Διπλωματική Εργασία

Το Θεώρημα του Mergelyan

για ομοιόμορφη σύγκλιση πολυωνύμων σε συμπαγή υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου.

Ν. Παττακός

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Άνοιξη 2008

Την **Επιτροπή Εξέτασης** αυτής της διπλωματικής εργασίας αποτέλεσαν οι:

Ε. Κατσοπρινάκης,

Γ. Κωστάκης,

Μ. Παπαδημητράκης (επιβλέπων καθηγητής).

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή.

Με $\mathbf{C}$ συμβολίζουμε το μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή το σύνολο των μιγαδικών αριθμών, και με $z = x + iy = (x, y)$ ή με $\zeta = \xi + i\eta = (\xi, \eta)$ τον τυπικό μιγαδικό αριθμό. Με $\widehat{\mathbf{C}}$ συμβολίζουμε το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Ο ανοικτός δίσκος κέντρου z και ακτίνας r συμβολίζεται $D(z; r)$ και, ειδικώτερα, $\mathbf{U} = D(0; 1)$ είναι ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος με κέντρο 0. Όταν γράφουμε A^c, A^o, $\overline{A}$ και ∂A για κάποιο $A \subseteq \mathbf{C}$ εννοούμε το συμπλήρωμα, το εσωτερικό, την κλειστότητα και το σύνορο, αντιστοίχως, του A στο $\mathbf{C}$. Το σύνορο του $D(z; r)$ συμβολίζεται $C(0; r)$ και, ειδικώτερα, με $\mathbf{T}$ συμβολίζουμε την περιφέρεια του μοναδιαίου δίσκου, $\mathbf{T} = \partial \mathbf{U} = \partial D(0; 1)$. Όλες οι συναρτήσεις που εμφανίζονται σ' αυτήν την εργασία είναι μιγαδικές και όλα τα μέτρα είναι, επίσης, μιγαδικά. Αν κάτι άλλο ισχύει σε κάποιες συγκεκριμένες περιπτώσεις, αυτό θα δηλώνεται ρητά.

Το θέμα της εργασίας αυτής είναι το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 1.1 ***(Θεώρημα του Mergelyan)*** *Έστω συμπαγές $K \subseteq \mathbf{C}$ με συνεκτικό K^c και f συνεχής στο K και ολόμορφη στο K^o. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $|p - f| \leq \epsilon$ στο K ή, ισοδύναμα, υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο K.*

Θα δούμε δυο αποδείξεις του θεωρήματος αυτού. Την κλασσική απόδειξη του Mergelyan στο δεύτερο κεφάλαιο και την απόδειξη του Carleson στο τρίτο κεφάλαιο. Για την κλασσική απόδειξη μπορεί κάποιος να δει την εργασία "Uniform approximation to functions of a complex variable" του S. N. Mergelyan στο American Mathematical Society Translations No. 101, 1954 καθώς και το βιβλίο "Real and complex analysis" του W. Rudin. Η απόδειξη του Carleson υπάρχει στην εργασία "Mergelyan's theorem on uniform polynomial approximation" του L. Carleson στο Math. Scandinavica, vol. 15, pp. 167 - 175, 1964.

Εκτός από τις βασικές γνώσεις που αποκτά κανείς στα συνηθισμένα προπτυχιακά μαθήματα θα θεωρήσουμε γνωστά και θα χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω αποτελέσματα τα περισσότερα από τα οποία είναι μεταπτυχιακού επιπέδου.

Από τη Συναρτησιακή Ανάλυση.

Θεώρημα 1.2 ***(Θεώρημα Hahn - Banach)*** *Έστω γραμμικός χώρος X με νόρμα, γραμμικός υπόχωρος X_0 του X και $\Lambda_0 \in X_0{}^*$. Τότε υπάρχει $\Lambda \in X^*$ ώστε $\Lambda = \Lambda_0$ στον X_0 και $\|\Lambda\| = \|\Lambda_0\|$.*

Θεώρημα 1.3 *Έστω γραμμικός χώρος X με νόρμα, γραμμικός υπόχωρος X_0 του X και $x_0 \in X$. Τότε $x_0 \in \overline{X_0}$ αν και μόνο αν για κάθε $\Lambda \in X^*$ με $\Lambda = 0$ στον X_0 ισχύει $\Lambda(x_0) = 0$.*

Θεώρημα 1.4 *Έστω γραμμικός χώρος X με νόρμα και γραμμικός υπόχωρος X_0 του X. Τότε είναι $\overline{X_0} = X$ αν και μόνο αν για κάθε $\Lambda \in X^*$ με $\Lambda = 0$ στον X_0 ισχύει $\Lambda = 0$ στον X.*

Από τη Μιγαδική Ανάλυση.

Θεώρημα 1.5 ***(Αρχή Μεγίστου)*** (1) *Έστω φραγμένο και ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ και f συνεχής στο $\overline{\Omega}$ και ολόμορφη στο Ω. Τότε είτε (i) η f είναι σταθερή στο $\overline{\Omega}$ είτε (ii) η $|f|$ έχει μέγιστη τιμή η οποία πιάνεται στο $\partial\Omega$.*
(2) *Έστω φραγμένο και ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ και πραγματική f συνεχής στο $\overline{\Omega}$ και αρμονική στο Ω. Τότε είτε (i) η f είναι σταθερή στο $\overline{\Omega}$ είτε (ii) η f έχει μέγιστη τιμή η οποία πιάνεται στο $\partial\Omega$.*

Θεώρημα 1.6 ***(Θεώρημα Μοναδικότητας)*** *Έστω f ολόμορφη στο ανοικτό και συνεκτικό $\Omega \subseteq \mathbf{C}$. Αν το $\{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ έχει σημείο συσσώρευσης στο Ω, τότε $f = 0$ στο Ω.*

Θεώρημα 1.7 ***(Αρχή του Harnack)*** *Έστω ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ και συμπαγές $K \subseteq \Omega$. Τότε υπάρχει $M \geq 1$ που εξαρτάται μόνο απο τα K και Ω ώστε για κάθε θετική u αρμονική στο Ω και κάθε $z_1, z_2 \in K$ να ισχύει*

$$\frac{1}{M} \leq \frac{u(z_2)}{u(z_1)} \leq M.$$

Θεώρημα 1.8 ***(Θεώρημα Προσέγγισης του Runge)*** *Έστω ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbf{C}$, συμπαγές $K \subseteq \Omega$ με συνεκτικό K^c και f ολόμορφη στο Ω. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $|p - f| \leq \epsilon$ στο K ή, ισοδύναμα, υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο K.*

Θεώρημα 1.9 *Έστω f ολόμορφη στο ανοικτό και απλά συνεκτικό $\Omega \subseteq \mathbf{C}$. Αν η f δε μηδενίζεται πουθενά στο Ω, τότε υπάρχει h ολόμορφη στο Ω ώστε $h^2 = f$ στο Ω.*

Θεώρημα 1.10 ***(Θεώρημα του Riemann)*** *Για κάθε ανοικτό και απλά συνεκτικό $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ με $\Omega \neq \mathbf{C}$ υπάρχει $f : \Omega \to \mathbf{U}$ ολόμορφη στο Ω η οποία είναι ένα-προς-ένα στο Ω και επί του $\mathbf{U}$ (οπότε και η $f^{-1} : \mathbf{U} \to \Omega$ είναι ολόμορφη στο $\mathbf{U}$). Επίσης, αν $w_0 \in \Omega$, τότε η f μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι $f(w_0) = 0$.*

Θεώρημα 1.11 *Έστω f ολόμορφη στο ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ και έστω ομαλή καμπύλη γ στο Ω. Αν η καμπύλη $f(\gamma)$ περιστρέφεται τόσες φορές γύρω από τον w_1 όσες και γύρω από τον w_2, τότε ο συνολικός αριθμός περιστροφών της γ γύρω από τις λύσεις της εξίσωσης $f(z) = w_1$ είναι ο ίδιος με τον συνολικό αριθμό περιστροφών της γ γύρω από τις λύσεις της $f(z) = w_2$.*

Από την Πραγματική Ανάλυση.

Θεώρημα 1.12 ***(Λήμμα του Urysohn)*** *Έστω τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff X, ανοικτό $V \subseteq X$ και συμπαγές $K \subseteq V$. Τότε υπάρχει $f \in \mathbf{C}_c(X)$ ώστε $0 \leq f \leq 1$ στον X, $f = 1$ στο K και $f = 0$ στο $X \setminus V$.*

Θεώρημα 1.13 ***(Θεώρημα Επέκτασης του Tietze)*** *Έστω τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff X, συμπαγές $K \subseteq X$ και $f \in \mathbf{C}(K)$. Τότε υπάρχει $F \in \mathbf{C}_c(X)$ ώστε $F = f$ στο K.*

Θεώρημα 1.14 *Έστω συμπαγές $K \subseteq \mathbf{R}^d$ και f συνεχής στο K. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $g \in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ ώστε $|g - f| \leq \epsilon$ στο K ή, ισοδύναμα, υπάρχει ακολουθία (g_n) στο $\mathbf{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ ώστε $g_n \to f$ ομοιόμορφα στο K.*

Θεώρημα 1.15 ***(Θεώρημα του Lebesgue)*** *Έστω μη αρνητικό, σ-πεπερασμένο μέτρο μ και μέτρο λ στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$. Τότε υπάρχει μοναδικό ζευγάρι μέτρων (λ_a, λ_s) στον $(X, \mathcal{M})$ ώστε $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_a << \mu$ και $\lambda_s \perp \mu$.*

Θεώρημα 1.16 ***(Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz)*** *Έστω συμπαγής χώρος X.*
(1) Για κάθε $\Lambda \in \big(\mathbf{C}(X)\big)^*$ υπάρχει μοναδικό μέτρο Borel μ στον X ώστε $\Lambda(f) = \int_X f(x)\, d\mu(x)$ για κάθε $f \in \mathbf{C}(X)$. Επίσης, είναι $\|\Lambda\| = |\mu|(X)$.
(2) Για κάθε $\Lambda \in \big(\mathbf{C}_\mathbf{R}(X)\big)^*$ υπάρχει μοναδικό πραγματικό μέτρο Borel μ στον X ώστε $\Lambda(f) = \int_X f(x)\, d\mu(x)$ για κάθε $f \in \mathbf{C}_\mathbf{R}(X)$. Επίσης, είναι $\|\Lambda\| = |\mu|(X)$ και, αν $\Lambda(f) \geq 0$ για κάθε μη αρνητική $f \in \mathbf{C}_\mathbf{R}(X)$, τότε το μ είναι μη αρνητικό.

Κεφάλαιο 2

Η κλασσική απόδειξη.

Ορισμός 2.1 *Με $\mathcal{S}$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των f οι οποίες είναι ολόμορφες και ένα-προς-ένα στο $\mathbf{U}$ και ικανοποιούν τις:*

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1.$$

Άρα κάθε $f \in \mathcal{S}$ έχει ανάπτυγμα Taylor της μορφής:

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n \qquad (z \in \mathbf{U}).$$

Αν $|a| \leq 1$ και θέσουμε

$$f_a(z) = \frac{z}{(1-az)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a^{n-1} z^n \qquad (z \in \mathbf{U}),$$

τότε η f_a ανήκει στην κλάση $\mathcal{S}$. Ο έλεγχος είναι αρκετά απλός. Αν $|a| = 1$, η f_a ονομάζεται *συνάρτηση Koebe.*

Λήμμα 2.1 (1) *Αν $f \in \mathcal{S}$, $|a| = 1$ και $g(z) = \overline{a} f(az)$ $(z \in \mathbf{U})$, τότε $g \in \mathcal{S}$.*
(2) *Αν $f \in \mathcal{S}$, τότε υπάρχει $g \in \mathcal{S}$ ώστε να είναι*

$$g(z)^2 = f(z^2) \qquad (z \in \mathbf{U}).$$

Απόδειξη: (1) Τετριμμένο.
(2) Ορίζουμε

$$\phi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \in \mathbf{U} \setminus \{0\} \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

Η ϕ είναι ολόμορφη στο $\mathbf{U}$ και ισχύει $\phi(0) = 1$. Η ϕ δε μηδενίζεται πουθενά στο $\mathbf{U}$ διότι η f, ως ένα-προς-ένα συνάρτηση με $f(0) = 0$, δε μηδενίζεται πουθενά στο $\mathbf{U} \setminus \{0\}$. Άρα από το Θεώρημα 1.11 συνεπάγεται ότι υπάρχει h ολόμορφη στο $\mathbf{U}$ με $h(0) = 1$ και

$$h(z)^2 = \phi(z) \qquad (z \in \mathbf{U}).$$

Θέτουμε

$$g(z) = zh(z^2) \qquad (z \in \mathbf{U}).$$

Αμέσως προκύπτει ότι η g είναι ολόμορφη στο $\mathbf{U}$, ότι $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ και

$$g(z)^2 = z^2 h(z^2)^2 = z^2 \phi(z^2) = f(z^2) \qquad (z \in \mathbf{U}).$$

Μας μένει ακόμη να αποδείξουμε ότι η g είναι ένα-προς-ένα. Θεωρούμε $z, w \in \mathbf{U}$ τέτοια ώστε $g(z) = g(w)$. Συνεπάγεται $g(z)^2 = g(w)^2$, οπότε $f(z^2) = f(w^2)$ και, επειδή η f είναι ένα-προς-ένα, $z^2 = w^2$. Αν $z = w$, τότε έχουμε τελειώσει. Αν $z = -w$, τότε $g(z) = -g(w)$ και, αφού $g(z) = g(w)$, συνεπάγεται $g(z) = g(w) = 0$. Αλλά η g δε μηδενίζεται στο $\mathbf{U}$ παρά μόνο στο 0. Άρα είναι $z = 0 = w$.

