Διπλωματική εργασία

Το Θεώρημα του Carleson

για ακολουθίες παρεμβολής στον H^∞

Δ.Μαυρίδη

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Άνοιξη 2006

Στα αδέρφια μου, Θοδωρή, Άρτεμις, Δανάη.

Την επιτροπή κρίσης της εργασίας αυτής απετέλεσαν οι

Μ. Παπαδημητράκης, επιβλέπων,
Μ. Κολουντζάκης,
Θ. Μήτσης,

τους οποίους ευχαριστώ.

Πρόλογος.

Η εργασία αυτή ασχολείται με το πρόβλημα του **χαρακτηρισμού των ακολουθιών παρεμβολής για τον χώρο H^∞**. Το πρόβλημα αυτό είναι ένα από τα πιο γνωστά της σύγχρονης μιγαδικής - αρμονικής ανάλυσης και λύθηκε από τον Lennart Carleson στην εργασία του *An interpolation problem for bounded analytic functions*, American Journal of Mathematics, 80 (1958) 921-930. Η λύση αυτού του προβλήματος μαζί με τη λύση του προβλήματος της corona και του προβλήματος της σύγκλισης των σειρών Fourier των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων έκαναν διάσημο τον Carleson, ο οποίος κατατάσσεται, πλέον, ανάμεσα στους μεγαλύτερους μαθηματικούς του εικοστού αιώνα.

Εδώ αναλύεται μία κατοπινότερη απόδειξη του προβλήματος από τον Peter Jones (έναν, επίσης, μεγάλο μαθηματικό) στην εργασία του, *L^∞ estimates for the $\overline{\partial}$ problem in a half - plane*, Acta Mathematica, 150 (1983) 137-152 όπως αυτή εκτίθεται στο βιβλίο του M. Andersson, *Topics in Complex Analysis*, Universitext, Springer, 1996.

Απαραίτητα εργαλεία για την κατανόηση της απόδειξης είναι, πέραν της ύλης των τυπικών προπτυχιακών μαθημάτων Συναρτησιακής και Μιγαδικής Ανάλυσης, το θεώρημα της ανοικτής απεικόνισης, ο χώρος H^∞ των φραγμένων αναλυτικών συναρτήσεων στον μοναδιαίο δίσκο του μιγαδικού επιπέδου και ο ρόλος των γινομένων Blaschke στον χώρο H^∞.

Η κυρία Μαυρίδη απέκτησε τις επιπλέον απαραίτητες γνώσεις (σημειωτέον ότι δεν είχε πάρει καν το προπτυχιακό μάθημα της Συναρτησιακής Ανάλυσης) και παρουσιάζει εδώ, στα πλαίσια της προπτυχιακής της Διπλωματικής Εργασίας, τα επιπλέον αυτά εργαλεία και, με κάθε λεπτομέρεια, την πλήρη απόδειξη του θεωρήματος του Carleson.

Πιστεύω ότι τώρα η λύση του φημισμένου αυτού προβλήματος μπορεί να διαβαστεί άνετα από έναν καλό προπτυχιακό φοιτητή.

Μ. Παπαδημητράκης, επιβλέπων καθηγητής

Πανεπιστήμιο Κρήτης.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά

Πρόταση 1.1 *Έστω καμπύλη* $\gamma\,:[a,b]\to\mathbf{C}$ *συνεχώς παραγωγίσιμη,* Φ *συνεχής στο* $\gamma^*=\{\gamma(t):\,a\ \le t\le\ b\}$,

$$F(z)=\int_\gamma\frac{\Phi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad z\in\mathbf{C}\setminus\gamma^*.$$

Τότε η F *είναι αναλυτική στο* $\mathbf{C}\setminus\gamma^*$ *και*

$$F'(z)=\int_\gamma\frac{\Phi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta,\quad z\in\mathbf{C}\setminus\gamma^*.$$

Απόδειξη: Έστω $z\in\mathbf{C}\setminus\gamma^*$. Υπάρχει $r>0$, τέτοιο ώστε $D(z;r)\bigcap\gamma^*=\emptyset$. Παίρνουμε $w\in D(z;\frac{r}{2})$ και έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{F(w)-F(z)}{w-z}&=\frac{1}{w-z}\Big(\int_\gamma\frac{\Phi(\zeta)}{\zeta-w}d\zeta-\int_\gamma\frac{\Phi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\Big)\\&=\frac{1}{w-z}\int_\gamma\Phi(\zeta)\Big(\frac{1}{\zeta-w}-\frac{1}{\zeta-z}\Big)d\zeta\\&=\int_\gamma\Phi(\zeta)\frac{1}{(\zeta-w)(\zeta-z)}d\zeta.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\Big|\ \frac{F(w)-F(z)}{w-z}-\int_\gamma\frac{\Phi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\ \Big|=\Big|\ \int_\gamma\Phi(\zeta)\Big(\frac{1}{(\zeta-z)(\zeta-w)}-\frac{1}{(\zeta-z)^2}\Big)d\zeta\ \Big|$$

$$=\Big|\ \int_\gamma\Phi(\zeta)\frac{w-z}{(\zeta-w)(\zeta-z)^2}d\zeta\ \Big|\le|w-z|\int_\gamma\frac{|\Phi(\zeta)|}{|\zeta-w||\zeta-z|^2}|d\zeta|$$

$$\le|w-z|\frac{M}{r^3/2}\cdot\text{μήκος}(\gamma)=|w-z|\frac{2M}{r^3}\cdot\text{μήκος}(\gamma),$$

όπου $M = \max_{\zeta\in\gamma^*} |\Phi(\zeta)|$. Άρα,

$$\lim_{w\to z} \frac{F(w)-F(z)}{w-z} = \int_\gamma \frac{\Phi(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta.$$

Θεώρημα 1.1 *Έστω Ω ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbf{C}$, $f_n (n \in \mathbf{N})$ αναλυτικές στο Ω, f ορισμένη στο Ω και $f_n \to f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω. Τότε:*
(1) Η f είναι αναλυτική στο Ω,
(2) $f_n' \to f'$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές $\subseteq \Omega$.

Απόδειξη: (1) Έστω τυχαίο $z_0 \in \Omega$. Υπάρχει $r > 0$ ώστε $\overline{D(z_0, r)} \subseteq \Omega$. Γνωρίζουμε τον τύπο του *Cauchy* για αναλυτικές συναρτήσεις:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \qquad z \in D(z_0; r),$$

όπου $\gamma(t) = z_0 + re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$. Η f είναι συνεχής στο γ^* διότι κάθε f_n είναι συνεχής στο γ^* και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο γ^*. Για κάθε $z \in D(z_0; r)$

$$\Big| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \Big| = \Big| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \Big|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f_n(\zeta) - f(\zeta)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\sup_{\zeta\in\gamma^*} |f_n(\zeta) - f(\zeta)|}{r - |z|} 2\pi r.$$

Επειδή τα r, z είναι σταθερά και $\lim_{n\to+\infty} \sup_{\zeta\in\gamma^*} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| = 0$, έχουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Επίσης, $\lim_{n\to+\infty} f_n(z) = f(z)$. Άρα,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D(z_0; r).$$

