *M. Riesz* και να αποδείξουμε την παραλλαγή του για μιγαδικούς αριθμούς.

Θεώρημα 3.2.3. (M. Riesz) *Έστω:*
$$A_{\mathbb{C}}(z,w) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_iw_j,$$
όπου τουλάχιστον ένα από τα a_{ij} είναι $\neq 0$, και
$$N_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta) = \max\{\,|A_{\mathbb{C}}(z,w)|\; : z \in B_{1/\alpha}(\mathbb{C}^m), w \in B_{1/\beta}(\mathbb{C}^n)\}.$$
Τότε η $\log N_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta)$ είναι κυρτή συνάρτηση του (α,β) στο τρίγωνο T.

Θα δούμε όμως ότι το θεώρημα του $G. Thorin$ αποτελεί επέκταση του θεωρήματος αυτού.

Λήμμα 3.2.4. *Έστω συνάρτηση $f(\alpha, \beta)$ κυρτή και συνεχής στο Q' με την ιδιότητα:*

$$\forall \alpha \in [0,1]: \quad f(\alpha, 0) = \lim_{\beta \to 0} f(\alpha, \beta), \qquad \forall \beta \in [0,1]: \quad f(0, \beta) = \lim_{\alpha \to 0} f(\alpha, \beta)$$

Τότε η f είναι κυρτή στο Q.

Απόδειξη. Έστω $x', x'' \in Q$. Για να είναι κυρτή η συνάρτηση f, αρκεί να δειχθεί ότι

$$\forall t \in (0,1): \quad f(tx' + (1-t)x'') \leq tf(x') + (1-t)f(x'')$$

(i) Έστω $x', x'' \in Q'$. Τότε η ανισότητα ισχύει λόγω της υπόθεσης.

(ii) Έστω $x' \in Q'$ και το x'' είναι επί του άξονα β εκτός του σημείου $(0,0)$. Τότε παίρνουμε ακολουθία σημείων $\{x''_n\}$ στο Q' που τείνει στο x'' παράλληλα στον άξονα των α. Τα ευθύγραμμα τμήματα που το ένα τους άκρο είναι το x' και το άλλο κάποιο x''_n, βρίσκονται εξολοκλήρου στο Q' και συνεπώς:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall t \in (0,1): \quad f(tx' + (1-t)x''_n) \leq tf(x') + (1-t)f(x''_n).$$

Επειδή αφενός το σημείο $tx' + (1-t)x''$ είναι εσωτερικό και άρα $f(tx' + (1-t)x''_n) \to f(tx' + (1-t)x'')$ και αφετέρου $f(x''_n) \to f(x'')$, προκύπτει ότι:

$$\forall t \in (0,1): \quad f(tx' + (1-t)x'') \leq tf(x') + (1-t)f(x'').$$

Ακριβώς όμοια αποδεικνύεται και η περίπτωση που $x' \in Q'$ και το x'' είναι επί του άξονα α εκτός του (0,0).

(iii) Έστω $x' \in Q'$ και $x'' = (0,0)$. Τότε παίρνουμε ακολουθία σημείων $\{x''_n\}$ επί του άξονα β, που τείνει στο $(0,0)$. Τότε τα ευθύγραμμα τμήματα που το ένα τους άκρο είναι το x' και το άλλο κάποιο x''_n είναι της κατηγορίας που εξετάσαμε στην περίπτωση (ii) και άρα:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall t \in (0,1): \quad f(tx' + (1-t)x''_n) \leq tf(x') + (1-t)f(x''_n).$$

Επειδή αφενός το σημείο $tx' + (1-t)x''$ είναι εσωτερικό και άρα $f(tx' + (1-t)x''_n) \to f(tx' + (1-t)x'')$ και αφετέρου $f(x''_n) \to f(x'')$, προκύπτει ότι:

$$\forall t \in (0,1): \quad f(tx' + (1-t)x'') \leq tf(x') + (1-t)f(x'').$$

(iv) Έστω ότι τα x', x'' βρίσκονται και τα δύο επί του άξονα β. Αρχικά παρατηρούμε ότι ένα από τα δύο σημεία θα είναι διάφορο του $(0,0)$. Έστω ότι είναι το x''. Έστω ακολουθία σημείων $\{x''_n\}$ στο Q' που τείνει στο x'' παράλληλα στον άξονα α. Τότε τα ευθύγραμμα τμήματα που το ένα τους άκρο είναι το x' και το άλλο κάποιο x''_n είναι της κατηγορίας που εξετάσαμε στην περίπτωση (ii) ή στην περίπτωση (iii), ανάλογα με την θέση του x', και άρα:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall t \in (0,1): \quad f(tx' + (1-t)x''_n) \leq tf(x') + (1-t)f(x''_n).$$

Και επειδή τόσο η ακολουθία $\{x_n\}$ όσο και η ακολουθία $\{tx' + (1-t)x_n\}$ τείνουν σε σημείο του άξονα β **παράλληλα** στον άξονα α, προκύπτει ότι:

$$\forall t \in (0,1): \quad f(tx' + (1-t)x'') \leq tf(x') + (1-t)f(x'').$$

Ακριβώς όμοια αποδεικνύεται και η περίπτωση όπου τα x', x'' βρίσκονται και τα δύο επί του άξονα α.