Λήμμα 2.2 *Έστω F ολόμορφη και ένα-προς-ένα στο $\mathbf{U} \setminus \{0\}$ και*

$$F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \qquad (z \in \mathbf{U} \setminus \{0\}).$$

Τότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n|^2 \leq 1.$$

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_0 = 0$. Ακόμη, τίποτα απο τις υποθέσεις ή το συμπέρασμα δεν αλλάζει αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε λ με $|\lambda| = 1$ και αντικαταστήσουμε την F με την $\overline{\lambda} F(\lambda z)$. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $a_1 \in \mathbf{R}$.

Αν $0 < r < 1$, ορίζουμε

$$W_r = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z| < r\},\ T_r = \{z \in \mathbf{C} : |z| = r\},\ V_r = \{z \in \mathbf{C} : r < |z| < 1\}.$$

Επειδή η F είναι ένα-προς-ένα, τα $F(W_r)$, $F(T_r)$ και $F(V_r)$ είναι ξένα ανά δύο.

Ας γράψουμε

$$F(z) = \frac{1}{z} + a_1 z + \phi(z) \qquad (z \in \mathbf{U} \setminus \{0\}),$$

$$u(z) = \Re(F(z)), \quad v(z) = \Im(F(z)) \qquad (z \in \mathbf{U} \setminus \{0\})$$

και

$$A(r) = \frac{1}{r} + a_1 r, \quad B(r) = \frac{1}{r} - a_1 r \qquad (0 < r < 1).$$

Για κάθε $z = re^{i\theta} \in \mathbf{U} \setminus \{0\}$ έχουμε ότι

$$u(z) = A(r)\cos\theta + \Re(\phi(z)), \quad v(z) = -B(r)\sin\theta + \Im(\phi(z)).$$

Θεωρούμε $r_0 < 1$ αρκετά μικρό ώστε να είναι $A(r) \geq \frac{1}{2r} > 0$ και $B(r) \geq \frac{1}{2r} > 0$ για κάθε r με $0 < r \leq r_0$. Συνεπάγεται

$$\frac{u(z)}{A(r)} = \cos\theta + \frac{\Re(\phi(z))}{A(r)}, \quad \frac{v(z)}{B(r)} = -\sin\theta + \frac{\Im(\phi(z))}{B(r)}$$

και, υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας,

$$\frac{u(z)^2}{A(r)^2}+\frac{v(z)^2}{B(r)^2}=1+\frac{2\cos\theta}{A(r)}\Re(\phi(z))+\Big(\frac{\Re(\phi(z))}{A(r)}\Big)^2-\frac{2\sin\theta}{B(r)}\Im(\phi(z))+\Big(\frac{\Im(\phi(z))}{B(r)}\Big)^2.$$

Η ϕ έχει ρίζα τάξης τουλάχιστον 2 στο 0, οπότε υπάρχει h ολόμορφη στον $\mathbf{U}$ ώστε να είναι $\phi(z)=z^2h(z)$ για κάθε $z\in\mathbf{U}$. Η h είναι συνεχής στο $\overline{D(0;r_0)}$ και, επομένως, υπάρχει $M>0$ ώστε να είναι $|\phi(z)|\le Mr^2$ για κάθε $z=re^{i\theta}\in\overline{D(0;r_0)}$. Αν, λοιπόν, $0<r\le r_0$ και $|z|=r$, συνεπάγεται

$$\frac{u(z)^2}{A(r)^2}+\frac{v(z)^2}{B(r)^2}\le 1+4Mr^3+4M^2r^6+4Mr^3+4M^2r^6<1+\eta r^3\,,$$

όπου θέτουμε $\eta=8M+8M^2$. Άρα, αν $0<r\le r_0$, το $F(T_r)$ περιέχεται στο εσωτερικό της έλλειψης E_r, η οποία είναι συμμετρική ως προς το 0, έχει ημιάξονες μήκους $A(r)\sqrt{1+\eta r^3}$ και $B(r)\sqrt{1+\eta r^3}$ και περικλείει εμβαδό

$$\pi A(r)B(r)(1+\eta r^3)=\pi\Big(\frac{1}{r}+a_1r\Big)\Big(\frac{1}{r}-a_1r\Big)(1+\eta r^3)\le\frac{\pi}{r^2}(1+\eta r^3).$$

Η $\frac{1}{F}$ είναι μερόμορφη στο $\mathbf{U}\setminus\{0\}$ και, αν την επεκτείνουμε με τιμή 0 στο 0, είναι ολόμορφη στο $W_r\cup\{0\}$, αν το r είναι αρκετά μικρό. Επειδή το σύνολο $\frac{1}{E_r}$ περιέχεται στο εσωτερικό της καμπύλης $(\frac{1}{F})(T_r)$, από το Θεώρημα 1.11 συνεπάγεται ότι $\frac{1}{E_r}\subseteq(\frac{1}{F})(W_r)\cup\{0\}$ και, επομένως, $E_r\subseteq F(W_r)$. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $z\in V_r$ το $F(z)$ ανήκει στο εξωτερικό της E_r και ας θεωρήσουμε το κοντινότερο z' του T_r προς το z. Επειδή το $F(z')$ ανήκει στο εσωτερικό της E_r, συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο z'' στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα z και z', δηλαδή κάποιο $z''\in V_r$ ώστε να είναι $F(z'')\in E_r$ και, επομένως, $F(z'')\in F(W_r)$. Αυτό είναι άτοπο, οπότε συμπεραίνουμε ότι το $F(V_r)$ περιέχεται στο εσωτερικό της E_r. Άρα, αν το r είναι αρκετά μικρό, το εμβαδό του $F(V_r)$ είναι $\le\frac{\pi}{r^2}(1+\eta r^3)$. Από τις εξισώσεις Cauchy - Riemann συνεπάγεται ότι η ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού $z=(x,y)\mapsto(u(z),v(z))$ είναι $|F'(z)|^2$. Θεωρούμε οποιοδήποτε αρκετά μικρό $r>0$ και οποιοδήποτε $r'<1$ αρκετά κοντά στο 1. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες και εκμεταλλευόμενοι την ομοιόμορφη σύγκλιση των σειρών που εμφανίζονται, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{r^2}(1+\eta r^3) &\ge \int\!\!\int_{V_r}|F'(z)|^2\,dxdy\\
&\ge \int_r^{r'}\int_0^{2\pi}\Big|-\frac{1}{t^2}e^{-2i\theta}+\sum_{n=1}^{+\infty}na_nt^{n-1}e^{i(n-1)\theta}\Big|^2\,d\theta\,tdt\\
&= 2\pi\int_r^{r'}\Big(\frac{1}{t^3}+\sum_{n=1}^{+\infty}n^2|a_n|^2t^{2n-1}\Big)\,dt\\
&= \pi\Big(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r'^2}\Big)+\pi\sum_{n=1}^{+\infty}n|a_n|^2(r'^{2n}-r^{2n}).
\end{aligned}$$

Συνεπάγεται

$$\sum_{n=1}^{N} n|a_n|^2(r'^{2n} - r^{2n}) \leq \frac{1}{r'^2} + \eta r$$

για κάθε $N \in \mathbf{N}$, κάθε αρκετά μικρό $r > 0$ και κάθε $r' < 1$ αρκετά κοντά στο 1. Παίρνοντας όριο καθώς $r \to 0+$ και $r' \to 1-$, βρίσκουμε $\sum_{n=1}^{N} n|a_n|^2 \leq 1$ για κάθε $N \in \mathbf{N}$ και η απόδειξη είναι πλήρης.

Λήμμα 2.3 *Αν $f \in \mathcal{S}$ και $f(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$ $(z \in \mathbf{U})$, τότε*
(i) $|a_2| \leq 2$,
(ii) $D(0; \frac{1}{4}) \subseteq f(\mathbf{U})$.

Απόδειξη: *(i)* Απο το Λήμμα 2.1 συνεπάγεται ότι υπάρχει $g \in \mathcal{S}$ με

$$g(z)^2 = f(z^2) \qquad (z \in \mathbf{U}).$$

Από την $f(z^2) = z^2(1 + a_2 z^2 + \cdots)$ συνεπάγεται $g(z) = z\big(1 + \frac{1}{2}a_2 z^2 + \cdots\big)$ και, ορίζοντας

$$F(z) = \frac{1}{g(z)} \qquad (z \in \mathbf{U} \setminus \{0\}),$$

έχουμε:

$$F(z) = \frac{1}{z}\Big(1 - \frac{1}{2}a_2 z^2 + \cdots\Big) = \frac{1}{z} - \frac{a_2}{2}z + \cdots \qquad (z \in \mathbf{U} \setminus \{0\}).$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.2, παίρνουμε $\frac{|a_2|}{2} \leq 1$ και, επομένως, $|a_2| \leq 2$.
(ii) Έστω $w \notin f(\mathbf{U})$. Ορίζουμε

$$h(z) = \frac{f(z)}{1 - \frac{f(z)}{w}} \qquad (z \in \mathbf{U}).$$

Η h είναι ολόμορφη και ένα-προς-ένα στον $\mathbf{U}$ και

$$h(z) = (z + a_2 z^2 + \cdots)\Big(1 + \frac{z}{w} + \cdots\Big) = z + \Big(a_2 + \frac{1}{w}\Big)z^2 + \cdots \qquad (z \in \mathbf{U}).$$

Άρα $h \in \mathcal{S}$ και, εφαρμόζοντας το *(i)* στην h, βρίσκουμε $|a_2 + \frac{1}{w}| \leq 2$ και, επειδή $|a_2| \leq 2$, συνεπάγεται $|w| \geq \frac{1}{4}$. Δείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $w \notin f(\mathbf{U})$ είναι $|w| \geq \frac{1}{4}$, οπότε η απόδειξη είναι πλήρης.

Λήμμα 2.4 *Έστω F ολόμορφη και ένα-προς-ένα στο $\mathbf{U} \setminus \{0\}$ και*

$$F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \qquad (z \in \mathbf{U} \setminus \{0\}).$$

Αν $w_1, w_2 \notin F(\mathbf{U})$, τότε $|w_1 - w_2| \leq 4$.

Απόδειξη: Ορίζουμε $f = \frac{1}{F - w_1}$ στο $\mathbf{U}$ με τιμή 0 στο 0. Τότε $f \in \mathcal{S}$ και, επομένως, $D(0, \frac{1}{4}) \subseteq f(\mathbf{U})$. Επειδή $\frac{1}{w_2 - w_1} \notin f(\mathbf{U})$, συνεπάγεται $|w_1 - w_2| \leq 4$.

Λήμμα 2.5 *Έστω ανοικτός δίσκος D ακτίνας r, συμπαγές και συνεκτικό $K \subseteq D$ διαμέτρου $\geq r$ με συνεκτικό $\Omega = K^c$. Τότε υπάρχει g ολόμορφη στο $\Omega \cup \{\infty\}$ και αριθμός b ώστε*

$$\left|g(z) + (\zeta - b)g(z)^2\right| < \frac{100}{r} \qquad (z \in \Omega, \zeta \in D),$$

$$\left|\big(g(z) + (\zeta - b)g(z)^2\big)(z - \zeta)^3 - (z - \zeta)^2\right| < 1000r^2 \qquad (z \in \Omega, \zeta \in D).$$

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $D = D(0, r)$. Επειδή το $\Omega \cup \{\infty\}$ είναι απλά συνεκτικό, από το Θεώρημα του Riemann συνεπάγεται ότι υπάρχει $F : \mathbf{U} \to \Omega \cup \{\infty\}$ ολόμορφη στο $\mathbf{U}$, ένα-προς-ένα στο $\mathbf{U}$ και επί του $\Omega \cup \{\infty\}$ ώστε $F(0) = \infty$. Η F έχει ανάπτυγμα της μορφής

$$F(w) = \frac{a}{w} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n \qquad (w \in \mathbf{U} \setminus \{0\}).$$

Ορίζουμε $g(\infty) = 0$ και

$$g(z) = \frac{F^{-1}(z)}{a} \qquad (z \in \Omega).$$

Αφού $C(0; r) \subseteq \Omega$, μπορούμε να ορίσουμε

$$b = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0;r)} z g(z)\, dz.$$

Από το Λήμμα 2.4 συνεπάγεται ότι η διάμετρος του $\big((\frac{F}{a})(\mathbf{U})\big)^c$ είναι ≤ 4 και, επομένως,

$$\frac{r}{|a|} \leq 4.$$

Άρα

$$|b| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \max_{|z|=r} |zg(z)| \leq r^2 \frac{1}{|a|} \leq r^2 \frac{4}{r} = 4r.$$

Αν $\zeta \in D$, τότε $|\zeta| < r$ και, επομένως,

$$\left|g(z) + (\zeta - b)g(z)^2\right| \leq |g(z)| + (|\zeta| + |b|)|g(z)|^2 \leq \frac{4}{r} + 5r\frac{16}{r^2} < \frac{100}{r}$$

για κάθε $z \in \Omega$ και $\zeta \in D$.