Από την Πρόταση 1.1 η $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ είναι αναλυτική συνάρτηση του z στο $\mathbf{C} \setminus \gamma^*$. Άρα η f είναι αναλυτική στο $D(z_0; r)$ και, πάλι από την Πρόταση 1.1,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \qquad z \in D(z_0; r).$$

Επειδή το z_0 είναι τυχαίο, η f είναι αναλυτική στο Ω.
(2) Έστω τυχαίο $z_0 \in \Omega$ και $r > 0$ ώστε $\overline{D(z_0; r)} \subseteq \Omega$. Τότε έχουμε

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad z \in D(z_0; r).$$

Έστω $z \in D(z_0; r/2)$. Τότε

$$|f_n'(z) - f'(z)| = \frac{1}{2\pi} \Big| \int_\gamma \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \Big|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\sup_{\zeta \in \gamma^*} |f_n(\zeta) - f(\zeta)|}{r^2/4} 2\pi r = \frac{4}{r} \sup_{\zeta \in \gamma^*} |f_n(\zeta) - f(\zeta)|.$$

Επειδή το r είναι σταθερό και $\lim_{n\to+\infty} \sup_{\zeta\in\gamma^*} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| = 0$, συνεπάγεται ότι $f_n' \to f'$ ομοιόμορφα στο $D(z_0; r/2)$. Έχουμε αποδείξει ότι για κάθε $z \in \Omega$ υπάρχει ανοιχτός δίσκος $D(z)$ με κέντρο το z ώστε $f_n' \to f'$ ομοιόμορφα στον $D(z)$.

Έστω τυχαίο συμπαγές $K \subseteq \Omega$. Τότε $K \subseteq \bigcup_{z\in K} D(z)$, οπότε υπάρχουν $z_1, z_2, \ldots, z_n \in K$ ώστε $K \subseteq D(z_1) \bigcup \cdots \bigcup D(z_n)$. Επειδή οι δίσκοι είναι πεπερασμένου πλήθους, $f_n' \to f'$ ομοιόμορφα στο K.

Θεώρημα 1.2 *Έστω Ω ανοιχτό $\subseteq \mathbf{C}$, f_n ($n \in \mathbf{N}$) αναλυτικές στο Ω και για κάθε συμπαγές $K \subseteq \Omega$ και κάθε $k \in \mathbf{N}$ υπάρχει $M_{K,k}$ ώστε $|f_k(z)| \leq M_{K,k}$ για κάθε $z \in K$. Αν για κάθε K ισχύει*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} M_{K,k} < +\infty,$$

τότε η

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές $\subseteq \Omega$.

Απόδειξη: Έστω τυχαίο $z \in \Omega$. Το $\{z\}$ είναι συμπαγές, οπότε $|f_k(z)| \leq M_{\{z\},k}$. Επειδή $\sum_{k=1}^{+\infty} M_{\{z\},k} < +\infty$, η $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$ συγκλίνει απολύτως. Άρα, ορίζεται η συνάρτηση

$$s(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z), \quad z \in \Omega.$$

Θεωρούμε τα $s_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$. Παίρνουμε τυχαίο K συμπαγές $\subseteq \Omega$. Αν $z \in K$,

$$|s_n(z) - s(z)| = \Big| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(z) \Big| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_{K,k}.$$

Άρα,

$$\sup_{z\in K} |s_n(z) - s(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_{K,k} \to 0,$$

καθώς $n \to +\infty$. Άρα, $s_n \to s$ ομοιόμορφα στο K.

Παράδειγμα: Οι δυναμοσειρές $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$. Έστω

$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} > 0.$$

Θεωρούμε τον δίσκο $D(0;R)$ και παίρνουμε τυχαίο K συμπαγές $\subseteq D(0;R)$. Τότε υπάρχει $r < R$ ώστε $K \subseteq \overline{D(0;r)}$. Παίρνουμε r_1 ώστε $r < r_1 < R$, οπότε $\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R} < \frac{1}{r_1}$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε $\sqrt[k]{|a_k|} < \frac{1}{r_1}$ για κάθε $k \geq n_0$. Για κάθε $z \in K$ και $k \geq n_0$ έχουμε $|a_k z^k| \leq |a_k| r^k \leq \left(\frac{r}{r_1}\right)^k$.
Ονομάζουμε

$$M_{K,k} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^k, \quad k \geq n_0,$$

οπότε

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} M_{K,k} = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^k < +\infty,$$

διότι $0 \leq \frac{r}{r_1} < 1$. Άρα, η

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές $\subseteq D(0;R)$.

Κεφάλαιο 2

Απειρογινόμενα

Έστω ακολουθία $\{a_n\}$ στο $\mathbf{C}$.

Πρώτη περίπτωση: $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Συμβολίζουμε $p_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ και το ονομάζουμε n-οστό μερικό γινόμενο των $a_1, a_2, \dots$. Αν η $\{p_n\}$ έχει όριο $p \in \mathbf{C} \bigcup \{\infty\}$, γράφουμε

$$\prod_{k=1}^{+\infty} a_k = p.$$

Αν $p \neq 0$ και $p \neq \infty$, τότε λέμε ότι το απειρογινόμενο συγκλίνει στο p. Αν $p = 0$ ή $p = \infty$, τότε λέμε ότι το απειρογινόμενο αποκλίνει στο 0 ή στο ∞ αντίστοιχα. Αν η $\{p_n\}$ δεν έχει όριο στο $\mathbf{C} \bigcup \{\infty\}$, τότε λέμε ότι το απειρογινόμενο αποκλίνει.

Παραδείγματα:
(1) $\quad a_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbf{N}$.
$p_n = (1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})\cdots(1+\frac{1}{n}) = \frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n} = n+1$ και $p_n \to \infty$.
Άρα, $\prod_{k=1}^{+\infty}(1+\frac{1}{k}) = \infty$ (απόκλιση στο ∞).
(2) $\quad a_n = 1 - \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}$.
$p_n = (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$ και $p_n \to 0$.
Άρα, $\prod_{k=1}^{+\infty}(1-\frac{1}{k}) = 0$ (απόκλιση στο 0).
(3) $\quad a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}, \quad n \in \mathbf{N}$
$p_n = (1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})(1-\frac{1}{(n+1)^2}) = \frac{1\cdot 3}{2^2}\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{n+2}{n+1} \to \frac{1}{2}$. Άρα, $\prod_{k=1}^{+\infty}(1-\frac{1}{(k+1)^2}) = \frac{1}{2}$ (σύγκλιση στο $\frac{1}{2}$).

Δεύτερη περίπτωση: Υπάρχει $m \geq 2$ ώστε $a_n \neq 0$ για κάθε $n \geq m$ και υπάρχει τουλάχιστον ένα $n < m$ ώστε $a_n = 0$.

Αν το $\prod_{k=m}^{+\infty} a_k$ δεν έχει όριο στο $\mathbf{C} \bigcup \{\infty\}$ λέμε ότι το $\prod_{k=1}^{+\infty} a_k$ αποκλίνει. Έστω ότι το $\prod_{k=m}^{+\infty} a_k$ έχει όριο p' στο $\mathbf{C} \bigcup \{\infty\}$. Στην περίπτωση που $p' \neq 0$ και

$p' \neq \infty$, οπότε το $\prod_{k=m}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει στο p', λέμε ότι το $\prod_{k=1}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει στο $p = \big(\prod_{k=1}^{m-1} a_k\big)p'$. Στην περίπτωση που $p' = 0$, οπότε το $\prod_{k=m}^{+\infty} a_k$ αποκλίνει στο 0, λέμε ότι το $\prod_{k=1}^{+\infty} a_k$ αποκλίνει στο 0. Στην περίπτωση που $p' = \infty$ λέμε ότι το $\prod_{k=1}^{+\infty} a_k$ αποκλίνει.