(v) Έστω ότι τα x', x'' βρίσκονται το ένα επί του άξονα α και το άλλο επί του άξονα β εκτός του σημείου $(0,0)$. Ας υποθέσουμε ότι το x' είναι επί του άξονα α και το x'' επί του άξονα β. Έστω ακολουθία σημείων $\{x'_n\}$ στο Q' που τείνει στο x' παράλληλα στον άξονα των β. Τότε τα ευθύγραμμα τμήματα που το ένα τους άκρο είναι το x'' και το άλλο κάποιο x'_n είναι της κατηγορίας που εξετάσαμε στην περίπτωση (ii) και άρα:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall t \in (0,1): \quad f(tx'_n + (1-t)x'') \leq tf(x'_n) + (1-t)f(x'').$$

Επειδή αφενός το σημείο $tx' + (1-t)x''$ είναι εσωτερικό και άρα $f(tx'_n + (1-t)x'') \to f(tx' + (1-t)x'')$ και αφετέρου $f(x'_n) \to f(x'')$, προκύπτει ότι:

$$\forall t \in (0,1): \quad f(tx' + (1-t)x'') \leq tf(x') + (1-t)f(x'').$$

□

Λήμμα 3.2.5. *Αν το ελάχιστο άνω φράγμα μιας οικογένειας κυρτών συναρτήσεων ορισμένων στο ίδιο κυρτό σύνολο είναι πραγματική συνάρτηση, τότε είναι κυρτή συνάρτηση.*

Απόδειξη. Έστω κυρτό $A \subseteq \mathbb{R}^N$ και $f_i : A \to \mathbb{R}$ κυρτές συναρτήσεις, όπου $i \in I$ και I είναι ένα σύνολο δεικτών. Δηλαδή:

$$\forall i \in I \; \forall x_1, x_2 \in A \; \forall t \in (0,1): \;\; f_i(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf_i(x_1) + (1-t)f_i(x_2).$$

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ το ελάχιστο άνω φράγμα της οικογένειας f_i. Δηλαδή $f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x),\ \ x \in A$. Τότε

$$\forall i \in I\ \forall x_1, x_2 \in A\ \forall t \in (0,1): \ \ f_i(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

και, επομένως,

$$\forall x_1, x_2 \in A\ \forall t \in (0,1): \ \ f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

□

Λήμμα 3.2.6. *Το ελάχιστο άνω φράγμα μιας συνάρτησης f ως προς κάποιες μεταβλητές, μπορεί να βρεθεί παίρνοντας διαδοχικά το ελάχιστο άνω φράγμα ως προς κάθε μία από αυτές τις μεταβλητές.*

Απόδειξη. Έστω $A = \sup_{x,y} f(x,y)$ και $B = \sup_x (\sup_y f(x,y))$. Αρκεί να δείξουμε ότι $A = B$. Πράγματι: $A = \sup_{x,y} f(x,y)$, άρα $\forall x \forall y:\ \ A \geq f(x,y)$, άρα $\forall x:\ \ A \geq \sup_y f(x,y)$, άρα $A \geq \sup_x (\sup_y f(x,y))$, άρα $A \geq B$. Επίσης: $B = \sup_x (\sup_y f(x,y))$, άρα $\forall x:\ \ B \geq \sup_y f(x,y)$, άρα $\forall x \forall y:$ $B \geq f(x,y)$, άρα $B \geq \sup_{x,y} f(x,y)$, άρα $B \geq A$. □

Λήμμα 3.2.7. (Θεώρημα των τριών ευθειών του Hadamard)
Έστω $f(s)$, όπου $s = \sigma + i\tau\ \ \sigma, \tau \in \mathbb{R}$, αναλυτική συνάρτηση και φραγμένη σε κάποια κατακόρυφη ζώνη $\{s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}:\ \ \sigma_1^* \leq \sigma \leq \sigma_2^*\}$. Ορίζουμε για κάθε $\sigma \in [\sigma_1^*, \sigma_2^*]$:

$$m(\sigma) = \sup_\tau \Big|\ f(\sigma + i\tau)\ \Big|.$$

Τότε, είτε $f \equiv 0$, είτε $m(\sigma) > 0$ για κάθε $\sigma \in [\sigma_1^*, \sigma_2^*]$ και η συνάρτηση $\log m(\sigma)$ είναι κυρτή συνάρτηση του σ στο $[\sigma_1^*, \sigma_2^*]$.

Απόδειξη. Έστω $m(\sigma) = 0$ για κάποιο $\sigma \in [\sigma_1^*, \sigma_2^*]$. Τότε $f \equiv 0$ στην ευθεία $\mathrm{Re}\,(s) = \sigma$. Από την Αρχή Αναλυτικής Συνέχισης έπεται ότι $f \equiv 0$ στη ζώνη $\{s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}:\ \ \sigma_1^* \leq \sigma \leq \sigma_2^*\}$ και, επομένως, $m(\sigma) = 0$ για κάθε σ στο $[\sigma_1^*, \sigma_2^*]$.

Υποθέτουμε ότι $m(\sigma) > 0$ για κάθε $\sigma \in [\sigma_1^*, \sigma_2^*]$. Αρκεί για κάθε $\sigma_1, \sigma_2 \in [\sigma_1^*, \sigma_2^*]$ με $\sigma_1 < \sigma_2$ και για κάθε $t \in (0,1)$ να αποδείξουμε ότι

$$\log m(t\sigma_1 + (1-t)\sigma_2) \leq t \log m(\sigma_1) + (1-t) \log m(\sigma_2).$$

Παίρνουμε οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, σταθεροποιούμε τα σ_1, σ_2 και ορίζουμε την συνάρτηση:

$$F(s) = f(s) \cdot e^{-\log m(\sigma_2)\frac{s-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1} - \log m(\sigma_1)\frac{\sigma_2 - s}{\sigma_2-\sigma_1} + \varepsilon\left(\left(\frac{s-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^2 - 1\right)}.$$

Η F είναι αναλυτική στη ζώνη $\{s=\sigma+i\tau \in \mathbb{C}: \ \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2\}$ και

$$|F(s)| = |f(s)| \cdot e^{-\log m(\sigma_2)\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1} - \log m(\sigma_1)\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1} + \varepsilon\left(\left(\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^2 - \left(\frac{\tau}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^2 - 1\right)}.$$

Όταν $s=\sigma_1+i\tau$, τότε

$$\begin{aligned} |F(\sigma_1+i\tau)| &= |f(\sigma_1+i\tau)| \cdot e^{-\log m(\sigma_1) + \varepsilon\left(-\left(\frac{\tau}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^2 - 1\right)} \\ &\leq m(\sigma_1) \cdot e^{-\log m(\sigma_1)} \ = \ 1. \end{aligned}$$