Τώρα σταθεροποιούμε $\zeta \in D$. Αν $z = F(w)$ με $z \in \Omega$ και $w \in \mathbf{U} \setminus \{0\}$, τότε $zg(z) = \frac{wF(w)}{a}$ και, επειδή $\lim_{w \to 0}(wF(w)) = a$, έχουμε $\lim_{z \to \infty}(zg(z)) = 1$. Άρα η g έχει ανάπτυγμα της μορφής

$$g(z) = \frac{1}{z - \zeta} + \sum_{n=2}^{+\infty} \lambda_n(\zeta) \frac{1}{(z - \zeta)^n} \qquad (|z - \zeta| > 2r).$$

Αν το $R > 0$ είναι αρκετά μεγάλο, τότε είναι

$$\lambda_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0;R)} (z-\zeta) g(z)\, dz = b - \zeta.$$

Η συνάρτηση

$$\phi(z) = \big(g(z) + (\zeta - b) g(z)^2\big)(z-\zeta)^3 - (z-\zeta)^2 \qquad (z \in \Omega)$$

έχει ανάπτυγμα

$$\Big(\frac{1}{z-\zeta} + \frac{\lambda_2(\zeta)}{(z-\zeta)^2} + \cdots + (\zeta - b)\frac{1}{(z-\zeta)^2} + \cdots\Big)(z-\zeta)^3 - (z-\zeta)^2 \qquad (|z-\zeta| > 2r)$$

και, επομένως, είναι φραγμένη καθώς $z \to \infty$. Άρα η ϕ έχει αιρόμενη ανωμαλία στο ∞. Αν $z \in \Omega \cap D$, τότε $|z - \zeta| < 2r$, οπότε έχουμε

$$|\phi(z)| < \frac{100}{r} 8r^3 + 4r^2 < 1000 r^2\,.$$

Από την Αρχή Μεγίστου συνεπάγεται ότι η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε $z \in \Omega$.

Λήμμα 2.6 *Για κάθε* $f \in \mathbf{C}^1_c(\mathbf{C})$ *ισχύει:*

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \int\int_{\mathbf{C}} \frac{(\overline{\partial} f)(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta \qquad (\zeta = \xi + i\eta, z \in \mathbf{C}).$$

Απόδειξη: Θέτουμε $\phi_z(r,\theta) = f(z + re^{i\theta})$ για κάθε $r > 0$ και $\theta \in \mathbf{R}$. Αν $\zeta = z + re^{i\theta}$, από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$(\overline{\partial} f)(\zeta) = \frac{e^{i\theta}}{2} \frac{\partial \phi_z}{\partial r}(r,\theta) + \frac{ie^{i\theta}}{2r} \frac{\partial \phi_z}{\partial \theta}(r,\theta).$$

Άρα

$$-\frac{1}{\pi} \int\int_{\mathbf{C}} \frac{(\overline{\partial} f)(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta = -\lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi} \int_\epsilon^{+\infty} \int_0^{2\pi} \Big(\frac{\partial \phi_z}{\partial r}(r,\theta) + \frac{i}{r}\frac{\partial \phi_z}{\partial \theta}(r,\theta)\Big)\, d\theta dr.$$

Για κάθε $r > 0$ η $\phi_z(r,\theta)$ είναι περιοδική συνάρτηση του θ με περίοδο 2π. Άρα το ολοκλήρωμα του $\frac{\partial \phi_z}{\partial \theta}$ είναι ίσο με 0, οπότε

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int\int_{\mathbf{C}} \frac{(\overline{\partial} f)(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta &= -\lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_\epsilon^{+\infty} \frac{\partial \phi_z}{\partial r}(r,\theta)\, d\theta dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \to 0+} \int_0^{2\pi} \phi_z(\epsilon,\theta)\, d\theta. \end{aligned}$$

Η απόδειξη έχει τελειώσει διότι $\lim_{\epsilon \to 0+} \phi_z(\epsilon,\theta) = f(z)$ ομοιόμορφα στο $[0, 2\pi]$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος του Mergelyan.

Θεωρούμε συμπαγές $K \subseteq \mathbf{C}$ με συνεκτικό K^c, f συνεχή στο K και ολόμορφη στο K^o και $\epsilon > 0$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα του Tietze, μπορούμε να επεκτείνουμε την f σε συνάρτηση $f \in \mathbf{C}_c(\mathbf{C})$. Για κάθε $\delta > 0$ ορίζουμε

$$\omega(\delta) = \sup\big\{|f(z_1) - f(z_2)| : |z_1 - z_2| \leq \delta\big\}.$$

Επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, συνεπάγεται

$$\lim_{\delta \to 0+} \omega(\delta) = 0.$$

Άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να είναι $\omega(\delta) \leq \frac{\epsilon}{10000}$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε την ύπαρξη πολυωνύμου p με

$$|p(z) - f(z)| \leq 10000\omega(\delta) \qquad (z \in K).$$

Ο πρώτος μας στόχος είναι να κατασκευάσουμε $\Phi \in \mathbf{C}_c^1(\mathbf{C})$ ώστε:

$$(1) \qquad |\Phi(z) - f(z)| \leq \omega(\delta) \qquad (z \in \mathbf{C}),$$

$$(2) \qquad |(\overline{\partial}\Phi)(z)| < \frac{2\omega(\delta)}{\delta} \qquad (z \in \mathbf{C}),$$

$$(3) \qquad \Phi(z) = -\frac{1}{\pi}\int\int_X \frac{(\overline{\partial}\Phi)(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta, \qquad (\zeta = \xi + i\eta,\ z \in \mathbf{C}),$$

όπου X είναι το σύνολο

$$X = \big\{\zeta \in \operatorname{supp}(\Phi) : \operatorname{dist}(\zeta, K^c) \leq \delta\big\}.$$

Ορίζουμε $a : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ με τύπο

$$a(r) = \begin{cases} 0, & \text{αν } r > \delta \\ \frac{3}{\pi\delta^2}\left(1 - \frac{r^2}{\delta^2}\right)^2, & \text{αν } 0 \leq r \leq \delta \end{cases}$$

και

$$A(\zeta) = a(|\zeta|) \qquad (\zeta \in \mathbf{C}).$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $A \in \mathbf{C}_c^1(\mathbf{C})$ και ότι:

$$(a) \qquad \int\int_{\mathbf{C}} A(\zeta)\, d\xi d\eta = 1 \qquad (\zeta = \xi + i\eta),$$

$$(b) \qquad \int\int_{\mathbf{C}} (\overline{\partial}A)(\zeta)\, d\xi d\eta = 0 \qquad (\zeta = \xi + i\eta),$$

$$(c) \qquad \int\int_{\mathbf{C}} \big|(\overline{\partial}A)(\zeta)\big|\, d\xi d\eta = \frac{24}{15\delta} < \frac{2}{\delta} \qquad (\zeta = \xi + i\eta).$$

Ας δούμε την απόδειξη του (c). Από τον ορισμό της A έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int\int_{\mathbf{C}} \big|(\overline{\partial}A)(\zeta)\big|\,d\xi d\eta &= \int\int_{|\zeta|\le\delta} \big|(\overline{\partial}A)(\zeta)\big|\,d\xi d\eta \\
&= \frac{6}{\pi\delta^4}\int\int_{\xi^2+\eta^2\le\delta^2}\Big(1-\frac{\xi^2+\eta^2}{\delta^2}\Big)\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,d\xi d\eta \\
&= \frac{6}{\pi\delta^4}\int_0^{\delta}\int_0^{2\pi}\Big(1-\frac{\rho^2}{\delta^2}\Big)\rho^2\,d\theta d\rho \\
&= \frac{12}{\delta^4}\int_0^{\delta}\Big(\rho^2-\frac{\rho^4}{\delta^2}\Big)\,d\rho \\
&= \frac{24}{15\delta} < \frac{2}{\delta}\,.
\end{aligned}$$

Τώρα ορίζουμε:

$$\Phi(z) = \int\int_{\mathbf{C}} f(z-\zeta)A(\zeta)\,d\xi d\eta = \int\int_{\mathbf{C}} A(z-\zeta)f(\zeta)\,d\xi d\eta \quad (\zeta=\xi+i\eta, z\in\mathbf{C}).$$

Επειδή $f\in\mathbf{C}_c(\mathbf{C})$ και $A\in\mathbf{C}_c^1(\mathbf{C})$, συνεπάγεται ότι $\Phi\in\mathbf{C}_c^1(\mathbf{C})$. Παρατηρούμε ότι από το (a) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}
\Phi(z)-f(z) &= \int\int_{\mathbf{C}}\big(f(z-\zeta)-f(z)\big)A(\zeta)\,d\xi d\eta \\
&= \int\int_{|\zeta|\le\delta}\big(f(z-\zeta)-f(z)\big)A(\zeta)\,d\xi d\eta,
\end{aligned}$$

από όπου προκύπτει η (1):

$$\begin{aligned}
|\Phi(z)-f(z)| &\le \int\int_{|\zeta|\le\delta}|f(z-\zeta)-f(z)|A(\zeta)\,d\xi d\eta \\
&\le \omega(\delta)\int\int_{|\zeta|\le\delta}A(\zeta)\,d\xi d\eta \\
&= \omega(\delta)\int\int_{\mathbf{C}}A(\zeta)\,d\xi d\eta = \omega(\delta) \qquad (z\in\mathbf{C}).
\end{aligned}$$

Από την (b) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}
(\overline{\partial}\Phi)(z) &= \int\int_{\mathbf{C}}(\overline{\partial}A)(z-\zeta)f(\zeta)\,d\xi d\eta \\
&= \int\int_{\mathbf{C}} f(z-\zeta)(\overline{\partial}A)(\zeta)\,d\xi d\eta \\
&= \int\int_{\mathbf{C}}\big(f(z-\zeta)-f(z)\big)(\overline{\partial}A)(\zeta)\,d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Άρα, χρησιμοποιώντας και την (c), αποδεικνύουμε την (2):

$$|(\overline{\partial}\Phi)(z)| \le \int\int_{\mathbf{C}}|f(z-\zeta)-f(z)||(\overline{\partial}A)(\zeta)|\,d\xi d\eta$$

$$\begin{aligned}
&= \int\int_{|\zeta|\leq\delta} |f(z-\zeta)-f(z)||(\overline{\partial}A)(\zeta)|\, d\xi d\eta \\
&\leq \omega(\delta)\int\int_{\mathbf{C}} |(\overline{\partial}A)(\zeta)|\, d\xi d\eta \\
&< \frac{2\omega(\delta)}{\delta} \qquad (z\in\mathbf{C}).
\end{aligned}$$

Βάσει του Λήμματος 2.6 η σχέση (3) θα αποδειχθεί αν δείξουμε ότι:

$$\int\int_{X^c} \frac{(\overline{\partial}\Phi)(\zeta)}{\zeta-z}\, d\xi d\eta = 0$$

ή, ισοδύναμα:

$$\int\int_{G} \frac{(\overline{\partial}\Phi)(\zeta)}{\zeta-z}\, d\xi d\eta = 0,$$

όπου $G = \big\{\zeta \in K : \mathrm{dist}(\zeta, K^c) > \delta\big\} \subseteq K^o$. Αυτό θα το καταφέρουμε αποδεικνύοντας ότι

$$\Phi(\zeta) = f(\zeta) \qquad (\zeta\in G),$$

καθώς η f είναι ολόμορφη στο K^o και από τις εξισώσεις Cauchy-Riemann θα έχουμε:

$$(\overline{\partial}\Phi)(\zeta) = (\overline{\partial}f)(\zeta) = 0 \qquad (\zeta\in G).$$

Αν $\zeta\in G$, τότε $\zeta - re^{i\theta}\in K^0$ για κάθε r με $0\leq r\leq\delta$. Από την ιδιότητα μέσης τιμής ολόμορφων συναρτήσεων, για κάθε $\zeta\in G$ είναι

$$\begin{aligned}
\Phi(\zeta) &= \int_0^{\delta}\int_0^{2\pi} f(\zeta - re^{i\theta})a(r)r\, d\theta dr \\
&= 2\pi f(\zeta)\int_0^{\delta} a(r)r\, dr \\
&= f(\zeta)\int\int_{\mathbf{C}} A(\zeta)\, d\xi d\eta = f(\zeta)
\end{aligned}$$

και η (3) έχει αποδειχθεί.

Προφανώς, $X\subseteq\bigcup_{z\in K^c} D(z;2\delta)$, οπότε, επειδή το X είναι συμπαγές, υπάρχουν ανοικτοί δίσκοι $D_1,\ldots,D_n$ ακτίνας 2δ με κέντρα στο K^c ώστε:

$$X\subseteq\bigcup_{k=1}^{n} D_k\,.$$

Επειδή το K^c είναι ανοικτό και συνεκτικό, το κέντρο καθενός D_k μπορεί να ενωθεί με το ∞ με μια πολυγωνική γραμμή στο K^c. Άρα υπάρχει συμπαγές $K_k\subseteq D_k$ με διάμετρο $\geq 2\delta$ ώστε το $\Omega_k = {K_k}^c$ να είναι συνεκτικό και $K\subseteq\Omega_k$. Εφαρμόζουμε τώρα το Λήμμα 2.5, οπότε προκύπτουν συναρτήσεις g_k ολόμορφες στο $\Omega_k\cup\{\infty\}$ και αριθμοί b_k ώστε:

$$(4) \qquad \big|g_k(z) + (\zeta - b_k)g_k(z)^2\big| < \frac{50}{\delta} \qquad (z\in\Omega_k, \zeta\in D_k),$$

$$(5) \qquad \Big|\Big(g_k(z)+(\zeta-b_k)g_k(z)^2\Big)(z-\zeta)^3-(z-\zeta)^2\Big| < 4000\delta^2 \qquad (z\in\Omega_k, \zeta\in D_k).$$

Θέτουμε

$$\Omega = \Big(\bigcup_{k=1}^{n} K_k\Big)^c = \bigcap_{k=1}^{n} \Omega_k\,.$$

Το Ω είναι ανοικτό και περιέχει το K. Ορίζουμε $X_1 = X\cap D_1 \subseteq D_1$ και, επαγωγικά, για $2\le k\le n$ ορίζουμε $X_k = (X\cap D_k)\setminus(X_1\cup\cdots\cup X_{k-1})\subseteq D_k$. Τα $X_1,\dots,X_n$ αποτελούν διαμέριση του X, οπότε μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση $R(\zeta,z)$ για κάθε $\zeta\in X$ και $z\in\Omega$ με τους τύπους

$$R(\zeta,z) = g_k(z)+(\zeta-b_k)g_k(z)^2, \qquad (z\in\Omega, \zeta\in X_k).$$

Τέλος, ορίζουμε

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi}\int\int_X (\overline{\partial}\Phi)(\zeta)R(\zeta,z)\,d\xi d\eta \qquad (\zeta=\xi+i\eta, z\in\Omega).$$

Επειδή τα $X_1,\dots,X_n$ αποτελούν διαμέριση του X, συνεπάγεται

$$\Psi(z) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int\int_{X_k}(\overline{\partial}\Phi)(\zeta)\Big(g_k(z)+(\zeta-b_k)g_k(z)^2\Big)\,d\xi d\eta \qquad (\zeta=\xi+i\eta, z\in\Omega).$$

Επειδή κάθε g_k είναι ολόμορφη στο Ω_k, η Ψ είναι ολόμορφη στο Ω ως γραμμικός συνδυασμός των $g_1,\dots,g_n$ και ${g_1}^2,\dots,{g_n}^2$.