Τρίτη περίπτωση: Υπάρχουν άπειρα n ώστε $a_n = 0$.

Τότε λέμε ότι το απειρογινόμενο $\prod_{k=1}^{+\infty} a_k$ αποκλίνει.

Παρατήρηση: Σύγκλιση του $\prod_{k=1}^{+\infty} a_k$ και $\prod_{k=1}^{+\infty} a_k = p$ ισχύει σε δύο μόνο περιπτώσεις: είτε $p \neq 0$ είτε $p = 0$. Η περίπτωση $p \neq 0$ ισοδυναμεί με $a_n \neq 0$ για κάθε n και $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k \to p \neq 0, \infty$. Η περίπτωση $p = 0$ ισοδυναμεί με το να υπάρχει $m \geq 2$ ώστε $a_n = 0$ για ένα τουλάχιστον $n < m$ και $a_n \neq 0$ για κάθε $n \geq m$ και $\prod_{k=m}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει σε μιγαδικό $\neq 0$.

Πρόταση 2.1 *Αν το $\prod_{k=1}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε $a_n \to 1$.*

Απόδειξη: Υπάρχει m ώστε $a_n \neq 0$ για κάθε $n \geq m$ και $\prod_{k=m}^{+\infty} a_k = p' \neq 0, \infty$. Αν $n \geq m+1$, τότε $p'_n = \prod_{k=m}^{n} a_k \to p'$ και $p'_{n-1} \to p'$. Άρα,

$$a_n = \frac{p'_n}{p'_{n-1}} \to \frac{p'}{p'} = 1.$$

Παρατήρηση: Στο εξής συμφωνούμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο

$$\prod_{k=1}^{+\infty}(1+u_k)$$

για τα απειρογινόμενα. Σύμφωνα με όσα έχουμε πει, η σύγκλιση του απειρογινομένου συνεπάγεται ότι το πολύ πεπερασμένου πλήθους u_n είναι ίσα με το -1 και ότι $u_n \to 0$.

Θεώρημα 2.1 *Έστω ότι $u_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Τότε το $\prod_{k=1}^{+\infty}(1+u_k)$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k < +\infty$.*

Απόδειξη: Θέτουμε $p_n = (1+u_1)\cdots(1+u_n)$, οπότε η $\{p_n\}$ είναι αύξουσα και $p_n \geq 1$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα η $\{p_n\}$ είτε συγκλίνει σε αριθμό ≥ 1 είτε αποκλίνει στο ∞.
($\Leftarrow$) Έστω $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k < +\infty$. Τότε

$$p_n \leq e^{u_1}\cdots e^{u_n} = e^{u_1+\cdots+u_n} \leq e^{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k} < +\infty.$$

Άρα η $\{p_n\}$ είναι φραγμένη, οπότε συγκλίνει σε αριθμό ≥ 1. Άρα το $\prod_{k=1}^{+\infty}(1+u_k)$ συγκλίνει.
($\Rightarrow$) Έστω ότι το $\prod_{k=1}^{+\infty}(1+u_k)$ συγκλίνει. Τότε η $\{p_n\}$ είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό $p = \prod_{k=1}^{+\infty}(1+u_k)$ και

$$1 + u_1 + \cdots + u_n \leq (1+u_1)\cdots(1+u_n) \leq p < +\infty.$$

Επομένως, $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \leq p - 1 < +\infty$.

Παράδειγμα: Το $\prod_{k=1}^{+\infty}(1 + \frac{1}{k})$ αποκλίνει στο $+\infty$ διότι $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$, ενώ το $\prod_{k=1}^{+\infty}(1 + \frac{1}{k^2})$ συγκλίνει, διότι $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$.

Παρατήρηση: Από την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1 έχουμε ότι, αν $u_n \geq 0$ για κάθε n, τότε

$$1 + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \leq \prod_{k=1}^{+\infty}(1 + u_k) \leq e^{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k}.$$

Ορισμός 2.1 *Λέμε ότι το* $\prod_{k=1}^{+\infty}(1 + u_k)$ ***συγκλίνει απολύτως****, αν* $\sum_{k=1}^{+\infty} |u_k| < +\infty$.

Παρατήρηση: Από το Θεώρημα 2.1 έχουμε ότι το $\prod_{k=1}^{+\infty}(1 + u_k)$ συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν το $\prod_{k=1}^{+\infty}(1 + |u_k|)$ συγκλίνει.

Λήμμα 2.1 *Αν* $0 \leq a_1, \ldots, a_n \leq 1$ *τότε* $(1 - a_1) \cdots (1 - a_n) \geq 1 - a_1 - \cdots - a_n$.

Απόδειξη: Με επαγωγή στο n.

Θεώρημα 2.2 *Αν το* $\prod_{k=1}^{+\infty}(1 + u_k)$ *συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει.*

Απόδειξη: Επειδή η $\sum_{k=1}^{+\infty} |u_k|$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι $u_n \to 0$, άρα το πολύ πεπερασμένου πλήθους u_n είναι ίσα με -1.
Πρώτη περίπτωση: $\sum_{k=1}^{+\infty} |u_k| < 1$.

Τότε κανένα u_n δεν είναι ίσο με -1. Παίρνουμε $n < m$ και έχουμε

$$|p_m - p_n| = \Big| \prod_{k=1}^{m}(1 + u_k) - \prod_{k=1}^{n}(1 + u_k) \Big|$$

$$= \Big| \prod_{k=1}^{n}(1 + u_k)\Big(\prod_{k=n+1}^{m} (1 + u_k) - 1\Big) \Big| = \prod_{k=1}^{n} |1 + u_k| \, \Big| \prod_{k=n+1}^{m} (1 + u_k) - 1 \Big|$$

$$\leq \prod_{k=1}^{n}(1 + |u_k|) \Big(\prod_{k=n+1}^{m} (1 + |u_k|) - 1 \Big) = \prod_{k=1}^{m}(1 + |u_k|) - \prod_{k=1}^{n}(1 + |u_k|) = q_m - q_n,$$

όπου $q_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + |u_k|)$ είναι το n-οστό μερικό γινόμενο του $\prod_{k=1}^{+\infty}(1 + |u_k|)$. Από το Θεώρημα 2.1 το $\prod_{k=1}^{+\infty}(1 + |u_k|)$ συγκλίνει, οπότε $\lim_{m,n\to+\infty} |q_m - q_n| = 0$. Άρα, $\lim_{m,n\to+\infty} |p_m - p_n| = 0$ και, επομένως, η $\{p_n\}$ συγκλίνει. Μένει να δείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} p_n \neq 0$.

$$|p_n| = \prod_{k=1}^{n} |1 + u_k| \geq \prod_{k=1}^{n}(1 - |u_k|) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} |u_k| \geq 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} |u_k| > 0.$$

Άρα, $\lim_{n\to+\infty} |p_n| \geq 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} |u_k| > 0$.
Δεύτερη περίπτωση: $\sum_{k=1}^{+\infty} |u_k| \geq 1$.