Όταν $s=\sigma_2+i\tau$, τότε

$$\begin{aligned} |F(\sigma_2+i\tau)| &= |f(\sigma_2+i\tau)| \cdot e^{-\log m(\sigma_2) + \varepsilon\left(1-\left(\frac{\tau}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^2 - 1\right)} \\ &\leq m(\sigma_2) \cdot e^{-\log m(\sigma_2)} \ = \ 1. \end{aligned}$$

Δηλαδή η F είναι φραγμένη από το 1 στις ευθείες $\mathrm{Re}\,(s)=\sigma_1$ και $\mathrm{Re}\,(s)=\sigma_2$. Αν M ειναι κάποιο άνω φράγμα της f στη ζωνη $\{s=\sigma+i\tau \in \mathbb{C}: \ \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2\}$, τότε

$$|F(s)| \leq M \cdot e^{|\log m(\sigma_2)| + |\log m(\sigma_1)| - \varepsilon\left(\frac{\tau}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^2}.$$

Επειδή

$$\lim_{\tau \to \pm\infty} M \cdot e^{|\log m(\sigma_2)| + |\log m(\sigma_1)| - \varepsilon\left(\frac{\tau}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^2} = 0,$$

υπάρχουν τ_1, τ_2 τέτοια ώστε $\tau_1 \leq \tau_2$ και $|F(s)| \leq 1$ για κάθε $s=\sigma+i\tau$ με $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ και $\tau \geq \tau_2$ ή $\tau \leq \tau_1$. Στις πλευρές του ορθογωνίου $\{s=\sigma+i\tau \in \mathbb{C}: \ \ \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2, \ \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2\}$ ισχύει $|F(s)| \leq 1$. Λόγω της Αρχής Μεγίστου ισχύει $|F(s)| \leq 1$ και στο εσωτερικό του ορθογωνίου. Άρα $|F(s)| \leq 1$ για κάθε s στη ζώνη $\{s=\sigma+i\tau \in \mathbb{C}: \ \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2\}$. Δηλαδή

$$|f(s)| \cdot e^{-\log m(\sigma_2)\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1} - \log m(\sigma_1)\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1} + \varepsilon\left(\left(\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^2 - \left(\frac{\tau}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^2 - 1\right)} \leq 1$$

για κάθε s στη ζώνη αυτή. Παίρνοντας $\varepsilon \to 0^+$, έχουμε

$$|f(s)| \leq e^{\log m(\sigma_2)\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1} + \log m(\sigma_1)\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}},$$

οπότε για κάθε $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$,

$$m(\sigma) \leq e^{\log m(\sigma_2)\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1} + \log m(\sigma_1)\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}}$$

και συνεπώς για κάθε $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$,

$$\log m(\sigma) \leq \frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} \cdot \log m(\sigma_2) + \frac{\sigma_2 - \sigma}{\sigma_2 - \sigma_1} \cdot \log m(\sigma_1).$$

Η ανισότητα

$$\log m(t\sigma_1 + (1-t)\sigma_2) \leq t \log m(\sigma_1) + (1-t) \log m(\sigma_2)$$

προκύπτει άμεσα, αν θέσουμε $t = \frac{\sigma_2 - \sigma}{\sigma_2 - \sigma_1}$ και, επειδή τα σ_1, σ_2 επιλέχθηκαν τυχαία, συνεπάγεται ότι η $m(\sigma)$ είναι κυρτή συνάρτηση του σ στο $[\sigma_1^*, \sigma_2^*]$. □

Λήμμα 3.2.8. *Έστω*

$$m(\sigma) = \sup_{\tau} \left| \sum_{j=1}^{k} a_j e^{b_j s} \right|$$

με $a = (a_1, ..., a_k) \in \mathbb{C}^k$, $b = (b_1, ..., b_k) \in \mathbb{R}^k$, $s = \sigma + i\tau$, *όπου* $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$. *Τότε είτε*

$$\forall s \in \mathbb{C} : \quad \sum_{j=1}^{k} a_j e^{b_j s} = 0$$

είτε ο $\log m(\sigma)$ *είναι κυρτή συνάρτηση του* σ *στο* $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω μιγαδική συνάρτηση f με τύπο

$$f(s) = \sum_{j=1}^{k} a_j e^{b_j s}$$

με $a = (a_1, ..., a_k) \in \mathbb{C}^k$, $b = (b_1, ..., b_k) \in \mathbb{R}^k$, $s = \sigma + i\tau$, όπου $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$. Η f είναι προφανώς αναλυτική και επίσης είναι φραγμένη σε κάθε ζώνη $\{s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} : \ \sigma_1^* \leq \sigma \leq \sigma_2^*\}$. Πράγματι

$$|f(s)| \leq \sum_{j=1}^{k} |a_j| e^{|b_j \sigma|} \leq kAe^{B\Sigma},$$

όπου $A = \max|a_j|, B = \max|b_j|, \Sigma = \max\{|\sigma_1^*|, |\sigma_2^*|\}$. Άρα σύμφωνα με το λήμμα 3.2.5 η συνάρτηση

$$m(\sigma) = \sup_{\tau} \left| \, f(\sigma + i\tau) \, \right| = \sup_{\tau} \left| \sum_{j=1}^{k} a_j e^{b_j s} \right|$$

είτε είναι ταυτοτικά μηδέν είτε είναι κυρτή συνάρτηση του σ στο $\mathbb{R}$. □

3.3 Το θεώρημα του *G. Thorin*.

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω* $a_{ij} \in \mathbb{C}$ *όχι όλα μηδέν και*

$$A_{\mathbb{C}}(z,w) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{kj} z_k w_j$$

για κάθε $z = (z_1, ..., z_m) \in \mathbb{C}^m$, $w = (w_1, ..., w_m) \in \mathbb{C}^n$ *και*

$$N_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta) = \max\{\, |A_{\mathbb{C}}(z,w)| \ : \ z \in B_{1/\alpha}(\mathbb{C}^m), w \in B_{1/\beta}(\mathbb{C}^n)\}.$$

όπου όταν $\alpha = 0$ *ή* $\beta = 0$ *ορίζουμε* $\frac{1}{0} = +\infty$. *Τότε η* $\log N_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta)$ *είναι κυρτή συνάρτηση στο* Q.