Από την (3) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\Psi(z)-\Phi(z) &= \frac{1}{\pi}\int\int_X(\overline{\partial}\Phi)(\zeta)R(\zeta,z)\,d\xi d\eta + \frac{1}{\pi}\int\int_X\frac{(\overline{\partial}\Phi)(\zeta)}{\zeta-z}\,d\xi d\eta\\ &= \frac{1}{\pi}\int\int_X(\overline{\partial}\Phi)(\zeta)\Big(R(\zeta,z)+\frac{1}{\zeta-z}\Big)\,d\xi d\eta \qquad (z\in\Omega)\end{aligned}$$

και, επομένως,

$$|\Psi(z)-\Phi(z)| \le \frac{1}{\pi}\int\int_X|(\overline{\partial}\Phi)(\zeta)|\Big|R(\zeta,z)-\frac{1}{z-\zeta}\Big|\,d\xi d\eta \qquad (z\in\Omega).$$

Άρα, από την (2) έχουμε:

$$|\Psi(z)-\Phi(z)| \le \frac{2\omega(\delta)}{\pi\delta}\int\int_X\Big|R(\zeta,z)-\frac{1}{z-\zeta}\Big|\,d\xi d\eta \qquad (z\in\Omega).$$

Απο τον ορισμό της $R(\zeta,z)$ και από τις (4) και (5) συνεπάγεται

$$|R(\zeta,z)| < \frac{50}{\delta}, \quad \Big|R(\zeta,z)(z-\zeta)^3-(z-\zeta)^2\Big| < 4000\delta^2 \qquad (z\in\Omega, \zeta\in X).$$

Τώρα για κάθε $z\in\Omega$ θέτουμε $\zeta = z+re^{i\theta}$ και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}\int\int_X\Big|R(\zeta,z)-\frac{1}{z-\zeta}\Big|\,d\xi d\eta &\le 2\pi\int_0^{4\delta}\Big(\frac{50}{\delta}+\frac{1}{r}\Big)r\,dr + 2\pi\int_{4\delta}^{+\infty}\frac{4000\delta^2}{r^3}r\,dr\\ &= 2808\pi\delta.\end{aligned}$$

Άρα
$$|\Psi(z)-\Phi(z)| \leq \frac{2\omega(\delta)}{\pi\delta}2808\pi\delta < 6000\omega(\delta) \qquad (z\in\Omega).$$

Επειδή η Ψ είναι ολόμορφη στο Ω και το $K\subseteq\Omega$ είναι συμπαγές με συνεκτικό συμπλήρωμα, από το Θεώρημα Προσέγγισης του Runge, συνεπάγεται ότι υπάρχει πολυώνυμο p ώστε να είναι
$$|p(z)-\Psi(z)| < 3000\omega(\delta) \qquad (z\in K).$$

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα με την (1):
$$\begin{aligned} |p(z)-f(z)| &\leq |p(z)-\Psi(z)|+|\Psi(z)-\Phi(z)|+|\Phi(z)-f(z)| \\ &< 3000\omega(\delta)+6000\omega(\delta)+\omega(\delta) \\ &< 10000\omega(\delta) \qquad (z\in K). \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 3

Η απόδειξη του Carleson.

Ως πρώτη εφαρμογή των μεθόδων συναρτησιακής και πραγματικής ανάλυσης που θα χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη του Θεωρήματος του Mergelyan θα αποδείξουμε την εξής πολύ γνωστή ειδική περίπτωση:

Θεώρημα 3.1 ***(Θεώρημα του Weierstrass)*** *Έστω συμπαγές $K \subseteq \mathbf{R}$ και f συνεχής στο K. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $|p - f| \leq \epsilon$ στο K ή, ισοδύναμα, υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο K.*

Απόδειξη: Θεωρώντας ένα διάστημα $[a, b]$ που περιέχει το K μπορούμε μέσω του Θεωρήματος του Tietze να επεκτείνουμε την f σε συνεχή συνάρτηση στο $[a, b]$, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε εξ αρχής ότι $K = [a, b]$. Επίσης με μια απλή αλλαγή μεταβλητής μπορούμε να υποθέσουμε ότι $K = [-1, 1]$.

Έστω Y ο γραμμικός υπόχωρος του $\mathbf{C}([-1, 1])$ ο οποίος αποτελείται από τους περιορισμούς όλων των πολυωνύμων στο $[-1, 1]$. Το θεώρημα είναι ισοδύναμο με το ότι

$$\overline{Y} = \mathbf{C}([-1, 1]).$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.4, αρκεί να αποδείξουμε ότι, αν $\Lambda \in \big(\mathbf{C}([-1, 1])\big)^*$ με $\Lambda = 0$ στον Y, τότε $\Lambda = 0$ στον $\mathbf{C}([-1, 1])$.

Απο το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz υπάρχει μέτρο Borel μ στο $[-1, 1]$ ώστε:

$$\Lambda(f) = \int_{[-1,1]} f(x)\, d\mu(x) \qquad (f \in \mathbf{C}([-1, 1])).$$

Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι

$$\int_{[-1,1]} x^n\, d\mu(x) = 0 \qquad (n \in \mathbf{N}_0)$$

και θα αποδείξουμε ότι

$$\int_{[-1,1]} f(x)\, d\mu(x) = 0 \qquad (f \in \mathbf{C}([-1, 1])).$$

Αν $|z| > 1$, τότε:

$$\begin{aligned}
\int_{[-1,1]} \frac{1}{x-z}\, d\mu(x) &= -\frac{1}{z}\int_{[-1,1]} \frac{1}{1-\frac{x}{z}}\, d\mu(x) \\
&= -\frac{1}{z}\int_{[-1,1]} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{z^n}\Big)\, d\mu(x) \\
&= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n}\int_{[-1,1]} x^n\, d\mu(x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Η εναλλαγή αθροίσματος και ολοκληρώματος στον προηγούμενο υπολογισμό επιτρέπεται λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της γεωμετρικής σειράς στο $[-1,1]$.

Η συνάρτηση με τύπο

$$F(z) = \int_{[-1,1]} \frac{1}{x-z}\, d\mu(x)$$

είναι ολόμορφη στο $[-1,1]^c$, διότι

$$(\overline{\partial}F)(z) = \int_{[-1,1]} \overline{\partial}\Big(\frac{1}{x-z}\Big)\, d\mu(x) = \int_{[-1,1]} 0\, d\mu(x) = 0 \qquad (z \in [-1,1]^c).$$

Από την Αρχή Μοναδικότητας συνεπάγεται

$$\int_{[-1,1]} \frac{1}{x-z}\, d\mu(x) = 0 \qquad (z \in [-1,1]^c).$$

Θεωρούμε οποιαδήποτε $g \in \mathbf{C}^1_c(\mathbf{C})$. Από το Λήμμα 2.6 συνεπάγεται

$$\begin{aligned}
\int_{[-1,1]} g(x)\, d\mu(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_{[-1,1]} \Big(\int\int_{\mathbf{C}} \frac{(\overline{\partial}g)(\zeta)}{\zeta - x}\, d\xi d\eta\Big)\, d\mu(x) \\
&= \frac{1}{\pi}\int\int_{\mathbf{C}} \Big(\int_{[-1,1]} \frac{1}{x-\zeta}\, d\mu(x)\Big)(\overline{\partial}g)(\zeta)\, d\xi d\eta \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.14, κάθε $f \in \mathbf{C}([-1,1])$ είναι ομοιόμορφο όριο στο $[-1,1]$ συναρτήσεων $g \in \mathbf{C}^1_c(\mathbf{C})$, οπότε καταλήγουμε στο ότι ισχύει $\int_{[-1,1]} f(x)\, d\mu(x) = 0$ για κάθε $f \in \mathbf{C}([-1,1])$.

Από το σημείο αυτό αρχίζει η προετοιμασία για την απόδειξη του Θεωρήματος του Mergelyan.

Λήμμα 3.1 *Έστω συμπαγές $K \subseteq \mathbf{C}$ με συνεκτικό $\Omega = K^c$ και μέτρο Borel μ στο K. Τότε το ολοκλήρωμα*

$$u(z) = \int_K \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu(\zeta)$$

είναι πεπερασμένο για κάθε $z \in \Omega$ και για σχεδόν κάθε $z \in \mathbf{C}$ ως προς το μέτρο Lebesgue. Η u είναι αρμονική στο Ω και, αν $u = 0$ στο Ω, τότε $u(z) = 0$ για κάθε $z \in \partial\Omega = \partial K$ στο οποίο το ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Απόδειξη: Επειδή το K είναι φραγμένο, το ολοκλήρωμα

$$\int_K \log^- \frac{1}{|z-\zeta|}\, d|\mu|(\zeta)$$

είναι πεπερασμένο για κάθε $z \in \mathbf{C}$. Άρα η σύγκλιση του αρχικού ολοκληρώματος ισοδυναμεί με τη σύγκλιση του

$$\int_K \log^+ \frac{1}{|z-\zeta|}\, d|\mu|(\zeta).$$

Όμως έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\int\int_{z\in\mathbf{C}}\int_K \log^+ \frac{1}{|z-\zeta|}\, d|\mu|(\zeta)\, dxdy &= \int_K \int\int_{z\in\mathbf{C}} \log^+ \frac{1}{|z-\zeta|}\, dxdy\, d|\mu|(\zeta) \\ &= \frac{\pi}{2}|\mu|(K) < +\infty \qquad (z = x+iy)\end{aligned}$$

Άρα πράγματι το $u(z)$ είναι πεπερασμένο για σχεδόν κάθε $z \in \mathbf{C}$ ως προς το μέτρο Lebesgue. Επίσης, για κάθε $z \in \Omega$ η συνάρτηση $\left|\log \frac{1}{|z-\zeta|}\right|$ του ζ είναι φραγμένη στο K, οπότε είναι $\int_K \left|\log \frac{1}{|z-\zeta|}\right| d|\mu|(\zeta) < +\infty$. Για τον ίδιο λόγο:

$$(\Delta u)(z) = \int_K \Delta\Big(\log \frac{1}{|z-\zeta|}\Big)\, d\mu(\zeta) = \int_K 0\, d\mu(\zeta) = 0 \qquad (z \in \Omega),$$

οπότε η u είναι αρμονική στο Ω.

Υποθέτουμε τώρα ότι $u = 0$ στο Ω και θεωρούμε $z_0 \in \partial\Omega$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $z_0 = 0$.

Για κάθε $r > 0$ το $\Omega_r = \{z \in \Omega : |z| = r\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $T_r = \{z \in \mathbf{C} : |z| = r\}$ και, επειδή το Ω είναι συνεκτικό, το Ω_r δεν είναι κενό. Συμβολίζουμε $l_r (> 0)$ το μήκος του Ω_r.

Έστω $\delta > 0$. Τότε για $0 < r \le \delta$ ορίζουμε την f στο $\{z \in \Omega : 0 < |z| \le \delta\}$ με τύπο

$$f(z) = \frac{1}{l_r} \qquad (z \in \Omega_r\,, 0 < r \le \delta).$$

Η f είναι Borel συνάρτηση στο $\{z \in \Omega : 0 < |z| \le \delta\}$.

Επίσης, ορίζουμε το μη αρνητικό μέτρο $d\sigma_\delta(z) = f(z)\, dxdy$ $(z = x+iy)$ στο $\{z \in \Omega : 0 < |z| \le \delta\}$. Δηλαδή για κάθε Borel $A \subseteq \{z \in \Omega : 0 < |z| \le \delta\}$ ισχύει

$$\sigma_\delta(A) = \int_A f(z)\, dxdy \qquad (z = x+iy).$$

Παρατηρούμε ότι, αν $0 < r_1 < r_2 \le \delta$, τότε

$$\sigma_\delta(\{z \in \Omega : r_1 \le |z| \le r_2\}) \;=\; \int_{r_1}^{r_2}\int_{\Omega_r} r f(r)\, d\theta dr$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{r_1}^{r_2} l_r f(r)\, dr \\
&= r_2 - r_1 \,.
\end{aligned}
$$

Ειδικώτερα, το σ_δ είναι πεπερασμένο.