Υπάρχει m ώστε $\sum_{k=m}^{+\infty} |u_k| < 1$. Από την πρώτη περίπτωση, το $\prod_{k=m}^{+\infty}(1+u_k)$ συγκλίνει, οπότε το $\prod_{k=1}^{+\infty}(1 + u_k)$ συγκλίνει.

Θεώρημα 2.3 *Έστω Ω ανοιχτό $\subseteq \mathbf{C}$ και $u_n \quad (n \in \mathbf{N})$ αναλυτικές συναρτήσεις στο Ω. Υποθέτουμε ότι για κάθε K συμπαγές $\subseteq \Omega$ υπάρχει $M_{K,k} < +\infty$ ώστε να ισχύει $|u_k(z)| \leq M_{K,k}$ για κάθε $z \in K$ και $k \in \mathbf{N}$.*
Αν $\sum_{k=1}^{+\infty} M_{K,k} < +\infty$ για κάθε K, τότε το $p(z) = \prod_{k=1}^{+\infty}\big(1 + u_k(z)\big)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω και ορίζει αναλυτική συνάρτηση στο Ω.

Απόδειξη: Για τυχαίο $z \in \Omega$ ισχύει $|u_k(z)| \leq M_{\{z\},k}$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$. Επειδή $\sum_{k=1}^{+\infty} |u_k(z)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} M_{\{z\},k} < +\infty$, συνεπάγεται ότι το $\prod_{k=1}^{+\infty}(1 + u_k(z))$ συγκλίνει απολύτως και επομένως συγκλίνει. Άρα, ορίζεται κατά σημείο το $p(z) = \prod_{k=1}^{+\infty}(1 + u_k(z))$. Έστω τυχαίο K συμπαγές $\subseteq \Omega$ και $z \in K$. Αν $m > n$, τότε, βάση της απόδειξης του Θεωρήματος 2.2,

$$\mid p_m(z) - p_n(z) \mid \leq q_m(z) - q_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(1 + |u_k(z)|)\Big(\prod_{k=n+1}^{m}(1 + |u_k(z)|) - 1\Big),$$

όπου $q_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(1 + |u_k(z)|)$. Παίρνοντας όριο καθώς $m \to +\infty$, έχουμε

$$\mid p(z) - p_n(z) \mid \leq \prod_{k=1}^{n}(1 + |u_k(z)|)\Big(\prod_{k=n+1}^{+\infty}(1 + |u_k(z)|) - 1\Big)$$

$$\leq e^{\sum_{k=1}^{n} |u_k(z)|}\Big(e^{\sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(z)|} - 1\Big) \leq e^{\sum_{k=1}^{+\infty} M_{K,k}} - e^{\sum_{k=1}^{n} M_{K,k}}.$$

Άρα,

$$\sup_{z\in K} \mid p_n(z) - p(z) \mid \leq e^{\sum_{k=1}^{+\infty} M_{K,k}} - e^{\sum_{k=1}^{n} M_{K,k}}.$$

Επειδή $\lim_{n\to+\infty} e^{\sum_{k=1}^{n} M_{K,k}} = e^{\sum_{k=1}^{+\infty} M_{K,k}}$, συνεπάγεται ότι $p_n \to p$ ομοιόμορφα στο K. Οι συναρτήσεις $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + u_k)$ είναι αναλυτικές στο Ω, οπότε η p είναι αναλυτική στο Ω.

Παρατήρηση: Στο Θεώρημα 2.3 έχουμε το εξής επιπλέον συμπέρασμα. Ισχύει $p(z) = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει n ώστε $1 + u_n(z) = 0$. Δηλαδή, το σύνολο των ριζών της p είναι ίδιο με το σύνολο όλων των ριζών όλων των παραγόντων του απειρογινομένου.

Στη συνέχεια θα δούμε ένα πολύ σημαντικό παράδειγμα εφαρμογής του Θεωρήματος 2.3.

Έστω $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$, $T = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ και $a \in D$.

Ορισμός 2.2 *Αν $a \in D \setminus \{0\}$, ορίζουμε*

$$\Phi_a(z) = -\frac{\overline{a}}{|a|}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \quad z \in \mathbf{C} \setminus \left\{\frac{1}{\overline{a}}\right\}.$$

Αν $a = 0$, ορίζουμε

$$\Phi_0(z) = z, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Αν $a = 0$, τότε είναι προφανές ότι

$$\Phi_0 : \mathbf{C} \underset{\text{επί}}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} \mathbf{C}$$

και ότι η Φ_0 είναι αναλυτική στο $\mathbf{C}$. Επίσης, αν $a \neq 0$, τότε

$$\Phi_a : \mathbf{C} \setminus \left\{\frac{1}{\overline{a}}\right\} \underset{\text{επί}}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} \mathbf{C} \setminus \left\{\frac{1}{|a|}\right\}$$

και η Φ_a είναι αναλυτική στο $\mathbf{C} \setminus \left\{ \frac{1}{\overline{a}} \right\}$ και έχει πόλο τάξης 1 στο $\frac{1}{\overline{a}}$. Πράγματι, η Φ_a είναι 1-1 διότι

$$\Phi_a(z_1) = \Phi_a(z_2) \Rightarrow \frac{z_1 - a}{1 - \overline{a}z_1} = \frac{z_2 - a}{1 - \overline{a}z_2}$$

$$\Rightarrow z_1 - a - \overline{a}z_1z_2 + |a|^2 z_2 = z_2 - a - \overline{a}z_1z_2 + |a|^2 z_1$$

$$\Rightarrow z_1 + |a|^2 z_2 - z_2 - |a|^2 z_1 = 0 \Rightarrow (z_1 - z_2)(1 - |a|^2) = 0 \Rightarrow z_1 = z_2.$$

Για να δούμε ότι η Φ_a είναι επί παίρνουμε τυχόν $w \in \mathbf{C} \setminus \left\{ \frac{1}{|a|} \right\}$ και έχουμε

$$w = -\frac{\overline{a}}{|a|}\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \Leftrightarrow \frac{|a|w}{\overline{a}}(1 - \overline{a}z) = a - z$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a|w}{\overline{a}} - |a|wz = a - z$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a|w}{\overline{a}} - a = |a|wz - z \Leftrightarrow \frac{|a|w}{\overline{a}} - a = \big(|a|w - 1\big)z$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{|a|w - |a|^2}{\overline{a}(|a|w - 1)}.$$

Είναι προφανές ότι για κάθε $a \in D$ η μοναδική ρίζα της Φ_a είναι το a.