Απόδειξη. Λόγω της πρότασης 3.2.1 αρκεί να δειχθεί ότι η $\log N_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta)$ είναι κυρτή συνάρτηση σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα στο Q'.

Έστω τυχαία $(\alpha_0,\beta_0),(\alpha_1,\beta_1) \in Q'$. Θεωρούμε σημεία της μορφής:

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta) &= \sigma(\alpha_1,\beta_1) + (1-\sigma)(\alpha_0,\beta_0)\\ &= (\alpha_0,\beta_0) + \sigma(\alpha_1-\alpha_0,\beta_1-\beta_0)\\ &= (\alpha_0,\beta_0) + \sigma(\lambda_\alpha,\lambda_\beta)\end{aligned}$$

όπου $\sigma \in [0,1]$ και $(\lambda_\alpha,\lambda_\beta) = (\alpha_1-\alpha_0,\beta_1-\beta_0)$. Έστω $z_k = \zeta_k^{\alpha} e^{i\phi_k}$ και $w_j = \xi_j^{\beta} e^{i\psi_j}$, όπου $\zeta_k, \xi_j \geq 0$, πολικές αναπαραστάσεις των z_k, w_j. Οι περιορισμοί $z = (z_1,...,z_m) \in B_{1/\alpha}(\mathbb{C}^m)$ και $w = (w_1,...,w_n) \in B_{1/\beta}(\mathbb{C}^n)$ ισοδυναμούν με $\zeta = (\zeta_1,...,\zeta_m) \in B_1(\mathbb{C}^m)$ και $\xi = (\xi_1,...,\xi_n) \in B_1(\mathbb{C}^n)$, ενώ για τα ϕ_k και ψ_j δεν υπάρχει κανένας περιορισμός. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι τελευταίοι περιορισμοί είναι ανεξάρτητοι των α και β. Αν αντικαταστήσουμε στον τύπο του $N_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta)$ τα z_k, w_j και τα α,β θα έχουμε[1]:

$$\begin{aligned}N_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta) &= \max_{z,w}\left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{kj} z_k w_j\right|\\ &= \max_{\zeta,\xi,\phi,\psi}\left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\zeta_k^{\alpha_0+\sigma\lambda_\alpha}\xi_j^{\beta_0+\sigma\lambda_\beta} e^{i\phi_k} e^{i\psi_j}\right|.\end{aligned}$$

[1] εφόσον οι περιορισμοί για κάθε μεταβλητή είναι γνωστοί, από εδώ και στο εξής θα παραλείπονται

Συνεχίζουμε παραλείποντας τους όρους με $\zeta_k = 0$ ή $\xi_j = 0$.

$$N_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta) = \max_{\zeta,\xi,\phi,\psi} \left| \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\zeta_k^{\alpha_0+\lambda_\alpha\sigma}\xi_j^{\beta_0+\lambda_\beta\sigma} e^{i\phi_k}e^{i\psi_j} \right|$$

$$= \max_{\zeta,\xi,\phi,\psi} \left| \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\zeta_k^{\alpha_0+\lambda_\alpha\sigma+\lambda_\alpha i\tau}\xi_j^{\beta_0+\lambda_\beta\sigma+\lambda_\beta i\tau} e^{i(\phi_k-\tau\lambda_\alpha\log\zeta_k)}e^{i(\psi_j-\tau\lambda_\beta\log\xi_j)} \right|$$

$$= \max_{\zeta,\xi,\phi,\psi} \left| \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\zeta_k^{\alpha_0+\lambda_\alpha s}\xi_j^{\beta_0+\lambda_\beta s} e^{i(\phi_k-\tau\lambda_\alpha\log\zeta_k)}e^{i(\psi_j-\tau\lambda_\beta\log\xi_j)} \right|,$$

αν θέσουμε $s = \sigma + i\tau$. Είναι προφανές πως η παραπάνω παράσταση είναι σταθερή ως προς $\tau \in \mathbb{R}$. Άρα

$$N_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta) =$$

$$= \sup_{\tau}\left(\max_{\zeta,\xi,\phi,\psi} \left| \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\zeta_k^{\alpha_0+\lambda_\alpha s}\xi_j^{\beta_0+\lambda_\beta s} e^{i(\phi_k-\tau\lambda_\alpha\log\zeta_k)}e^{i(\psi_j-\tau\lambda_\beta\log\xi_j)} \right|\right)$$

$$= \sup_{\tau}\left(\max_{\zeta,\xi,\phi',\psi'} \left| \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\zeta_k^{\alpha_0+\lambda_\alpha s}\xi_j^{\beta_0+\lambda_\beta s} e^{i\phi'_k}e^{i\psi'_j} \right|\right)$$

$$= \sup_{\tau}\left(\max_{\zeta,\xi,\phi,\psi} \left| \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\zeta_k^{\alpha_0+\lambda_\alpha s}\xi_j^{\beta_0+\lambda_\beta s} e^{i\phi_k}e^{i\psi_j} \right|\right)$$

$$= \max_{\zeta,\xi,\phi,\psi}\left(\sup_{\tau} \left| \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\zeta_k^{\alpha_0+\lambda_\alpha s}\xi_j^{\beta_0+\lambda_\beta s} e^{i\phi_k}e^{i\psi_j} \right|\right)$$

Κάθε όρος $a_{kj}\zeta_k^{\alpha_0+\lambda_\alpha s}\xi_j^{\beta_0+\lambda_\beta s}e^{i\phi_k}e^{i\psi_j}$ είναι της μορφής $a_i e^{b_i s}$, αν θέσουμε $a_i = a_{kj}\zeta_k^{\alpha_0}\xi_j^{\beta_0}e^{i(\phi_k+\psi_j)} \in \mathbb{C}$, $\quad b_i = \lambda_\alpha \log\zeta_k + \lambda_\beta\log\xi_j \in \mathbb{R}$. Άρα το $N_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta)$ γράφεται

$$N_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta) = \max_{\zeta,\xi,\phi,\psi}\left(\sup_{\tau} \left| \sum_{i=1}^{m\cdot n} a_i e^{b_i s} \right|\right).$$