Επειδή $u = 0$ στο Ω, προκύπτει ότι:

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{\{z\in\Omega: 0<|z|\le\delta\}} u(z)\, d\sigma_\delta(z) &= \int_{\{z\in\Omega: 0<|z|\le\delta\}} \int_K \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu(\zeta) d\sigma_\delta(z) \\
&= \int_{\{z\in\Omega: 0<|z|\le\delta\}} \int_{|\zeta|<\rho} \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu(\zeta) d\sigma_\delta(z) \\
&+ \int_{\{z\in\Omega: 0<|z|\le\delta\}} \int_{|\zeta|\ge\rho} \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu(\zeta) d\sigma_\delta(z)
\end{aligned}
$$

για οποιοδήποτε θετικό αριθμό ρ. Θεωρούμε

$$
0 < \rho \le \frac{1}{2}
$$

και έχουμε

$$
\lim_{\delta\to 0+} \frac{1}{\delta} \int_{\{z\in\Omega: 0<|z|\le\delta\}} \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\sigma_\delta(z) = \log\frac{1}{|\zeta|}
$$

ομοιόμορφα στο $\{\zeta \in K : |\zeta| \ge \rho\}$. Πράγματι, αν $\delta < \rho \le \frac{1}{2}$ και $|\zeta| \ge \rho$, είναι

$$
\begin{aligned}
\Big|\frac{1}{\delta} \int_{\{z\in\Omega: 0<|z|\le\delta\}} \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\sigma_\delta(z) \;&-\; \log\frac{1}{|\zeta|}\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{\delta} \int_{\{z\in\Omega: 0<|z|\le\delta\}} \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\sigma_\delta(z) \\
&\quad -\frac{1}{\delta} \int_{\{z\in\Omega: 0<|z|\le\delta\}} \log\frac{1}{|\zeta|}\, d\sigma_\delta(z)\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{\delta} \int_{\{z\in\Omega: 0<|z|\le\delta\}} \log\frac{|\zeta|}{|z-\zeta|}\, d\sigma_\delta(z)\Big| \\
&\le \log\frac{\rho}{\rho-\delta} \,.
\end{aligned}
$$

Επίσης, αν $0 < |\zeta| < \rho \le \frac{1}{2}$ και $\zeta \in K$ και αν $\delta \le \frac{1}{2}$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
0 &\le \frac{1}{\delta} \int_{\{z\in\Omega: 0<|z|\le\delta\}} \log\frac{1}{|z-\zeta|}\, d\sigma_\delta(z) \\
&\le \frac{1}{\delta} \int_{\{z\in\Omega: 0<|z|\le\delta\}} \log\frac{1}{||z|-|\zeta||}\, d\sigma_\delta(z) = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \log\frac{1}{|r-|\zeta||}\, dr \\
&= \log\frac{1}{|\zeta|} + \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \log\frac{1}{\left|1-\frac{r}{|\zeta|}\right|}\, dr
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \log\frac{1}{|\zeta|} + \frac{|\zeta|}{\delta}\int_0^{\frac{\delta}{|\zeta|}} \log\frac{1}{|1-t|}\,dt \\
&\le \log\frac{1}{|\zeta|} + c,
\end{aligned}
$$

όπου

$$c = \sup_{T>0} \frac{1}{T}\int_0^T \log^+ \frac{1}{|1-t|}\,dt < +\infty.$$

Άρα, αν $0 < \rho \le \frac{1}{2}$ και $0 < \delta < \frac{1}{2}$, τότε

$$
\begin{aligned}
&\Big| -\int_{|\zeta|\ge\rho} \frac{1}{\delta}\int_{\{z\in\Omega:0<|z|\le\delta\}} \log\frac{1}{|z-\zeta|}\,d\sigma_\delta(z)d\mu(\zeta)\Big| \\
&= \Big| \int_{|\zeta|<\rho} \frac{1}{\delta}\int_{\{z\in\Omega:0<|z|\le\delta\}} \log\frac{1}{|z-\zeta|}\,d\sigma_\delta(z)d\mu(\zeta)\Big| \\
&\le \int_{|\zeta|<\rho} \frac{1}{\delta}\int_{\{z\in\Omega:0<|z|\le\delta\}} \log\frac{1}{|z-\zeta|}\,d\sigma_\delta(z)d|\mu|(\zeta) \\
&\qquad \le \int_{|\zeta|<\rho} \Big(\log\frac{1}{|\zeta|} + c\Big)\,d|\mu|(\zeta) < +\infty
\end{aligned}
$$

διότι από την υπόθεσή μας το $\int_K \log\frac{1}{|\zeta|}\,d\mu(\zeta)$ συγκλίνει. Άρα, καθώς $\delta \to 0+$, από όλα τα προηγούμενα συνεπάγεται

$$\Big|\int_{|\zeta|\ge\rho} \log\frac{1}{|\zeta|}\,d\mu(\zeta)\Big| \le \int_{|\zeta|<\rho} \Big(\log\frac{1}{|\zeta|} + c\Big)\,d|\mu|(\zeta).$$

Από την υπόθεση ότι το $\int_K \log\frac{1}{|\zeta|}\,d\mu(\zeta)$ συγκλίνει προκύπτει και ότι $\mu(\{0\}) = 0$, οπότε, παίρνοντας $\rho \to 0+$ στην τελευταία ανισότητα, βρίσκουμε ότι

$$\Big|\int_K \log\frac{1}{|\zeta|}\,d\mu(\zeta)\Big| \le 0,$$

δηλαδή $u(0) = 0$.

Λήμμα 3.2 *Για κάθε* $f \in \mathbf{C}_c^2(\mathbf{C})$ *ισχύει:*

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_{\mathbf{C}} (\Delta f)(\zeta)\log\frac{1}{|z-\zeta|}\,d\xi d\eta \qquad (\zeta = \xi + i\eta, z \in \mathbf{C}).$$

Απόδειξη: Θέτουμε $\phi_z(r,\theta) = f(z + re^{i\theta})$ για κάθε $r > 0$ και $\theta \in \mathbf{R}$. Αν $\zeta = z + re^{i\theta}$, τότε:

$$(\Delta f)(\zeta) = \frac{\partial^2\phi_z}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi_z}{\partial\theta^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi_z}{\partial r}(r,\theta).$$

Άρα

$$-\frac{1}{2\pi}\int\int_{\mathbf{C}} (\Delta f)(\zeta)\log\frac{1}{|z-\zeta|}\,d\xi d\eta$$

$$= -\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi}\int_{\epsilon}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{\partial^2\phi_z}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi_z}{\partial\theta^2}(r,\theta)+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_z}{\partial r}(r,\theta)\Big)r\log\frac{1}{r}\,d\theta dr$$

$$= -\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi}\int_{\epsilon}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{\partial^2\phi_z}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_z}{\partial r}(r,\theta)\Big)r\log\frac{1}{r}\,d\theta dr$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\phi_z(\epsilon,\theta)+\epsilon\log\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\phi_z}{\partial r}(\epsilon,\theta)\Big)\,d\theta$$

$$= f(z).$$

Λήμμα 3.3 *Έστω συμπαγές $K\subseteq\mathbf{C}$, μέτρο Borel μ στο K και το ολοκλήρωμα*

$$u(z)=\int_K\log\frac{1}{|z-\zeta|}d\mu(\zeta).$$

Αν $u=0$ σχεδόν παντού στο $\mathbf{C}$ ώς προς το μέτρο Lebesgue, τότε το μ είναι το μηδενικό μέτρο.

Απόδειξη: Από το Λήμμα 3.2 συνεπάγεται ότι για κάθε $g\in\mathbf{C}_c^2(\mathbf{C})$ είναι:

$$\int_K g(z)\,d\mu(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_K\int\int_{\mathbf{C}}(\Delta g)(\zeta)\log\frac{1}{|z-\zeta|}\,d\xi\,d\eta\,d\mu(z)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\int_{\mathbf{C}}(\Delta g)(\zeta)\int_K\log\frac{1}{|z-\zeta|}\,d\mu(z)\,d\xi\,d\eta$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\int_{\mathbf{C}}(\Delta g)(\zeta)u(\zeta)\,d\xi\,d\eta = 0.$$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.14,

$$\int_K f(z)\,d\mu(z)=0$$

για κάθε $f\in\mathbf{C}(K)$ και, επομένως, το μ είναι το μηδενικό μέτρο.

Λήμμα 3.4 *Έστω συμπαγές $K\subseteq\mathbf{C}$ με συνεκτικό $\Omega=K^c$ και πραγματική $f\in\mathbf{C}(\partial K)$. Τότε για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $|\Re p-f|\le\epsilon$ στο ∂K ή, ισοδύναμα, υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $\Re p_n\to f$ ομοιόμορφα στο ∂K.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τον υπόχωρο

$$Y=\{\Re p : p \text{ πολυώνυμο}\}$$

του $\mathbf{C}_{\mathbf{R}}(\partial K)$. Αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε είναι ισοδύναμο με το

$$\overline{Y}=\mathbf{C}_{\mathbf{R}}(\partial K).$$

Αυτό με τη σειρά του είναι ισοδύναμο με το ότι για κάθε $\Lambda \in \big(\mathbf{C}_{\mathbf{R}}(\partial K)\big)^*$ με $\Lambda = 0$ στον Y ισχύει $\Lambda = 0$ στον $\mathbf{C}_{\mathbf{R}}(\partial K)$. Βάσει του Θεωρήματος 1.16 θεωρούμε οποιοδήποτε πραγματικό μέτρο Borel μ στο ∂K για το οποίο ισχύει

$$\int_{\partial K} \Re(p(\zeta))\, d\mu(\zeta) = 0$$

για κάθε πολυώνυμο p και αρκεί να αποδείξουμε ότι το μ είναι το μηδενικό μέτρο.

Ορίζουμε

$$u(z) = \int_{\partial K} \log \frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu(\zeta).$$

Θεωρούμε αρκετά μεγάλο $R > 0$ ώστε να είναι $K \subseteq D(0; R)$. Για κάθε $z \in \Omega$ με $|z| \geq R$, λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης στο ∂K της σειράς που εμφανίζεται στον παρακάτω υπολογισμό, έχουμε:

$$\begin{aligned} u(z) &= \log \frac{1}{|z|} \int_{\partial K} d\mu(\zeta) + \int_{\partial K} \log \Big| \frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}} \Big|\, d\mu(\zeta) \\ &= 0 + \int_{\partial K} \sum_{n=1}^{+\infty} \Re\Big(\frac{\zeta^n}{n z^n}\Big)\, d\mu(\zeta) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_{\partial K} \Re\Big(\frac{\zeta^n}{z^n}\Big)\, d\mu(\zeta) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Επειδή το Ω είναι συνεκτικό, από την Αρχή της Μοναδικότητας συνεπάγεται

$$u(z) = 0 \qquad (z \in \Omega)$$

και από το Λήμμα 3.1 έχουμε $u(\zeta) = 0$ για σχεδόν κάθε $\zeta \in \partial K$ ως προς το μέτρο Lebesgue.

Πρώτη περίπτωση. Υποθέτουμε ότι $K^o = \emptyset$ και, επομένως, $\partial K = K$.

Τότε είναι $u = 0$ σχεδόν παντού στο $\Omega \cup \partial K = \Omega \cup K = \mathbf{C}$ ως προς το μέτρο Lebesgue. Από το Λήμμα 3.3 συνεπάγεται ότι το μ είναι το μηδενικό μέτρο.

Δεύτερη περίπτωση. Υποθέτουμε ότι $K^o \neq \emptyset$.

Θεωρούμε οποιαδήποτε $\phi \in \mathbf{C}_{\mathbf{R}}(\partial K)$ για την οποία υπάρχει πραγματική u_ϕ συνεχής στο K και αρμονική στο K^o ώστε να είναι $u_\phi = \phi$ στο ∂K. Το σύνολο όλων αυτών των ϕ το συμβολίζουμε X_0.

Απο την Αρχή Μεγίστου συνεπάγεται ότι για κάθε $\phi \in X_0$ η αντίστοιχη u_ϕ είναι μοναδική.

Το X_0 είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $\mathbf{C}_{\mathbf{R}}(\partial K)$. Πράγματι, έστω ακολουθία (ϕ_n) στο X_0 ώστε $\phi_n \to \phi$ ομοιόμορφα στο ∂K. Τότε $\phi \in \mathbf{C}_{\mathbf{R}}(\partial K)$ και από την Αρχή Μεγίστου συνεπάγεται ότι

$$\sup_{z \in K} |u_{\phi_n}(z) - u_{\phi_m}(z)| \leq \sup_{\zeta \in \partial K} |\phi_n(\zeta) - \phi_m(\zeta)|,$$

οπότε η (u_{ϕ_n}) αποτελεί ακολουθία Cauchy στον $\mathbf{C}_\mathbf{R}(K)$. Άρα υπάρχει $u \in \mathbf{C}_\mathbf{R}(K)$ τέτοια ώστε $u_{\phi_n} \to u$ ομοιόμορφα στο K. Άρα η u είναι αρμονική στο K^o και, θεωρώντας τους περιορισμούς των συναρτήσεων στο ∂K, είναι $u = \phi$ στο ∂K. Άρα η ϕ ανήκει στο X_0 και $u_\phi = u$.