Λήμμα 2.2 *Για κάθε* $a \in D$

$$1- \mid \Phi_a(z) \mid^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}.$$

Απόδειξη:

$$1- \mid \Phi_a(z) \mid^2 = 1- \left| \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right|^2 = \frac{|1-\overline{a}z|^2 - |z-a|^2}{|1-\overline{a}z|^2} =$$

$$= \frac{1+|\overline{a}z|^2 - 2Re(\overline{a}z) - |z|^2 - |a|^2 + 2Re(\overline{a}z)}{|1-\overline{a}z|^2} =$$

$$= \frac{1+|a|^2|z|^2 - |a|^2 - |z|^2}{|1-\overline{a}z|^2} = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2}.$$

Παρατήρηση: Από το Λήμμα 2.2 έχουμε τα εξής συμπεράσματα:

(1) Ισχύει: $|z| < 1 \Leftrightarrow |\Phi_a(z)| < 1$. Άρα, $\Phi_a : D \underset{\text{επί}}{\overset{1-1}{\to}} D$.

(2) Ισχύει: $|z| = 1 \Leftrightarrow |\Phi_a(z)| = 1$. Άρα, $\Phi_a : T \underset{\text{επί}}{\overset{1-1}{\to}} T$.

Θεώρημα 2.4 *Έστω ακολουθία* $\{a_n\}$ *στο* D.
(1) Αν $\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|a_k|) = +\infty$, *τότε το απειρογινόμενο* $B(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \Phi_{a_k}(z)$ *αποκλίνει στο* 0 *για κάθε* $z \in D$.
(2) Αν $\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|a_k|) < +\infty$, *τότε το απειρογινόμενο* $B(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \Phi_{a_k}(z)$ *συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές* $\subseteq D$ *και ορίζει αναλυτική συνάρτηση στο* D *με τις ιδιότητες:*
 (i) $B(z) = 0$ *αν και μόνο αν* $z = a_n$ *για κάποιο* n.
 (ii) $|B(z)| < 1$ *για κάθε* $z \in D$.
 (iii) $\sup_{z\in D} |B(z)| = 1$.

Απόδειξη: (1) Έστω $z \in D$ και $B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \Phi_{a_k}(z)$. Τότε

$$0 \leq |B_n(z)|^2 = \prod_{k=1}^{n} |\Phi_{a_k}(z)|^2 = \prod_{k=1}^{n} \big(1 - (1-|\Phi_{a_k}(z)|^2)\big)$$

$$\leq e^{-\sum_{k=1}^{n}(1-|\Phi_{a_k}(z)|^2)} = e^{-\sum_{k=1}^{n} \frac{(1-|a_k|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a_k}z|^2}} \leq e^{-\frac{1-|z|^2}{4}\sum_{k=1}^{n}(1-|a_k|)},$$

διότι $1-|a_k|^2 = (1-|a_k|)(1+|a_k|) \geq 1-|a_k|$ και $|1-\overline{a_k}z| \leq 1+|a_k||z| \leq 2$.
Άρα,

$$\lim_{n\to+\infty} B_n(z) = 0.$$

(2) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.3. Παίρνουμε τυχαίο K συμπαγές $\subseteq D$. Τότε υπάρχει $r = r(K) < 1$ ώστε $|z| \leq r$ για κάθε $z \in K$. Αν $z \in K$, έχουμε

$$|\Phi_{a_k}(z) - 1| = \Big| -\frac{\overline{a_k}}{|a_k|}\frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k}z} - 1 \Big|$$

$$= \frac{|-\overline{a_k}z + |a_k|^2 - |a_k| + |a_k|\overline{a_k}z|}{|a_k||1 - \overline{a_k}z|}$$

$$\leq \frac{|z||\overline{a_k}|(1 - |a_k|) + |a_k|(1 - |a_k|)}{|a_k||1 - \overline{a_k}z|} = \frac{1 + |z|}{|1 - \overline{a_k}z|}(1 - |a_k|)$$

$$\leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}(1 - |a_k|) \leq \frac{2}{1 - r}(1 - |a_k|)$$

και παρατηρούμε ότι

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{1 - r}(1 - |a_k|) < +\infty.$$

Άρα το απειρογινόμενο συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του D και ορίζει αναλυτική συνάρτηση στο D.
(i) Προφανές.
$(ii)|B(z)| = \prod_{k=1}^{+\infty} |\Phi_{a_k}(z)| < 1.$
(iii) Επειδή από το (ii) ισχύει $|B(z)| < 1$ για κάθε $z \in D$, συνεπάγεται

$$\sup_{z \in D} |B(z)| \leq 1.$$

Θέτουμε

$$M = \sup_{z \in D} |B(z)|.$$

Θεωρούμε για κάθε $n \in \mathbf{N}$ το

$$\prod_{k=n+1}^{+\infty} \Phi_{a_k}(z) = \frac{B(z)}{B_n(z)},$$

όπου

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \Phi_{a_k}(z).$$

Η συνάρτηση B_n είναι συνεχής στον $\overline{D}$ και επειδή ο $\overline{D}$ είναι συμπαγής, η B_n είναι ομοιόμορφα συνεχής στον $\overline{D}$. Παίρνουμε $\varepsilon > 0$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$z_1,\ z_2 \in \overline{D}, \quad |z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |B_n(z_1) - B_n(z_2)| < \varepsilon.$$

Παίρνουμε r ώστε $1-\delta < r < 1$ και τυχαίο z με μέτρο r. Τότε, αν $z' = \frac{z}{|z|}$, ισχύει $|B_n(z')| = \prod_{k=1}^{n} |\Phi_{a_k}(z')| = 1$ και $|z'-z| = 1-r < \delta$. Άρα, $|B_n(z) - B_n(z')| < \varepsilon$, από το οποίο συνεπάγεται ότι $|B_n(z)| > |B_n(z')| - \varepsilon = 1-\varepsilon$. Άρα, $\min_{|z|=r} |B_n(z)| > 1-\varepsilon$. Τότε, για κάθε z με $|z| = r$ έχουμε

$$\Big| \prod_{k=n+1}^{+\infty} \Phi_{a_k}(z) \Big| = \frac{|B(z)|}{|B_n(z)|} \leq \frac{M}{1-\varepsilon}$$

και επομένως,

$$\max_{|z|=r} \Big| \prod_{k=n+1}^{+\infty} \Phi_{a_k}(z) \Big| \leq \frac{M}{1-\varepsilon}.$$

Από την αρχή μεγίστου για την αναλυτική συνάρτηση $\prod_{k=n+1}^{+\infty} \Phi_{a_k}(z)$ συνεπάγεται ότι

$$| \prod_{k=n+1}^{+\infty} \Phi_{a_k}(0) | \leq \frac{M}{1-\varepsilon}.$$

Το ε είναι τυχαίο και παίρνοντας όριο όταν $\varepsilon \to 0^+$, βρίσκουμε

$$| \prod_{k=n+1}^{+\infty} \Phi_{a_k}(0) | \leq M$$

για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Παίρνοντας όριο όταν $n \to +\infty$, βρίσκουμε

$$1 \leq M = \sup_{z \in D} |B(z)|$$

και αποδείχθηκε το (iii).