Από το λήμμα 3.2.6 συνεπάγεται ότι ο

$$\log\left(\sup_{\tau} \left| \sum_{i=1}^{m\cdot n} a_i e^{b_i s} \right|\right)$$

είναι κυρτή συνάρτηση του σ στο $\mathbb{R}$. Από την πρόταση 3.1.2 το

$$\max_{\zeta,\xi,\phi,\psi}\left(\log\left(\sup_{\tau}\left|\sum_{i=1}^{m\cdot n}a_i e^{b_i s}\right|\right)\right)$$

θα είναι επίσης κυρτή συνάρτηση του σ στο $\mathbb{R}$. Τέλος επειδή ο λογάριθμος είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση συνεπάγεται ότι η συνάρτηση

$$\begin{aligned}\log N_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta) &= \log\left(\max_{\zeta,\xi,\phi,\psi}\left(\sup_{\tau}\left|\sum_{i=1}^{m\cdot n}a_i e^{b_i s}\right|\right)\right)\\ &= \max_{\zeta,\xi,\phi,\psi}\left(\log\left(\sup_{\tau}\left|\sum_{i=1}^{m\cdot n}a_i e^{b_i s}\right|\right)\right)\end{aligned}$$

είναι κυρτή συνάρτηση του σ στο $\mathbb{R}$. Επειδή $(\alpha,\beta) = (\alpha_0,\beta_0) + \sigma(\lambda_\alpha,\lambda_\beta)$ συνεπάγεται ότι

$$\forall\sigma\in(0,1):\quad \log N_{\mathbb{C}}(\alpha,\beta) \leq (1-\sigma)\log N_{\mathbb{C}}(\alpha_0,\beta_0) + \sigma\log N_{\mathbb{C}}(\alpha_1,\beta_1).$$

$\square$

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογές των θεωρημάτων

4.1 Εκτίμηση νορμών γραμμικών μετασχηματισμών.

Το θεώρημα του *M. Riesz* μπορεί εύκολα να μετασχηματιστεί σε αρκετά διαφορετική μορφή.

Ορισμός: *Έστω $m \times n$ πίνακας $A_{\mathbb{R}} = (a_{ij})$ με $a_{ij} \in \mathbb{R}$ για κάθε i, j και $S_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ο γραμμικός μετασχηματισμός με τύπο: $S_{\mathbb{R}} x = A^t_{\mathbb{R}} \cdot x$. Ορίζουμε:*

$$L_{\mathbb{R}}(\alpha, \gamma) = \max \left\{ \|S_{\mathbb{R}} x\|_{1/\gamma} \ : \ x \in \mathbb{R}^m \ \|x\|_{1/\alpha} \leq 1 \right\}$$

για κάθε α, γ με $0 \leq \alpha \leq \gamma \leq 1$.

Αν θέσουμε $p = \frac{1}{\alpha}, \quad q = \frac{1}{1-\gamma}$, η παρατήρηση μετά την πρόταση 1.4.1 μας λέει οτι ο αριθμός $L_{\mathbb{R}}(\alpha, \gamma)$είναι η νόρμα του $S_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{1/\alpha}) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{1/\gamma})$. Δηλαδή είναι ο μικρότερος L για τον οποίο ισχύει:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m : \quad \|S_{\mathbb{R}} x\|_{1/\gamma} \leq L \|x\|_{1/\alpha}.$$

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{R}}(\alpha, \gamma) &= \max \left\{ \|S_{\mathbb{R}} x\|_{1/\gamma} \ : \ x \in \mathbb{R}^m \ \|x\|_{1/\alpha} \leq 1 \right\} \\ &= M_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{1-\gamma} \right) \\ &= N_{\mathbb{R}}(\alpha, 1-\gamma). \end{aligned}$$

Θεώρημα 4.1.1. *Αν τουλάχιστον ένα a_{ij} δεν είναι μηδέν τότε ο $\log L_{\mathbb{R}}(\alpha, \gamma)$ είναι κυρτός στο τρίγωνο $0 \leq \gamma \leq \alpha \leq 1$.*

Απόδειξη. Αν θέσουμε $\beta = 1-\gamma$ τότε το τρίγωνο $0 \le \gamma \le \alpha \le 1$ μετασχηματίζεται στο τρίγωνο $T = \{(\alpha, \beta) : 0 \le \alpha \le 1, 0 \le \beta \le 1, \alpha + \beta \ge 1\}$. Από το θεώρημα του $M.\ Riesz$ συνεπάγεται ότι ο $\log L_{\mathbb{R}}$ είναι κυρτή συνάρτηση του (α, β), δηλαδή του $(\alpha, 1-\gamma)$, και, ισοδύναμα, παίρνουμε πως είναι κυρτή συνάρτηση του (α, γ). $\square$

Με την βοήθεια του θεωρήματος του $G.\ Thorin$ παίρνουμε ένα γενικότερο αποτέλεσμα, αλλα για μιγαδικούς γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Ορισμός: *Έστω $m \times n$ πίνακας $A_{\mathbb{C}} = (a_{ij})$ με $a_{ij} \in \mathbb{C}$ για κάθε i, j και $S_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ ο γραμμικός μετασχηματισμός με τύπο: $S_{\mathbb{C}} z = A^*_{\mathbb{C}} \cdot z$. Ορίζουμε:*

$$L_{\mathbb{C}}(\alpha, \gamma) = \max\left\{ \|S_{\mathbb{C}} z\|_{1/\gamma} \ : \ z \in \mathbb{C}^m, \ \|z\|_{1/\alpha} \le 1 \right\}$$

για κάθε α, γ με $0 \le \alpha \le 1$, $0 \le \gamma \le 1$.