Έστω τώρα $a \in K^o$. Η απεικόνιση $\Lambda_0 : X_0 \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$\Lambda_0(\phi) = u_\phi(a)$$

είναι, προφανώς, γραμμικό συναρτησοειδές στον X_0. Από την Αρχή Μεγίστου προκύπτει αμέσως ότι

$$|\Lambda_0(\phi)| = |u_\phi(a)| \leq \sup_{\zeta \in \partial K} |\phi(\zeta)| = \|\phi\|$$

και, επομένως, $\Lambda_0 \in {X_0}^*$ με νόρμα $\|\Lambda_0\| \leq 1$. Επειδή η σταθερή συνάρτηση $\phi = 1$ απεικονίζεται στο $u_1(a) = 1$, είναι $\|\Lambda_0\| = 1$. Από το Θεώρημα Hahn - Banach συνεπάγεται ότι υπάρχει $\Lambda \in \big(\mathbf{C}_\mathbf{R}(\partial K)\big)^*$ με $\Lambda = \Lambda_0$ στον X_0 και $\|\Lambda\| = 1$. Επιπλέον, αν η $\phi \in \mathbf{C}_\mathbf{R}(\partial K)$ είναι ≥ 0 στο ∂K, τότε $0 \leq \phi \leq \|\phi\|$ και, επομένως $\left|\phi - \frac{\|\phi\|}{2}\right| \leq \frac{\|\phi\|}{2}$ στο ∂K. Άρα

$$\left|\Lambda(\phi) - \frac{\|\phi\|}{2}\right| = \left|\Lambda\Big(\phi - \frac{\|\phi\|}{2}\Big)\right| \leq \|\Lambda\| \frac{\|\phi\|}{2} = \frac{\|\phi\|}{2}\,,$$

από το οποίο συνεπάγεται $\Lambda(\phi) \geq 0$. Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz συνεπάγεται ότι υπάρχει μη αρνητικό μέτρο Borel λ_a στο ∂K ώστε

$$|\lambda_a|(\partial K) = 1$$

και

$$u_\phi(a) = \int_{\partial K} \phi(\zeta)\, d\lambda_a(\zeta) \qquad (\phi \in X_0).$$

Θεωρούμε οποιοδήποτε $z \in \Omega$ και ορίζουμε την $\phi_z \in \mathbf{C}_\mathbf{R}(\partial K)$ με τύπο

$$\phi_z(\zeta) = \log \frac{1}{|\zeta - z|} \qquad (\zeta \in \partial K).$$

Είναι προφανές ότι η ϕ_z ορίζεται με τον ίδιο τύπο στο K και είναι συνεχής στο K και αρμονική στο K^o. Άρα $\phi_z \in X_0$ και, μάλιστα, είναι $u_{\phi_z} = \phi_z$ στο K. Άρα

$$\log \frac{1}{|a - z|} = u_{\phi_z}(a) = \int_{\partial K} \phi_z(\zeta)\, d\lambda_a(\zeta) = \int_{\partial K} \log \frac{1}{|z - \zeta|}\, d\lambda_a(\zeta) \qquad (z \in \Omega).$$

Από το Λήμμα του Fatou συνεπάγεται ότι για κάθε $z_0 \in \partial K$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} \log \frac{1}{|z_0 - \zeta|}\, d\lambda_a(\zeta) &\leq \varliminf_{\Omega \ni z \to z_0} \int_{\partial K} \log \frac{1}{|z - \zeta|}\, d\lambda_a(\zeta) \\
&= \lim_{\Omega \ni z \to z_0} \log \frac{1}{|z - a|} \\
&= \log \frac{1}{|z_0 - a|}
\end{aligned}$$

και, επομένως, το ολοκλήρωμα $\int_{\partial K} \log \frac{1}{|z_0-\zeta|}\, d\lambda_a(\zeta)$ συγκλίνει.

Τώρα ορίζουμε

$$u_a(z) = \int_K \log \frac{1}{|z-\zeta|} d(\lambda_a - \delta_a)(\zeta),$$

όπου δ_a είναι το μέτρο Dirac στο a. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, το ολοκλήρωμα $u_a(z_0)$ συγκλίνει για κάθε $z_0 \in \partial K = \partial\Omega$ και είναι $u_a = 0$ στο Ω. Άρα από το Λήμμα 3.1 συνεπάγεται ότι $u_a = 0$ στο $\overline{\Omega}$. Δηλαδή

$$\log \frac{1}{|a-z|} = \int_{\partial K} \log \frac{1}{|z-\zeta|}\, d\lambda_a(\zeta) \qquad (z \in \overline{\Omega}).$$

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K}\int_{\partial K} \log \frac{1}{|z-\zeta|}\, d|\mu|(z)\, d\lambda_a(\zeta) &= \int_{\partial K}\int_{\partial K} \log \frac{1}{|z-\zeta|}\, d\lambda_a(\zeta)\, d|\mu|(z) \\
&= \int_{\partial K} \log \frac{1}{|a-z|}\, d|\mu|(z) < +\infty,
\end{aligned}$$

οπότε το ολοκλήρωμα

$$u(\zeta) = \int_{\partial K} \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu(z)$$

συγκλίνει για σχεδόν κάθε ζ στο $\partial\Omega = \partial K$ ως προς το λ_a. Από το Λήμμα 3.1 συνεπάγεται ότι $u(\zeta) = 0$ για σχεδόν κάθε ζ στο $\partial\Omega = \partial K$ ως προς το λ_a.

Άρα για κάθε $a \in K^o$ είναι

$$\begin{aligned}
u(a) &= \int_{\partial K} \log \frac{1}{|a-z|}\, d\mu(z) \\
&= \int_{\partial K}\int_{\partial K} \log \frac{1}{|z-\zeta|}\, d\lambda_a(\zeta)\, d\mu(z) \\
&= \int_{\partial K}\int_{\partial K} \log \frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu(z)\, d\lambda_a(\zeta) = \int_{\partial K} u(\zeta)\, d\lambda_a(\zeta) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει ότι $u(z) = 0$ για σχεδόν κάθε $z \in \mathbf{C}$ ως προς το μέτρο Lebesgue. Από το Λήμμα 3.3 προκύπτει τώρα ότι το μ είναι το μηδενικό μέτρο.

Ως πόρισμα του Λήμματος 3.4 παίρνουμε το εξής σημαντικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.2 *Έστω συμπαγές $K \subseteq \mathbf{C}$ με συνεκτικό K^c και $f \in \mathbf{C}(\partial K)$. Τότε η f έχει επέκταση συνεχή στο K και αρμονική στο K^o. Δηλαδή υπάρχει u_f συνεχής στο K και αρμονική στο K^o ώστε $u_f = f$ στο ∂K.*

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι πραγματική. Από το Λήμμα 3.4 συνεπάγεται ότι υπάρχει ακολουθία (p_n) πολυωνύμων ώστε $\Re p_n \to f$ ομοιόμορφα στο ∂K. Οι συναρτήσεις $\Re p_n$ είναι συνεχείς στο K και αρμονικές στο K^o και, όπως είδαμε στην απόδειξη του Λήμματος 3.4, από την Αρχή Μεγίστου συνεπάγεται ότι υπάρχει $u_f \in \mathbf{C_R}(K)$ ώστε $\Re p_n \to u_f$ ομοιόμορφα στο K. Επομένως η u_f είναι αρμονική στο K^0 και, θεωρώντας τους περιορισμούς στο ∂K, έχουμε ότι $u_f = f$ στο ∂K.

Το Θεώρημα 3.2, περιορισμένο σε πραγματικές συναρτήσεις, μας λέει ότι ο υπόχωρος X_0 του $\mathbf{C_R}(\partial K)$ που εμφανίστηκε στην απόδειξη του Λήμματος 3.4 ταυτίζεται με τον $\mathbf{C_R}(\partial K)$:

$$X_0 = \mathbf{C_R}(\partial K).$$

Επομένως, και τα Λ_0, Λ (στην ίδια απόδειξη) ταυτίζονται. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι στην απόδειξη του Λήμματος 3.4 έχει αποδειχθεί για κάθε $a \in K^o$ η ύπαρξη μοναδικού μέτρου Borel λ_a στο ∂K με τις ιδιότητες:
(i) το λ_a είναι μη αρνητικό,
(ii) $|\lambda_a|(\partial K) = 1$ και
(iii) αν για κάθε $f \in \mathbf{C}(\partial K)$ η u_f είναι συνεχής στο K και αρμονική στο K^o με $u_f = f$ στο ∂K, τότε

$$u_f(a) = \int_{\partial K} f(\zeta)\, d\lambda_a(\zeta).$$

Το λ_a ονομάζεται *αρμονικό μέτρο* ως προς το a και το K.

Λήμμα 3.5 *Έστω συμπαγές $K \subseteq \mathbf{C}$ με συνεκτικό $\Omega = K^c$ και μέτρο Borel μ στο ∂K. Τότε το ολοκλήρωμα*

$$F(z) = \int_{\partial K} \frac{1}{z-\zeta}\, d\mu(\zeta)$$

είναι πεπερασμένο για κάθε $z \in \Omega$ και για σχεδόν κάθε $z \in \mathbf{C}$ ως προς το μέτρο Lebesgue. Η F είναι ολόμορφη στο Ω και, αν $F = 0$ στο Ω, τότε $F(z) = 0$ για κάθε $z \in \partial\Omega = \partial K$ στο οποίο το ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Απόδειξη: Η απόδειξη του ότι το $F(z)$ συγκλίνει για κάθε $z \in \Omega$ και για σχεδόν κάθε $z \in \mathbf{C}$ ως προς το μέτρο Lebesgue είναι παρόμοια (και λίγο απλούστερη) με την απόδειξη των αντίστοιχων αποτελεσμάτων για το $u(z)$ στο Λήμμα 3.1. Το ότι η F είναι ολόμορφη στο Ω προκύπτει από το ότι

$$(\overline{\partial} F)(z) = \int_{\partial K} \overline{\partial}\Big(\frac{1}{z-\zeta}\Big)\, d\mu(\zeta) = \int_{\partial K} 0\, d\mu(\zeta) = 0 \qquad (z \in \Omega).$$

Έστω τώρα ότι $F = 0$ στο Ω. Θεωρούμε αρκετά μεγάλο $R > 0$ ώστε $K \subseteq D(0;R)$. Τότε, λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης της σειράς που εμφανίζεται παρακάτω, έχουμε

$$0 = F(z) \quad = \quad \frac{1}{z} \int_{\partial K} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{z^n}\, d\mu(\zeta)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\partial K} \zeta^n \, d\mu(\zeta) \cdot \frac{1}{z^{n+1}}$$

για κάθε z με $|z| > R$. Συνεπάγεται

$$\int_{\partial K} \zeta^n \, d\mu(\zeta) = 0 \qquad (n \in \mathbf{N}_0).$$

Γνωρίζοντας ότι το ανάπτυγμα Taylor μιας ακέραιας συνάρτησης συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση σε οποιοδήποτε συμπαγές σύνολο, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\partial K} h(\zeta) \, d\mu(\zeta) = 0$$

για κάθε ακέραια συνάρτηση h.

Τώρα έστω $z_0 \in \partial\Omega = \partial K$ τέτοιο ώστε το $F(z_0)$ να συγκλίνει, δηλαδή

$$\int_{\partial K} \frac{1}{|z_0 - \zeta|} \, d|\mu|(\zeta) < +\infty.$$

Από το Λήμμα 3.4 συνεπάγεται ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) έτσι ώστε
(i) $p_n(z_0) = 0$,
(ii) $Re(p_n(\zeta)) - n|\zeta - z_0| \geq -1$ για κάθε $\zeta \in \partial K$.

Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση

$$h_n(z) = \frac{e^{-p_n(z)} - e^{-p_n(z_0)}}{z - z_0} = \frac{e^{-p_n(z)} - 1}{z - z_0}$$

η οποία είναι ακέραια και ικανοποιεί την

$$|h_n(\zeta)| \leq \frac{e+1}{|\zeta - z_0|} \qquad (\zeta \in \partial K).$$

Για κάθε $\zeta \in \partial K \setminus \{z_0\}$ ισχύει

$$\lim_{n \to +\infty} h_n(\zeta) = -\frac{1}{\zeta - z_0}$$

και, επειδή $\int_{\partial K} \frac{1}{|\zeta - z_0|} \, d|\mu|(\zeta) < +\infty$ (οπότε $\mu(\{z_0\}) = 0$), από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue προκύπτει ότι

$$F(z_0) = \int_{\partial K} \frac{1}{z_0 - \zeta} \, d\mu(\zeta) = \lim_{n \to +\infty} \int_{\partial K} h_n(\zeta) \, d\mu(\zeta) = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0.$$

Λήμμα 3.6 *Όπως στο Λήμμα 3.5, έστω συμπαγές $K \subseteq \mathbf{C}$ με συνεκτικό $\Omega = K^c$, μέτρο Borel μ στο ∂K και το ολοκλήρωμα*

$$F(z) = \int_{\partial K} \frac{1}{z - \zeta} \, d\mu(\zeta).$$

Αν $F = 0$ σχεδόν παντού στο $\mathbf{C}$ ως προς το μέτρο Lebesgue, τότε το μ είναι το μηδενικό μέτρο.

Απόδειξη: Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.14, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $g \in \mathbf{C}_c^1(\mathbf{C})$ ισχύει

$$\int_{\partial K} g(\zeta)\, d\mu(\zeta) = 0.$$

Βάσει του Λήμματος 2.6,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} g(\zeta)\, d\mu(\zeta) &= -\frac{1}{\pi}\int_{\partial K}\int\int_{\mathbf{C}} \frac{(\overline{\partial} g)(z)}{z-\zeta}\, dx\, dy\, d\mu(\zeta) \\
&= -\frac{1}{\pi}\int\int_{\mathbf{C}} (\overline{\partial} g)(z) \int_{\partial K} \frac{1}{z-\zeta}\, d\mu(\zeta)\, dx\, dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος του Mergelyan όταν $K^o = \emptyset$.