Ορισμός 2.3 *Η συνάρτηση $B : D \to D$ που είδαμε στο Θεώρημα 2.4 ονομάζεται* ***απειρογινόμενο Blaschke*** *με ρίζες τα a_n, $n \in \mathbf{N}$. Η συνθήκη*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |a_k|) < +\infty$$

που καθορίζει πότε το απειρογινόμενο συγκλίνει ονομάζεται ***συνθήκη Blaschke****.*

Κεφάλαιο 3

Χώροι Banach

Ορισμός 3.1 *Έστω X ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbf{C}$. Μία συνάρτηση $\| \cdot \|: X \to [0, +\infty)$ ονομάζεται **νόρμα** στον X αν έχει τις εξής ιδιότητες:*
(i) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(ii) $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$ *για κάθε* $\lambda \in \mathbf{C}$ *και* $x \in X$.
(iii) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ *για κάθε* $x, y \in X$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Ο χώρος

$$\mathbf{C}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) | z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{C}\}$$

με πράξεις:

$$(z_1, \ldots, z_n) + (w_1, \ldots, w_n) = (z_1 + w_1, \ldots, z_n + w_n)$$

$$\lambda(z_1, \ldots, z_n) = (\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n).$$

Τρεις νόρμες είναι οι εξής:

$$\| (z_1, \ldots, z_n) \|_1 = |z_1| + \cdots + |z_n|$$

$$\| (z_1, \ldots, z_n) \|_2 = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}$$

$$\| (z_1, \ldots, z_n) \|_\infty = \max(|z_1|, \ldots, |z_n|).$$

Ορισμός 3.2 *Αν ο γραμμικός χώρος X έχει μία νόρμα, τότε λέμε ότι είναι **χώρος με νόρμα**.*

Έστω $\| \cdot \|$ μία νόρμα στον X. Ορίζεται η συνάρτηση: $d : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to [0, +\infty)$ με τύπο

$$d(x, y) = \| x - y \|, \quad x, y \in X.$$

Η d είναι μετρική στον X, διότι:

$$d(x, y) \geq 0,$$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \| x - y \| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$d(x, y) + d(y, z) = \| x - y \| + \| y - z \| \geq \| (x - y) + (y - z) \| = \| x - z \| = d(x, z).$$

Δηλαδή, κάθε χώρος με νόρμα είναι μετρικός χώρος.

Παρατήρηση: $x_n \to x$ στον μετρικό χώρο X σημαίνει $d(x_n, x) \to 0$ ή, ισοδύναμα, $\| x_n - x \| \to 0$.

Ορισμός 3.3 *Έστω γραμμικός χώρος X επί του $\mathbf{C}$ με νόρμα $\| \cdot \|$. Αν ο X είναι πλήρης (ως μετρικός χώρος με την μετρική που ορίζεται από τη νόρμα), τότε ονομάζεται* ***χώρος Banach****. Πλήρης μετρικός χώρος σημαίνει ότι κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει σε στοιχείο του χώρου. Δηλαδή,*

$$\lim_{n,m \to +\infty} \| x_n - x_m \| = 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{υπάρχει} \quad x \in X \quad \textit{ώστε} \lim_{n \to +\infty} \| x_n - x \| = 0.$$

Πρόταση 3.1 *Αν ο X είναι χώρος Banach και αν ο Y είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X με την ίδια νόρμα, τότε ο Y είναι επίσης χώρος Banach.*

Απόδειξη: Έστω $\{x_n\}$ ακολουθία *Cauchy* στον Y. Δηλαδή,

$$\lim_{n,m \to +\infty} \| x_n - x_m \| = 0.$$

Επειδή ο X είναι πλήρης, συνεπάγεται ότι υπάρχει $x \in X$, ώστε

$$\lim_{n \to +\infty} \| x_n - x \| = 0.$$

Επειδή ο Y είναι κλειστός και $x_n \in Y$ για κάθε n συνεπάγεται ότι $x \in Y$. Άρα ο Y είναι πλήρης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Ο χώρος

$$l^1 = \left\{ a = (a_1, a_2, \ldots) \mid a_k \in \mathbf{C} \quad \text{για κάθε} \quad k \in \mathbf{N} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| < +\infty \right\}.$$

Ο l^1 είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbf{C}$ με τις πράξεις

$$a + b = (a_1, a_2, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots),$$

$$\lambda a = \lambda(a_1, a_2, \ldots) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots).$$

Παρατηρούμε ότι $a+b \in l^1$ διότι $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k+b_k| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| + \sum_{k=1}^{+\infty} |b_k| < +\infty$ και $\lambda a \in l^1$, διότι $\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| < +\infty$. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι ισχύουν όλες οι ιδιότητες των πράξεων ενός γραμμικού χώρου.

Ορίζουμε νόρμα με τον τύπο:

$$\| a \|_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|, \quad a = (a_1, a_2, \ldots) \in l^1.$$

Η $\| \cdot \|_1$ είναι νόρμα διότι

(i) $\quad \| a \|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| = 0 \Leftrightarrow a_k = 0$ για κάθε $k \in \mathbf{N} \Leftrightarrow a = (0, 0, \ldots)$.

(ii) $\quad \| \lambda a \|_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| = |\lambda| \, \| a \|_1$.

(iii) $\quad \| a+b \|_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k+b_k| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| + \sum_{k=1}^{+\infty} |b_k| = \| a \|_1 + \| b \|_1$.

Θα δούμε τώρα ότι ο l^1 είναι χώρος *Banach*.

Έστω $\{a^{(n)}\}$ ακολουθία *Cauchy* του l^1 όπου $a^{(n)} = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots)$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Δηλαδή,

$$\lim_{n,m \to +\infty} \| a^{(n)} - a^{(m)} \|_1 = 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$\lim_{n,m \to +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k^{(n)} - a_k^{(m)}| = 0.$$

Σταθεροποιούμε τυχαίο $k \in \mathbf{N}$. Τότε, $|a_k^{(n)} - a_k^{(m)}| \leq \| a^{(n)} - a^{(m)} \|_1$, οπότε

$$\lim_{n,m \to +\infty} |a_k^{(n)} - a_k^{(m)}| = 0.$$

Επειδή ο $\mathbf{C}$ είναι πλήρης, υπάρχει $a_k \in \mathbf{C}$ ώστε $\lim_{n \to +\infty} |a_k^{(n)} - a_k| = 0$.
Φτιάχνεται έτσι ακολουθία $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ μιγαδικών αριθμών με την ιδιότητα:

$$\lim_{n \to +\infty} a_k^{(n)} = a_k, \quad k \in \mathbf{N}.$$

(1) $\quad$ Βρίσκουμε n_0 ώστε $\| a^{(n)} - a^{(m)} \|_1 < 1$ για κάθε $n, m \geq n_0$, οπότε $\| a^{(n)} - a^{(n_0)} \|_1 < 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k^{(n)} - a_k^{(n_0)}| < 1, \quad n \geq n_0.$$

Παίρνουμε τυχαίο $\Lambda \in \mathbf{N}$ και έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\Lambda} |a_k^{(n)} - a_k^{(n_0)}| < 1, \quad n \geq n_0.$$

Συνεπάγεται

$$\sum_{k=1}^{\Lambda} |a_k^{(n)}| < 1 + \sum_{k=1}^{\Lambda} |a_k^{(n_0)}| \leq 1 + \| a^{(n_0)} \|_1, \quad n \geq n_0.$$

Παίρνουμε όρια όταν $n \to +\infty$ και βρίσκουμε

$$\sum_{k=1}^{\Lambda} |a_k| \le 1 + \| a^{(n_0)} \|_1 .$$

Επειδή το Λ είναι τυχαίο, παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| \le 1 + \| a^{(n_0)} \|_1 < +\infty.$$