Ο $L_{\mathbb{C}}(\alpha, \gamma)$ είναι η νόρμα του $S_{\mathbb{C}} : \left(\mathbb{C}^m, \|\cdot\|_{1/\alpha}\right) \to \left(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_{1/\gamma}\right)$ και ισχύει

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{C}}(\alpha, \gamma) &= M_{\mathbb{C}}\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{1-\gamma}\right) \\ &= N_{\mathbb{C}}(\alpha, 1-\gamma). \end{aligned}$$

Η απόδειξη του επόμενου θεωρήματος είναι ακριβώς η ίδια με την απόδειξη του θεωρήματος 4.1.1 και χρησιμοποιεί το θεώρημα του $G.\ Thorin$ στη θέση του θεωρήματος του $M.\ Riesz$.

Θεώρημα 4.1.2. *Αν τουλάχιστον ένα a_{ij} δεν είναι μηδέν τότε ο $\log L_{\mathbb{C}}(\alpha, \gamma)$ είναι κυρτός στο τετράγωνο $0 \le \alpha, \gamma \le 1$.*

Θεώρημα 4.1.3. *Έστω $1 \le p \le 2$ και $\kappa = \max |a_{ij}|$.*

1. *Αν $a_{ij} \in \mathbb{R}$ για κάθε i, j και $\|S_{\mathbb{R}} x\|_2 \le \|x\|_2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$, τότε $\|S_{\mathbb{R}} x\|_{p'} \le \kappa^{(2-p)/p} \|x\|_p$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$.*

2. *Αν $a_{ij} \in \mathbb{C}$ για κάθε i, j και $\|S_{\mathbb{C}} z\|_2 \le \|z\|_2$, για κάθε $z \in \mathbb{C}^m$, τότε $\|S_{\mathbb{C}} z\|_{p'} \le \kappa^{(2-p)/p} \|z\|_p$, για κάθε $z \in \mathbb{C}^m$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στα προηγούμενα δύο θεωρήματα. Ας θεωρήσουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και $(1, 0)$. Το ευθύγραμμο τμήμα αυτό περιέχεται και στο τρίγωνο $0 \le \gamma \le \alpha \le 1$ αλλά και στο τετράγωνο $0 \leq \alpha, \gamma \leq 1$. Θα συνεχίσουμε την απόδειξη για την περίπτωση του $S_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Η απόδειξη για την περίπτωση του $S_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ είναι ακριβώς η ίδια. Η συνάρτηση $\log L_{\mathbb{R}}(\alpha, \gamma)$ είναι κυρτή στο παραπάνω ευθύγραμμο τμήμα, άρα για κάθε $t \in [0,1]$:

$$\log L_{\mathbb{R}}\left(t\frac{1}{2} + (1-t)1, t\frac{1}{2}\right) \leq t \log L_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + (1-t)\log L_{\mathbb{R}}(1,0)$$

και, επομένως

$$L_{\mathbb{R}}\left(1 - \frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right) \leq L_{\mathbb{R}}^{t}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) L_{\mathbb{R}}^{1-t}(1,0).$$

Αν θέσουμε $\alpha = 1 - \frac{t}{2}$, τότε $t = 2(1-\alpha)$ και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$L_{\mathbb{R}}(\alpha, 1-\alpha) \leq L_{\mathbb{R}}^{2(1-\alpha)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) L_{\mathbb{R}}^{2\alpha-1}(1,0).$$

Από τη σχέση $\|S_{\mathbb{R}}x\|_2 \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$ συνεπάγεται

$$L_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \leq 1,$$

διότι $L_{\mathbb{R}}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \max\{\|S_{\mathbb{R}}x\|_2 : \|x\|_2 \leq 1\}$. Επίσης για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$ και για κάθε j ισχύει

$$|(S_{\mathbb{R}}x)_j| = \left|\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}||x_i| \leq \kappa \sum_{i=1}^{m} |x_i| = \kappa\|x\|_1.$$

Άρα $\|S_{\mathbb{R}}x\|_\infty \leq \kappa\|x\|_1$ και επομένως

$$L_{\mathbb{R}}(1,0) \leq \kappa.$$

Άρα

$$L_{\mathbb{R}}(\alpha, 1-\alpha) \leq \kappa^{2\alpha-1}.$$

Τώρα παρατηρούμε πως το $t \in [0,1]$ ισοδυναμεί με $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ και αυτό ισοδυναμεί με $\frac{1}{\alpha} \in [1,2]$. Θέτουμε $p = \frac{1}{\alpha}$, οπότε

$$L_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}\right) = L_{\mathbb{R}}(\alpha, 1-\alpha) \leq \kappa^{2\alpha-1} = \kappa^{(2-p)/p}.$$

Άρα

$$\|S_{\mathbb{R}}x\|_{p'} \leq L_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}\right)\|x\|_p \leq \kappa^{(2-p)/p}\|x\|_p.$$

$\square$

4.2 Εφαρμογή στο θεώρημα $Hausdorff - Young$.

Θεωρούμε περιοδικές μιγαδικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με περίοδο 2π. Δηλαδή

$$\forall \theta \in \mathbb{R} : \quad f(\theta + 2\pi) = f(\theta).$$

Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον μιγαδικό αριθμό

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta \tag{1}$$

και τον ονομάζουμε **k-οστό συντελεστή Fourier** της f. Η σειρά

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ik\theta}$$

ονομάζεται **σειρά Fourier** της f και είναι ένα ζήτημα αν και για ποιά θ η σειρά αυτή συγκλίνει. Πάντως, υπό κάποιες προϋποθέσεις σχετικά με την f, για παράδειγμα αν η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η σειρά αυτή συγκλίνει και ισχύει

$$\forall \theta \in \mathbb{R} : \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ik\theta} = f(\theta).$$

Αν συμβαίνει κάτι τέτοιο για κάποια f, σημαίνει ότι, όχι μόνον μπορούμε από την f να κατασκευάσουμε τους συντελεστές Fourier της, μέσω του τύπου (1) και, επομένως, και την σειρά Fourier της, αλλά μπορούμε αντίστροφα από την σειρά Fourier της να κατασκευάσουμε την f. Αυτός είναι ένας από τους λόγους που η θεωρία των σειρών Fourier είναι σημαντική στα μαθηματικά, εφαρμοσμένα και θεωρητικά.