Θεωρούμε συμπαγές K με συνεκτικό $\Omega = K^c$ και $K^o = \emptyset$, οπότε $K = \partial K$. Για να αποδείξουμε ότι κάθε μιγαδική συνάρτηση συνεχής στο $K = \partial K$ προσεγγίζεται ομοιόμορφα στο $K = \partial K$ από πολυώνυμα, αρκεί, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.4 και το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz, να θεωρήσουμε οποιοδήποτε μέτρο Borel μ στο ∂K τέτοιο ώστε

$$\int_{\partial K} \zeta^n\, d\mu(\zeta) = 0 \qquad (n \in \mathbf{N}_0)$$

και να αποδείξουμε ότι το μ είναι το μηδενικό μέτρο.

Όπως στο Λήμμα 3.5, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$F(z) = \int_{\partial K} \frac{1}{z-\zeta}\, d\mu(\zeta).$$

Έστω αρκετά μεγάλο $R > 0$ τέτοιο ώστε $K \subseteq D(0;R)$. Για κάθε $z \in \Omega$ με $|z| \geq R$, λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης στο K της σειράς που εμφανίζεται παρακάτω, έχουμε:

$$\begin{aligned}
F(z) &= \frac{1}{z}\int_{\partial K} \frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}}\, d\mu(\zeta) \\
&= \frac{1}{z}\int_{\partial K} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{z^n}\, d\mu(\zeta) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\partial K} \zeta^n\, d\mu(\zeta) \cdot \frac{1}{z^{n+1}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Επειδή το Ω είναι συνεκτικό, από την Αρχή της Μοναδικότητας συνεπάγεται

$$F(z) = 0 \qquad (z \in \Omega)$$

και από το Λήμμα 3.5 έχουμε $F = 0$ σχεδόν παντού στο $\partial\Omega = \partial K$ ως προς το μέτρο Lebesgue. Τότε είναι $F = 0$ σχεδόν παντού στο $\Omega \cup \partial K = \Omega \cup K = \mathbf{C}$

ως προς το μέτρο Lebesgue και από το Λήμμα 3.6 συνεπάγεται ότι το μ είναι το μηδενικό μέτρο.

Θα συνεχίσουμε με την προετοιμασία για την απόδειξη του Θεωρήματος του Mergelyan στην εναπομένουσα περίπτωση που $K^o \neq \emptyset$.

Τα επόμενα δυο Λήμματα αποδεικνύουν μερικές βασικές ιδιότητες των αρμονικών μέτρων λ_a.

Λήμμα 3.7 *Έστω συμπαγές $K \subseteq \mathbf{C}$ με συνεκτικό K^c, $\mathcal{C}$ οποιαδήποτε ανοικτή συνεκτική συνιστώσα του K^o και $a \in \mathcal{C}$. Τότε supp $(\lambda_a) \subseteq \partial\mathcal{C}$.*

Απόδειξη: Έστω οποιοδήποτε κλειστό $F \subseteq \partial K \setminus \partial\mathcal{C}$. Σύμφωνα με το Λήμμα του Urysohn υπάρχει $\phi \in \mathbf{C_R}(\partial K)$ με $\phi = 0$ στο $\partial\mathcal{C}$, $\phi = 1$ στο F και $0 \leq \phi \leq 1$ στο ∂K. Θεωρούμε την επέκταση u_ϕ της ϕ στο K η οποία είναι συνεχής στο K και αρμονική στο K^o. Από την Αρχή Μεγίστου συνεπάγεται ότι $u_\phi = 0$ στο $\mathcal{C}$ και, επομένως,

$$\lambda_a(F) \leq \int_{\partial K} \phi(\zeta)\, d\lambda_a(\zeta) = u_\phi(a) = 0.$$

Επειδή το λ_a είναι κανονικό, έχουμε ότι

$$\lambda_a(\partial K \setminus \partial\mathcal{C}) = 0.$$

Λήμμα 3.8 *Έστω συμπαγές $K \subseteq \mathbf{C}$ με συνεκτικό $\Omega = K^c$, $\mathcal{C}$ οποιαδήποτε ανοικτή συνεκτική συνιστώσα του K^o και $a, b \in \mathcal{C}$. Τα μέτρα λ_a και λ_b είναι απολύτως συνεχή το ένα ως πρός το άλλο. Άρα κάθε μέτρο Borel μ στο ∂K έχει διάσπαση*

$$\mu = \tau_{\mathcal{C}} + \sigma_{\mathcal{C}}$$

σε απολύτως συνεχές και ιδιάζον μέτρο σχετικά με οποιοδήποτε αρμονικό μέτρο λ_a $(a \in \mathcal{C})$. Δηλαδή

$$\tau_{\mathcal{C}} << \lambda_a\,, \quad \sigma_{\mathcal{C}} \perp \lambda_a \qquad (a \in \mathcal{C}).$$

Απόδειξη: Σύμφωνα με την Αρχή του Harnack, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε u θετική και αρμονική στο K^o να ισχύει

$$\frac{1}{M} \leq \frac{u(b)}{u(a)} \leq M.$$

Έστω τώρα $\phi \in \mathbf{C_R}(\partial\Omega)$ με $\phi \geq 0$ στο ∂K. Τότε για τη συνάρτηση

$$u_\phi(z) = \int_{\partial K} \phi(\zeta)\, d\lambda_z(\zeta) \qquad (z \in K^o)$$

έχουμε

$$\frac{1}{M}\int_{\partial K} \phi(\zeta)\, d\lambda_a(\zeta) \leq \int_{\partial K} \phi(\zeta)\, d\lambda_b(\zeta) \leq M \int_{\partial K} \phi(\zeta)\, d\lambda_a(\zeta).$$

Θεωρούμε συμπαγές $B \subseteq \partial K$ με $\lambda_a(B) = 0$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $U \subseteq \partial K$ ανοικτό στο ∂K ώστε $\lambda_a(U) < \epsilon$ και $B \subseteq U$. Από το Λήμμα του Urysohn συνεπάγεται ότι υπάρχει $\phi \in \mathbf{C_R}(\partial K)$ με $0 \leq \phi \leq 1$ στο ∂K, $\phi = 1$ στο B και $\phi = 0$ στο $\partial K \setminus U$. Τότε

$$0 \leq \lambda_b(B) \leq \int_{\partial K} \phi(\zeta)\, d\lambda_b(\zeta) \leq M \int_{\partial K} \phi(\zeta)\, d\lambda_a(\zeta) \leq M\lambda_a(U) < M\epsilon.$$

Άρα $\lambda_b(B) = 0$ και, επειδή τα λ_a, λ_b είναι κανονικά μέτρα συνεπάγεται ότι $\lambda_b << \lambda_a$. Συμμετρικά, ισχύει και $\lambda_a << \lambda_b$.

Αν τώρα είναι $\mu = \tau_\mathcal{C} + \sigma_\mathcal{C}$ με $\tau_\mathcal{C} << \lambda_a$ και $\sigma_\mathcal{C} \perp \lambda_a$, τότε είναι και

$$\tau_\mathcal{C} << \lambda_a << \lambda_b\,, \quad \sigma_\mathcal{C} \perp \lambda_a << \lambda_b\,.$$

Λήμμα 3.9 *Έστω συμπαγές $K \subseteq \mathbf{C}$ με συνεκτικό $\Omega = K^c$ και $\mathcal{C}$ οποιαδήποτε ανοικτή συνεκτική συνιστώσα του K^o. Θεωρούμε μέτρο Borel μ στο ∂K ώστε*

$$\int_{\partial K} \zeta^m\, d\mu(\zeta) = 0 \qquad (m \in \mathbf{N}_0)$$

και έστω $\mu = \tau_\mathcal{C} + \sigma_\mathcal{C}$, όπου $\tau_\mathcal{C} << \lambda_a$ και $\sigma_\mathcal{C} \perp \lambda_a$ για κάποιο (και, επομένως, για κάθε) $a \in \mathcal{C}$. Τότε

$$\int_{\partial K} \zeta^m\, d\tau_\mathcal{C}(\zeta) = 0, \quad \int_{\partial K} \zeta^m\, d\sigma_\mathcal{C}(\zeta) = 0 \qquad (m \in \mathbf{N}_0)$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\int_{\partial K} \frac{1}{z-\zeta}\, d\tau_\mathcal{C}(\zeta) = 0 \qquad (z \notin \overline{\mathcal{C}}).$$

Επίσης ισχύει

$$\int_{\partial K} \frac{1}{a-\zeta}\, d\mu(\zeta) = \int_{\partial K} \frac{1}{a-\zeta}\, d\tau_\mathcal{C}(\zeta) \qquad (a \in \mathcal{C})$$

και

$$\int_{\partial K} \frac{1}{a-\zeta}\, d\sigma_\mathcal{C}(\zeta) = 0 \qquad (a \in \mathcal{C}).$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι αν ένα πολυώνυμο p έχει ρίζα το a, τότε

$$\int_{\partial K} (\Re(p(\zeta)))^2\, d\lambda_a(\zeta) = \int_{\partial(\Omega)} (\Im(p(\zeta)))^2\, d\lambda_a(\zeta).$$

Θεωρούμε κλειστά υποσύνολα S_n του $S = \text{supp}\,(\sigma_\mathcal{C})$ ώστε $|\sigma_\mathcal{C}|(S \setminus S_n) < \frac{1}{2^n}$.

Επίσης θεωρούμε κλειστά υποσύνολα T_n του $T = \text{supp}\,(\lambda_a) \supseteq \text{supp}\,(\tau_\mathcal{C})$ ώστε $\lambda_a(T \setminus T_n) < \frac{3}{16^{n+1}}$.

Για κάθε n υπάρχει $\phi \in \mathbf{C_R}(\partial(\Omega))$ με $\phi = 2^n$ στο S_n, $0 \leq \phi \leq 2^n$ στο $\partial(\Omega)$ και $\phi = 0$ στο T_n. Απο το Λήμμα 3.4 συνεπάγεται ότι υπάρχει πολυώνυμο p_n

τέτοιο ώστε $\Re p_n \geq 2^{n-1}$ στο S_n , $-\frac{1}{2^{n+1}} \leq \Re p_n \leq 2^{n+1}$ στο ∂K και $\Re p_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ στο T_n . Τότε

$$\int_{\partial K} (\Re(p_n(\zeta)))^2 \, d\lambda_a(\zeta) \leq \frac{1}{4^{n+1}} \lambda_a(T_n) + 4^{n+1} \lambda_a(T \setminus T_n) \leq \frac{1}{4^{n+1}} + \frac{4^{n+1}3}{16^{n+1}} = \frac{1}{4^n} \, .$$

Άρα

$$|\Re(p_n(a))| = \Big| \int_{\partial K} \Re(p_n(\zeta)) \, d\lambda_a(\zeta) \Big| \leq \Big(\int_{\partial K} (\Re(p_n(\zeta)))^2 \, d\lambda_a(\zeta) \Big)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2^n} \, .$$

Αντικαθιστούμε το p_n με το $p_n - p_n(a)$ και παίρνουμε $\Re p_n \geq 2^{n-1} - \frac{1}{2^n}$ στο S_n , $\Re p_n \geq -\frac{3}{2^{n+1}}$ στο ∂K και

$$\int_{\partial K} (\Re(p_n(\zeta)))^2 \, d\lambda_a(\zeta) \leq \frac{1}{4^{n-1}} \, .$$

Συνεπάγεται

$$\int_{\partial K} (\Im(p_n(\zeta)))^2 \, d\lambda_a(\zeta) \leq \frac{1}{4^{n-1}}$$

και, επομένως,

$$\int_{\partial K} |p_n(\zeta)|^2 \, d\lambda_a(\zeta) \leq \frac{2}{4^{n-1}} \, .$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\partial K} |p_n(\zeta)|^2 \, d\lambda_a(\zeta) < +\infty,$$

οπότε $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$ σχεδόν παντού στο ∂K ως προς το λ_a και, επομένως, και ως προς το $\tau_{\mathcal{C}}$.