Άρα, $a \in l^1$.
(2) Παίρνουμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε n_0 ώστε $\| a^{(n)} - a^{(m)} \|_1 < \varepsilon/2$ για κάθε $n, m \ge n_0$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k^{(n)} - a_k^{(m)}| < \varepsilon/2, \quad n, m \ge n_0.$$

Παίρνουμε τυχαίο $\Lambda \in \mathbf{N}$ και έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\Lambda} |a_k^{(n)} - a_k^{(m)}| < \varepsilon/2, \quad n, m \ge n_0.$$

Παίρνουμε όρια όταν $m \to +\infty$ και βρίσκουμε

$$\sum_{k=1}^{\Lambda} |a_k^{(n)} - a_k| \le \varepsilon/2, \quad n \ge n_0.$$

Το Λ είναι τυχαίο, οπότε

$$\| a^{(n)} - a \|_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k^{(n)} - a_k| \le \varepsilon/2 < \varepsilon, \quad n \ge n_0.$$

Άρα:

$$\lim_{n \to +\infty} \| a^{(n)} - a \|_1 = 0.$$

Άρα, η τυχαία ακολουθία *Cauchy* $\{a^{(n)}\}$ συγκλίνει σε στοιχείο του l^1. Δηλαδή, ο l^1 είναι πλήρης, οπότε ο l^1 είναι χώρος *Banach*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3: Ο χώρος

$$l^2 = \Big\{ \ a = (a_1, a_2, \ldots) \mid a_k \in \mathbf{C} \quad \text{για κάθε} \quad k \in \mathbf{N} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 < +\infty \ \Big\} .$$

Ο l^2 είναι γραμμικός χώρος με τις ίδιες πράξεις όπως στον l^1. Παρατηρούμε ότι, αν $a = (a_1, a_2, \ldots), b = (b_1, b_2, \ldots) \in l^2$, τότε $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k + b_k|^2 \le 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 +$

$2\sum_{k=1}^{+\infty}|b_k|^2 < +\infty$, οπότε $a+b \in l^2$. Επίσης, αν $a=(a_1,a_2,\ldots)\in l^2$ και $\lambda \in \mathbf{C}$, τότε $\sum_{k=1}^{+\infty}|\lambda a_k|^2 = |\lambda|^2\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|^2 < +\infty$, οπότε $\lambda a \in l^2$.

Η νόρμα στον l^2 ορίζεται με τον τύπο

$$\| a \|_2 = \Big(\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|^2\Big)^{1/2}, \quad a=(a_1,a_2,\ldots)\in l^2.$$

Η $\| \cdot \|_2$ είναι νόρμα, διότι

(i) $\quad \| a \|_2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|^2 = 0 \Leftrightarrow a_k = 0$ για κάθε $k \in \mathbf{N} \Leftrightarrow a=(0,0,\ldots)$.

(ii) $\quad \| \lambda a \|_2 = \Big(\sum_{k=1}^{+\infty}|\lambda a_k|^2\Big)^{1/2} = |\lambda|\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|^2\Big)^{1/2} = |\lambda| \, \| a \|_2$.

(iii) $\quad$ Για την ανισότητα $\| a+b \|_2 \leq \| a \|_2 + \| b \|_2$ αποδεικνύουμε πρώτα την ανισότητα $Cauchy-Schwarz$.

$$\Big| \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k \Big| \leq \Big(\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}|b_k|^2\Big)^{1/2} \qquad (\star)$$

όταν $\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|^2 < +\infty$ και $\sum_{k=1}^{+\infty}|b_k|^2 < +\infty$.

Αν όλα τα a_k είναι μηδέν ή όλα τα b_k είναι μηδέν, τότε όλα τα $a_k b_k$ είναι μηδέν και η $(\star)$ ισχύει ως ισότητα, 0=0. Υποθέτουμε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|^2 > 0$ και $\sum_{k=1}^{+\infty}|b_k|^2 > 0$ και θέτουμε

$$A = \Big(\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|^2\Big)^{1/2} > 0, \quad B = \Big(\sum_{k=1}^{+\infty}|b_k|^2\Big)^{1/2} > 0.$$

Τότε

$$\Big| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k b_k}{AB} \Big| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \Big| \frac{a_k b_k}{AB} \Big| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|a_k|^2}{A^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|b_k|^2}{B^2} = 1.$$

Άρα,

$$\Big| \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k \Big| \leq AB$$

και αποδείχθηκε η $(\star)$ σε όλες τις περιπτώσεις.

Τώρα, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $Cauchy-Schwarz$,

$$\| a+b \|_2{}^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k+b_k|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}\big(|a_k|^2+|b_k|^2+2Re(a_k\overline{b_k})\big)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}|b_k|^2 + 2Re\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\overline{b_k}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}|b_k|^2 + 2\,\Big|\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\overline{b_k}\,\Big|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}|b_k|^2 + 2\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}|b_k|^2\Big)^{1/2}$$

$$= \| a \|_2{}^2 + \| b \|_2{}^2 + 2 \| a \|_2 \| b \|_2$$

$$= \big(\| a \|_2 + \| b \|_2\big)^2$$

Άρα,

$$\| a+b \|_2 \leq \| a \|_2 + \| b \|_2 \, .$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο l^2 είναι χώρος $Banach$. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την περίπτωση του l^1. Έστω $\{a^{(n)}\}$ ακολουθία $Cauchy$ του l^2, όπου $a^{(n)} = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots)$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Δηλαδή,

$$\lim_{n,m\to+\infty} \| a^{(n)} - a^{(m)} \|_2 = 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$\lim_{n,m\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k^{(n)} - a_k^{(m)}|^2 = 0.$$

Σταθεροποιούμε τυχαίο $k \in$ N. Τότε $|a_k^{(n)} - a_k^{(m)}| \leq \| a^{(n)} - a^{(m)} \|_2$, οπότε,

$$\lim_{n,m\to+\infty} |a_k^{(n)} - a_k^{(m)}| = 0.$$

Επειδή ο $\mathbf{C}$ είναι χώρος πλήρης, υπάρχει $a_k \in \mathbf{C}$ ώστε $\lim_{n\to+\infty} |a_k^{(n)} - a_k| = 0$. Φτιάχνεται έτσι ακολουθία $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ μιγαδικών αριθμών με την ιδιότητα:

$$\lim_{n\to+\infty} a_k^{(n)} = a_k, \quad k \in \mathbf{N}.$$

(1) Βρίσκουμε n_0 ώστε $\| a^{(n)} - a^{(m)} \|_2 < 1$ για κάθε $n, m \geq n_0$, οπότε $\| a^{(n)} - a^{(n_0)} \|_2 < 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k^{(n)} - a_k^{(n_0)}|^2 < 1, \quad n \geq n_0.$$

Παίρνουμε τυχαίο $\Lambda \in \mathbf{N}$ και έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\Lambda} |a_k^{(n)} - a_k^{(n_0)}|^2 < 1, \quad n \geq n_0.$$

Συνεπάγεται

$$\sum_{k=1}^{\Lambda} |a_k^{(n)}|^2 < 2 + 2\sum_{k=1}^{\Lambda} |a_k^{(n_0)}|^2 \leq 2 + 2 \parallel a^{(n_0)} \parallel_2^2, \quad n \geq n_0.$$