Εδώ θα δούμε σε μια απλή περίπτωση την σχέση ανάμεσα στη συνάρτηση f και στη σειρά Fourier της. Έστω f ένα **τριγωνομετρικό πολυώνυμο**, δηλαδή

$$f(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} z_k e^{ik\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \ \ N \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Δηλαδή η f είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός όρων της μορφής $e^{ik\theta}$. Κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π και αν υπολογίσουμε τους συντελεστές Fourier της f βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{l=-N}^{N} z_l e^{il\theta}\right)e^{-ik\theta}d\theta\\ &= \sum_{l=-N}^{N} z_l \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(l-k)\theta}d\theta.\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx}dx = \begin{cases} 1, & \text{αν } n=0,\\ 0, & \text{αν } n\neq 0.\end{cases}$$

Άρα

$$\hat{f}(k) = \begin{cases} z_k, & \text{αν } -N\leq k\leq N,\\ 0, & \text{αν } k<-N \text{ ή } N<k.\end{cases} \tag{2}$$

Δηλαδή οι συντελεστές Fourier του τριγωνομετρικού πολυωνύμου ταυτίζονται με τους συντελεστές του (όπου δεχόμαστε ότι $z_k = 0$ αν $k < -N$ ή $N < k$). Άρα η σειρά Fourier της f είναι

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(k)e^{ik\theta} = \sum_{k=-N}^{N} z_k e^{ik\theta} = f(\theta).$$

Δηλαδή η σειρά Fourier ενός τριγωνομετρικού πολυωνύμου είναι πεπερασμένο άθροισμα και ταυτίζεται με το τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

Υπάρχει ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα της ανάλυσης:

Θεώρημα 4.2.1. (Hausdorff-Young)

Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ περιοδική με περίοδο 2π ισχύει ότι

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\theta)|^{p'}\,d\theta\right)^{1/p'} \leq \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(k)|^{p}\right)^{1/p},$$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(k)|^{p'}\right)^{1/p'} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\theta)|^{p}\,d\theta\right)^{1/p},$$

όπου $1\leq p\leq 2$ και, επομένως, $2\leq p'\leq +\infty$.

Εδώ θα δούμε πώς αποδεικνύεται το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 4.2.2. *Για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο*

$$f(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} z_k e^{ik\theta}$$

ισχύει ότι

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^{p'} \, d\theta \right)^{1/p'} \leq \left(\sum_{k=-N}^{N} |z_k|^p \right)^{1/p},$$

$$\left(\sum_{k=-N}^{N} |z_k|^{p'} \right)^{1/p'} \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p \, d\theta \right)^{1/p},$$

όπου $1 \leq p \leq 2$ *και, επομένως,* $2 \leq p' \leq +\infty$.

Από τον τύπο (2) για τους συντελεστες Fourier ενός τριγωνομετρικού πολυωνύμου είναι φανερό ότι το δεύτερο θεώρημα είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος Hausdorff-Young. Από την άλλη μεριά το θεώρημα Hausdorff-Young μπορεί να προκύψει από το ειδικότερο δεύτερο θεώρημα και μάλιστα χωρίς ιδιαίτερες επιπλέον γνώσεις. Η απόδειξη όμως είναι αρκετά τεχνική, ξεφεύγει από τους στόχους αυτής της εργασίας και δεν κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστεί εδώ.

Απόδειξη. Έστω τυχαίο τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$f(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} z_k e^{ik\theta}.$$

Θεωρούμε τυχόντα φυσικό αριθμό m και ορίζουμε

$$f_m(\theta) = \sum_{k=-m}^{m} z_k e^{ik\theta}.$$

Αν $m \leq N$, τότε το $f_m(\theta)$ είναι ένα μέρος του αθροίσματος που ορίζει το $f(\theta)$. Αν $m > N$, τότε τους επιπλέον συντελεστές τους θεωρούμε ίσους με το 0, οπότε $f_m(\theta) = f_N(\theta) = f(\theta)$.

Κατόπιν ορίζουμε για κάθε $n = 0, .., 2m$

$$w_n = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} f_m\left(\frac{2\pi n}{2m+1} \right) = \sum_{k=-m}^{m} \frac{e^{i\frac{2\pi nk}{2m+1}}}{\sqrt{2m+1}} z_k.$$

Δηλαδή έχουμε τον γραμμικό μετασχηματισμό

$$S_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^{2m+1} \to \mathbb{C}^{2m+1}$$

με τύπο $w = S_{\mathbb{C}} z = A_{\mathbb{C}}^* \cdot x$, όπου

$$w = (w_0, ..., w_{2m}) \in \mathbb{C}^{2m+1}, \quad z = (z_{-m}, ..., z_m) \in \mathbb{C}^{2m+1}$$

και $A = (a_{kn})$ είναι ο $(2m+1) \times (2m+1)$ πίνακας με συντεταγμένες

$$a_{kn} = \frac{e^{-i\frac{2\pi nk}{2m+1}}}{\sqrt{2m+1}}.$$

Κάνοντας πράξεις βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \|S_{\mathbb{C}} z\|_2^2 &= \sum_{n=0}^{2m} |w_n|^2 = \sum_{n=0}^{2m} w_n \bar{w}_n \\ &= \sum_{n=0}^{2m} \sum_{k=-m}^{m} \frac{1}{\sqrt{2m+1}} e^{i\frac{2\pi nk}{2m+1}} z_k \sum_{k'=-m}^{m} \frac{1}{\sqrt{2m+1}} e^{-i\frac{2\pi nk'}{2m+1}} \overline{z_{k'}}. \\ &= \sum_{k=-m}^{m} \sum_{k'=-m}^{m} \frac{1}{2m+1} \sum_{n=0}^{2m} e^{i\frac{2\pi n(k-k')}{2m+1}} z_k \overline{z_{k'}}. \end{aligned}$$