Αν θεωρήσουμε R αρκετά μεγάλο ώστε να είναι $\partial K \subseteq D(0; R)$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\partial K} \zeta^m e^{-p_n(\zeta)} \, d\sigma_{\mathcal{C}}(\zeta) \Big| &\leq \Big| \int_{S_n} \zeta^m e^{-p_n(\zeta)} \, d\sigma_{\mathcal{C}}(\zeta) \Big| \\ &\quad + \Big| \int_{S \setminus S_n} \zeta^m e^{-p_n(\zeta)} \, d\sigma_{\mathcal{C}}(\zeta) \Big| \\ &\leq R^m |\sigma_{\mathcal{C}}|(S) e^{-2^{n-1} + \frac{1}{2^n}} + R^m \frac{1}{2^n} e^{\frac{3}{2^{n+1}}} \end{aligned}$$

και, επομένως,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\partial K} \zeta^m e^{-p_n(\zeta)} \, d\sigma_{\mathcal{C}}(\zeta) = 0.$$

Από το ότι $\int_{\partial K} \zeta^m \, d\mu(\zeta) = 0$ $(m \in \mathbf{N}_0)$ συνεπάγεται ότι $\int_{\partial K} h(\zeta) \, d\mu(\zeta) = 0$ για κάθε ακέραια συνάρτηση h. Άρα από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue συνεπάγεται

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} \zeta^m \, d\tau_{\mathcal{C}}(\zeta) &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\partial K} \zeta^m e^{-p_n(\zeta)} \, d\tau_{\mathcal{C}}(\zeta) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{\partial K} \zeta^m e^{-p_n(\zeta)} \, d\mu(\zeta) - \lim_{n\to+\infty} \int_{\partial K} \zeta^m e^{-p_n(\zeta)} \, d\sigma_{\mathcal{C}}(\zeta) \\
&= \lim_{n\to+\infty} 0 - 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

για κάθε $m \in \mathbf{N}_0$ και, φυσικά,

$$\int_{\partial K} \zeta^m \, d\sigma_{\mathcal{C}}(\zeta) = \int_{\partial K} \zeta^m \, d\mu(\zeta) - \int_{\partial K} \zeta^m \, d\tau_{\mathcal{C}}(\zeta) = 0 - 0 = 0.$$

Όπως έχουμε δει αρκετές φορές μέχρι τώρα, από την $\int_{\partial K} \zeta^m \, d\tau_{\mathcal{C}}(\zeta) = 0$ ($m \in \mathbf{N}_0$) αποδεικνύεται ότι $\int_{\partial K} \frac{1}{z-\zeta} \, d\tau_{\mathcal{C}}(\zeta) = 0$ για κάθε z στο Ω με αρκετά μεγάλη απόλυτη τιμή $|z|$. Από το Λήμμα 3.7 συνεπάγεται ότι $\mathrm{supp}\,(\tau_{\mathcal{C}}) \subseteq \mathrm{supp}\,(\lambda_a) \subseteq \partial\mathcal{C}$, οπότε $\int_{\partial\mathcal{C}} \frac{1}{z-\zeta} \, d\tau_{\mathcal{C}}(\zeta) = 0$ για $z \in \Omega$ με αρκετά μεγάλη απόλυτη τιμή $|z|$. Τώρα επειδή το $\left(\overline{\mathcal{C}}\right)^c$ είναι συνεκτικό, συνεπάγεται $\int_{\partial\mathcal{C}} \frac{1}{z-\zeta} \, d\tau_{\mathcal{C}}(\zeta) = 0$ για κάθε $z \notin \overline{\mathcal{C}}$ και, επομένως,

$$\int_{\partial K} \frac{1}{z-\zeta} \, d\tau_{\mathcal{C}}(\zeta) = 0 \qquad (z \notin \overline{\mathcal{C}}).$$

Τώρα, ακριβώς όπως και με τα $\int_{\partial K} \zeta^m e^{-p_n(\zeta)} \, d\sigma_{\mathcal{C}}(\zeta)$, αποδεικνύουμε ότι για κάθε $a \in \mathcal{C}$ ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\partial K} \frac{e^{-p_n(\zeta)}}{a-\zeta} \, d\sigma_{\mathcal{C}}(\zeta) = 0$$

και

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\partial K} \frac{e^{-p_n(\zeta)}}{a-\zeta} \, d\tau_{\mathcal{C}}(\zeta) = \int_{\partial K} \frac{1}{a-\zeta} \, d\tau_{\mathcal{C}}(\zeta).$$

Άρα για κάθε $a \in \mathcal{C}$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} \frac{1}{a-\zeta} \, d\tau_{\mathcal{C}}(\zeta) &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\partial K} \frac{e^{-p_n(\zeta)}}{a-\zeta} \, d\mu(\zeta) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{\partial K} \frac{e^{-p_n(\zeta)} - 1}{a-\zeta} \, d\mu(\zeta) + \int_{\partial K} \frac{1}{a-\zeta} \, d\mu(\zeta) \\
&= \int_{\partial K} \frac{1}{a-\zeta} \, d\mu(\zeta)
\end{aligned}$$

διότι η $\frac{e^{-p_n(\zeta)}-1}{a-\zeta}$ είναι ακέραια συνάρτηση του ζ. Τέλος, είναι

$$\int_{\partial K} \frac{1}{a-\zeta} \, d\sigma_{\mathcal{C}}(\zeta) = \int_{\partial K} \frac{1}{a-\zeta} \, d\mu(\zeta) - \int_{\partial K} \frac{1}{a-\zeta} \, d\tau_{\mathcal{C}}(\zeta) = 0$$

για κάθε $a \in \mathcal{C}$.

Λήμμα 3.10 *Έστω συμπαγές $K \subseteq \mathbf{C}$ με συνεκτικό $\Omega = K^c$ και $\mathcal{C}$ οποιαδήποτε ανοικτή συνεκτική συνιστώσα του K^o. Θεωρούμε μέτρο Borel μ στο ∂K ώστε*

$$\int_{\partial K} \zeta^m \, d\mu(\zeta) = 0 \qquad (m \in \mathbf{N}_0)$$

και έστω $\mu = \tau_{\mathcal{C}} + \sigma_{\mathcal{C}}$, όπου $\tau_{\mathcal{C}} << \lambda_a$ και $\sigma_{\mathcal{C}} \perp \lambda_a$ για κάποιο (και, επομένως, για κάθε) $a \in \mathcal{C}$. Αν η f είναι συνεχής στο K και ολόμορφη στο K^o τότε

$$\int_{\partial K} f(\zeta) \, d\tau_{\mathcal{C}}(\zeta) = 0.$$

Απόδειξη: Έστω $A = 2\max_{z \in K} |f(z)|$. Τότε $f(z) + A \in \overline{D(A; \frac{A}{2})}$ για κάθε z στο K, οπότε συνθέτοντας την $f + A$ με έναν οποιονδήποτε κλάδο του λογαρίθμου στον δίσκο $\overline{D(A; \frac{A}{2})}$, κατασκευάζουμε συνάρτηση g συνεχή στο K, ολόμορφη στο K^o τέτοια ώστε να είναι

$$e^g = f + A$$

στο K. Από το Λήμμα 3.4 συνεπάγεται ότι υπάρχουν πολυώνυμα p_n ($n \in \mathbf{N}$) τέτοια ώστε

$$|\Re(p_n(\zeta)) - \Re(g(\zeta))| \leq \frac{1}{2^n} \qquad (\zeta \in \partial K).$$

Είναι φανερό ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\Im(p_n(a)) = \Im(g(a))$, οπότε συνεπάγεται

$$|p_n(a) - g(a)| = |\Re(p_n(a)) - \Re(g(a))| = \Big| \int_{\partial K} \big(\Re(p_n(\zeta)) - \Re(g(\zeta))\big) \, d\lambda_a(\zeta) \Big| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Αντικαθιστώντας το p_n με το $p_n - p_n(a) + g(a)$, έχουμε ότι $p_n(a) = g(a)$ και

$$|\Re(p_n(\zeta)) - \Re(g(\zeta))| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (\zeta \in \partial K).$$

Από το $p_n(a) - g(a) = 0$ συνεπάγεται

$$\int_{\partial K} (\Im(p_n(\zeta)) - \Im(g(\zeta)))^2 \, d\lambda_a(\zeta) = \int_{\partial K} (\Re(p_n(\zeta)) - \Re(g(\zeta)))^2 \, d\lambda_a(\zeta) \leq \frac{1}{4^{n-1}}\,,$$

οπότε

$$\int_{\partial K} |p_n(\zeta)) - g(\zeta)|^2 \, d\lambda_a(\zeta) \leq \frac{2}{4^{n-1}}\,.$$

Συνεπάγεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\partial K} |p_n(\zeta)) - g(\zeta)|^2 \, d\lambda_a(\zeta) < +\infty$$

και άρα $\lim_{n \to +\infty} p_n = g$ σχεδόν παντού στο ∂K ως προς το λ_a και, επομένως, και ως προς το $\tau_{\mathcal{C}}$. Από το Λήμμα 3.9 έχουμε ότι $\int_{\partial K} \zeta^m \, d\tau_{\mathcal{C}}(\zeta) = 0$ ($m \in \mathbf{N}_0$), οπότε $\int_{\partial K} e^{p_n(\zeta)}\, d\tau_{\mathcal{C}}(\zeta) = 0$. Τώρα από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue προκύπτει ότι

$$\int_{\partial K} f(\zeta)\, d\tau_{\mathcal{C}}(\zeta) = \int_{\partial K} (f(\zeta) + A)\, d\tau_{\mathcal{C}}(\zeta) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\partial K} e^{p_n(\zeta)}\, d\tau_{\mathcal{C}}(\zeta) = 0.$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος του Mergelyan όταν $K^o \neq \emptyset$.

Έστω συμπαγές $K \subseteq \mathbf{C}$ με συνεκτικό $\Omega = K^c$ και f συνεχής στο K και ολόμορφη στο K^o. Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο K αρκεί, βάσει της Αρχής Μεγίστου, να αποδείξουμε ότι υπάρχει τέτοια ακολουθία πολυωνύμων ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο ∂K. Συνδυάζοντας, λοιπόν, το Θεώρημα 1.3 με το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz, αρκεί να θεωρήσουμε οποιοδήποτε μέτρο Borel μ στο ∂K τέτοιο ώστε

$$\int_{\partial K} \zeta^m\, d\mu(\zeta) = 0 \qquad (m \in \mathbf{N}_0)$$

και να αποδείξουμε ότι

$$\int_{\partial K} f(\zeta)\, d\mu(\zeta) = 0.$$

Έστω $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots$ οι συνεκτικές συνιστώσες του K^o. Γράφουμε

$$\mu = \tau_{\mathcal{C}_1} + \sigma_{\mathcal{C}_1}$$

και από τα Λήμματα 3.9 και 3.10 συνεπάγεται ότι

$$\int_{\partial K} f(\zeta)\, d\tau_{\mathcal{C}_1}(\zeta) = 0, \quad \int_{\partial K} \frac{1}{z-\zeta}\, d\tau_{\mathcal{C}_1}(\zeta) = 0 \qquad (z \notin \overline{\mathcal{C}_1}).$$

Παρατηρούμε ότι τα $\tau_{\mathcal{C}_1}$, $\sigma_{\mathcal{C}_1}$ έχουν ξένους φορείς. Από το Λήμμα 3.9 έχουμε ότι

$$\int_{\partial K} \frac{1}{z-\zeta}\, d\sigma_{\mathcal{C}_1}(\zeta) = 0 \qquad (z \in \mathcal{C}_1 \cup \Omega)$$

και

$$\int_{\partial K} \zeta^m\, d\sigma_{\mathcal{C}_1}(\zeta) = 0 \qquad (m \in \mathbf{N}_0).$$

Στην συνέχεια γράφουμε $\sigma_{\mathcal{C}_1} = \tau_{\mathcal{C}_2} + \sigma_{\mathcal{C}_2}$ και όπως πριν έχουμε ότι

$$\int_{\partial K} f(\zeta)\, d\tau_{\mathcal{C}_2}(\zeta) = 0, \quad \int_{\partial K} \frac{1}{z-\zeta}\, d\tau_{\mathcal{C}_2}(\zeta) = 0 \qquad (z \notin \overline{\mathcal{C}_2})$$

και

$$\int_{\partial K} \frac{1}{z-\zeta}\, d\sigma_{\mathcal{C}_2}(\zeta) = 0 \qquad (z \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \Omega).$$

Παρατηρούμε και πάλι ότι τα $\tau_{\mathcal{C}_1}$, $\tau_{\mathcal{C}_2}$, $\sigma_{\mathcal{C}_2}$ έχουν ανά δυο ξένους φορείς. Συνεχίζοντας επαγωγικά, για κάθε n έχουμε τη διάσπαση

$$\mu = \tau_{\mathcal{C}_1} + \cdots + \tau_{\mathcal{C}_n} + \sigma_{\mathcal{C}_n}$$

σε μέτρα με ξένους ανά δυο φορείς $\subseteq \partial K$ και με

$$\int_{\partial K} f(\zeta)\, d\tau_{\mathcal{C}_k}(\zeta) = 0 \qquad (1 \le k \le n)$$

$$\int_{\partial K} \frac{1}{z-\zeta}\, d\tau_{\mathcal{C}_k}(\zeta) = 0 \qquad (z \notin \overline{\mathcal{C}_k}\,, 1 \le k \le n)$$

και

$$\int_{\partial K} \frac{1}{z-\zeta}\, d\sigma_{\mathcal{C}_k}(\zeta) = 0 \qquad (z \in \mathcal{C}_1 \cup \cdots \mathcal{C}_k \cup \Omega, 1 \le k \le n).$$

Οι φορείς των $\tau_{\mathcal{C}_n}$ $(n \in \mathbf{N})$ είναι ανά δυο ξένοι, οπότε $\sum_{n=1}^{+\infty} |\tau_{\mathcal{C}_n}| \le |\mu|$ και, επομένως, έχουμε διάσπαση

$$\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_{\mathcal{C}_n} + \sigma,$$

όπου σ είναι κάποιο μέτρο Borel στο ∂K.

Από τα προηγούμενα, για κάθε n και κάθε $z \in \mathcal{C}_1 \cup \cdots \mathcal{C}_n \cup \Omega$ έχουμε

$$\int_{\partial K} \frac{1}{z-\zeta}\, d\sigma(\zeta) = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{\partial K} \frac{1}{z-\zeta}\, d\tau_{\mathcal{C}_k}(\zeta) + \int_{\partial K} \frac{1}{z-\zeta}\, d\sigma_{\mathcal{C}_n}(\zeta) = 0$$

και, επομένως,

$$\int_{\partial K} \frac{1}{z-\zeta}\, d\sigma(\zeta) = 0 \qquad (z \in K \cup \Omega).$$

Από τα Λήμματα 3.5 και 3.6 συνεπάγεται ότι το σ είναι το μηδενικό μέτρο, οπότε

$$\int_{\partial K} f(\zeta)\, d\mu(\zeta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\partial K} f(\zeta)\, d\tau_{\mathcal{C}_n}(\zeta) = 0.$$