Τώρα είναι απλό να αποδείξει κανείς ότι για κάθε $l \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$(3) \qquad \sum_{n=0}^{2m} e^{i\frac{2\pi nl}{2m+1}} = \begin{cases} 2m+1, & \text{αν } l = \text{πολλαπλάσιο του } 2m+1, \\ 0, & \text{αν } l \neq \text{πολλαπλάσιο του } 2m+1. \end{cases}$$

Αν $-m \leq k \leq m$ και $-m \leq k' \leq m$, τότε το $k - k'$ είναι πολλαπλάσιο του $2m+1$ αν και μόνον αν $k = k'$. Άρα

$$\|S_{\mathbb{C}} z\|_2^2 = \sum_{k=-m}^{m} z_k \bar{z}_k = \sum_{k=-m}^{m} |z_k|^2 = \|z\|_2^2$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}^{2m+1}$. Από την άλλη μεριά ισχύει, προφανώς,

$$\kappa = \max |a_{kn}| = \frac{1}{\sqrt{2m+1}}.$$

Από το θεώρημα 4.1.3, παίρνουμε

$$\left(\sum_{n=0}^{2m} |w_n|^{p'} \right)^{1/p'} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2m+1}} \right)^{\frac{2-p}{p}} \left(\sum_{k=-m}^{m} |z_k|^p \right)^{1/p}.$$

Αντικαθιστώντας τα w_n παίρνουμε

$$\left(\frac{1}{2m+1}\sum_{n=0}^{2m}\left|f_m\left(\frac{2\pi n}{2m+1}\right)\right|^{p'}\right)^{1/p'} \le \left(\sum_{k=-m}^{m}|z_k|^p\right)^{1/p}.$$

Επειδή $f_m(\theta) = f(\theta)$ όταν $m \ge N$, συνεπάγεται

$$\left(\frac{1}{2m+1}\sum_{n=0}^{2m}\left|f\left(\frac{2\pi n}{2m+1}\right)\right|^{p'}\right)^{1/p'} \le \left(\sum_{k=-N}^{N}|z_k|^p\right)^{1/p}$$

για κάθε $m \ge N$. Το πρώτο μέλος είναι άθροισμα Riemann του $\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\theta)|^{p'}\,d\theta\right)^{1/p'}$, οπότε, παίρνοντας $m \to +\infty$, βρίσκουμε

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\theta)|^{p'}\,d\theta\right)^{1/p'} \le \left(\sum_{k=-N}^{N}|z_k|^p\right)^{1/p}.$$

και αποδείξαμε την πρώτη ανισότητα του θεωρήματος.

Η δεύτερη ανισότητα αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. Βάσει της ταυτότητας (3) υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{2m}\frac{e^{-i\frac{2\pi nk}{2m+1}}}{\sqrt{2m+1}}w_n &= \sum_{n=0}^{2m}\frac{e^{-i\frac{2\pi nk}{2m+1}}}{\sqrt{2m+1}}\sum_{k'=-m}^{m}\frac{e^{i\frac{2\pi nk'}{2m+1}}}{\sqrt{2m+1}}z_{k'} \\
&= \sum_{k'=-m}^{m}\frac{1}{2m+1}\sum_{n=0}^{2m}e^{i\frac{2\pi n(k'-k)}{2m+1}}z_{k'} \\
&= z_k.
\end{aligned}$$

Άρα τα $z = (z_{-m}, ..., z_m) \in \mathbb{C}^{2m+1}$, $w = (w_0, ..., w_{2m}) \in \mathbb{C}^{2m+1}$ συνδέονται με τον γραμμικό μετασχηματισμό

$$S'_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^{2m+1} \to \mathbb{C}^{2m+1}$$

με τύπο $z = S'_{\mathbb{C}}w = A'^{*}_{\mathbb{C}}w$, όπου $A'_{\mathbb{C}} = (a'_{nk})$ είναι ο $(2m+1)\times(2m+1)$ πίνακας με συντεταγμένες

$$a'_{nk} = \frac{e^{i\frac{2\pi nk}{2m+1}}}{\sqrt{2m+1}}.$$

Από τις σχέσεις $w = S_{\mathbb{C}} z$ και $z = S'_{\mathbb{C}} w$ είναι φανερό ότι οι μετασχηματισμοί $S_{\mathbb{C}}$, $S'_{\mathbb{C}}$ είναι αντίστροφοι. Επίσης η σχέση $\|S_{\mathbb{C}} z\|_2^2 = \|z\|_2^2$ γράφεται

$$\|w\|_2^2 = \left\|S'_{\mathbb{C}} w\right\|_2^2$$

για κάθε $w \in \mathbb{C}^{2m+1}$. Επειδή, προφανώς

$$\kappa = \max |a'_{nk}| = \frac{1}{\sqrt{2m+1}},$$

από το θεώρημα 4.1.3 παίρνουμε

$$\left(\sum_{k=-m}^{m} |z_k|^{p'}\right)^{1/p'} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2m+1}}\right)^{\frac{2-p}{p}} \left(\sum_{n=0}^{2m} |w_n|^p\right)^{1/p}.$$

και επομένως

$$\left(\sum_{k=-m}^{m} |z_k|^{p'}\right)^{1/p'} \leq \left(\frac{1}{2m+1} \sum_{n=0}^{2m} \left| f_m\left(\frac{2\pi n}{2m+1}\right)\right|^p\right)^{1/p}.$$

Παίρνοντας $m \geq N$, συνεπάγεται

$$\left(\sum_{k=-N}^{N} |z_k|^{p'}\right)^{1/p'} \leq \left(\frac{1}{2m+1} \sum_{n=0}^{2m} \left| f\left(\frac{2\pi n}{2m+1}\right)\right|^p\right)^{1/p}.$$

και τέλος, αν $m \to +\infty$ βρίσκουμε

$$\left(\sum_{k=-N}^{N} |z_k|^{p'}\right)^{1/p'} \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p \, d\theta\right)^{1/p}.$$

$\square$