Παίρνουμε όρια όταν $n \to +\infty$ και έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\Lambda} |a_k|^2 \leq 2 + 2 \parallel a^{(n_0)} \parallel_2^2 .$$

Επειδή το Λ είναι τυχαίο, παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 \leq 2 + 2 \parallel a^{(n_0)} \parallel_2^2 < +\infty.$$

Άρα, $a \in l^2$.
(2) Παίρνουμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε n_0 ώστε $\parallel a^{(n)} - a^{(m)} \parallel_2 < \varepsilon/2$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k^{(n)} - a_k^{(m)}|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad n, m \geq n_0.$$

Παίρνουμε τυχαίο $\Lambda \in \mathbf{N}$ και έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\Lambda} |a_k^{(n)} - a_k^{(m)}|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad n, m \geq n_0.$$

Παίρνουμε όρια όταν $m \to +\infty$, και έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\Lambda} |a_k^{(n)} - a_k|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad n \geq n_0.$$

Το Λ είναι τυχαίο, οπότε

$$\parallel a^{(n)} - a \parallel_2^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k^{(n)} - a_k|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4} < \varepsilon^2, \quad n \geq n_0.$$

Άρα:

$$\lim_{n \to +\infty} \parallel a^{(n)} - a \parallel_2 = 0.$$

Άρα, η τυχαία ακολουθία *Cauchy* $\{a^{(n)}\}$ συγκλίνει σε στοιχείο του χώρου l^2, οπότε ο l^2 είναι χώρος *Banach*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4: Ο χώρος

$$l^{\infty} = \Big\{\ a = (a_1, a_2, \ldots) \mid a_k \in \mathbf{C} \quad \text{για κάθε} \quad k \in \mathbf{N} \quad \text{και} \quad \sup_{k \in \mathbf{N}} |a_k| < +\infty\ \Big\}.$$

Ο l^{∞} είναι γραμμικός χώρος με τις συνήθεις πράξεις ακολουθιών, τις ίδιες με τις πράξεις στον l^1 και στον l^2. Αρκεί να δούμε ότι, αν $a = (a_1, a_2, \ldots) \in l^{\infty}$ και $b = (b_1, b_2, \ldots) \in l^{\infty}$, τότε $\sup_{k \in \mathbf{N}} |a_k + b_k| \leq \sup_{k \in \mathbf{N}} |a_k| + \sup_{k \in \mathbf{N}} |b_k| < +\infty$, οπότε $(a+b) \in l^{\infty}$ και αν $a = (a_1, a_2, \ldots) \in l^{\infty}$ και $\lambda \in \mathbf{C}$, τότε $\sup_{k \in \mathbf{N}} |\lambda a_k| = \sup_{k \in \mathbf{N}} |\lambda||a_k| = |\lambda| \sup_{k \in \mathbf{N}} |a_k| < +\infty$, οπότε $(\lambda a) \in l^{\infty}$.

Η νόρμα στον l^{∞} ορίζεται με τον τύπο

$$\| a \|_{\infty} = \sup_{k \in \mathbf{N}} |a_k|, \quad a = (a_1, a_2, \ldots) \in l^{\infty}.$$

Τότε

(i) $\| a \|_{\infty} = 0 \Leftrightarrow \sup_{k \in \mathbf{N}} |a_k| = 0 \Leftrightarrow a_k = 0$ για κάθε $k \in \mathbf{N} \Leftrightarrow a = (0, 0, \ldots)$.

(ii) $\| \lambda a \|_{\infty} = \sup_{k \in \mathbf{N}} |\lambda a_k| = \sup_{k \in \mathbf{N}} |\lambda||a_k| = |\lambda| \sup_{k \in \mathbf{N}} |a_k| = |\lambda| \, \| a \|_{\infty}$.

(iii) $\| a + b \|_{\infty} = \sup_{k \in \mathbf{N}} |a_k + b_k| \leq \sup_{k \in \mathbf{N}} (|a_k| + |b_k|) \leq \sup_{k \in \mathbf{N}} |a_k| + \sup_{k \in \mathbf{N}} |b_k| = \| a \|_{\infty} + \| b \|_{\infty}$.

Ο l^{∞} είναι χώρος *Banach*. Αυτό θα αποδειχθεί όπως, περίπου, στις περιπτώσεις των l^1 και l^2. Έστω $\{a^{(n)}\}$ ακολουθία *Cauchy* του l^{∞}, όπου $a^{(n)} = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots)$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Δηλαδή,

$$\lim_{n,m \to +\infty} \| a^{(n)} - a^{(m)} \|_{\infty} = 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$\lim_{n,m \to +\infty} \sup_{k \in \mathbf{N}} |a_k^{(n)} - a_k^{(m)}| = 0.$$

Σταθεροποιούμε τυχαίο $k \in \mathbf{N}$. Τότε $|a_k^{(n)} - a_k^{(m)}| \leq \| a^{(n)} - a^{(m)} \|_{\infty}$, οπότε

$$\lim_{n,m \to +\infty} |a_k^{(n)} - a_k^{(m)}| = 0.$$

Επειδή ο $\mathbf{C}$ είναι πλήρης, υπάρχει $a_k \in \mathbf{C}$ ώστε $\lim_{n \to +\infty} |a_k^{(n)} - a_k| = 0$. Φτιάχνεται έτσι ακολουθία $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ μιγαδικών αριθμών, με την ιδιότητα

$$\lim_{n \to +\infty} a_k^{(n)} = a_k, \quad k \in \mathbf{N}.$$

(1) Βρίσκουμε n_0 ώστε $\| a^{(n)} - a^{(m)} \|_{\infty} < 1$ για κάθε $n, m \geq n_0$, οπότε $\| a^{(n)} - a^{(n_0)} \|_{\infty} < 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε για κάθε $k \in \mathbf{N}$ έχουμε

$$|a_k^{(n)} - a_k^{(n_0)}| < 1$$

οπότε

$$|a_k^{(n)}| < 1 + |a_k^{(n_0)}| \leq 1 + \sup_{k\in\mathbf{N}} |a_k^{(n_0)}| \leq 1 + \parallel a^{(n_0)} \parallel_\infty, \quad n \geq n_0.$$

Παίρνουμε όρια όταν $n \to +\infty$ και βρίσκουμε

$$|a_k| \leq 1 + \parallel a^{(n_0)} \parallel_\infty < +\infty.$$

Επειδή το k είναι τυχαίο,

$$\sup_{k\in\mathbf{N}} |a_k| \leq 1 + \parallel a^{(n_0)} \parallel_\infty < +\infty$$

και, επομένως, $a \in l^\infty$.
(2) Παίρνουμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε n_0 ώστε $\parallel a^{(n)} - a^{(m)} \parallel_\infty < \varepsilon/2$ για κάθε $n, m \geq n_0$, οπότε $|a_k^{(n)} - a_k^{(m)}| < \varepsilon/2$ για κάθε $n, m \geq n_0$ και κάθε $k \in \mathbf{N}$. Παίρνουμε όρια όταν $m \to +\infty$ και έχουμε

$$|a_k^{(n)} - a_k| \leq \varepsilon/2, \quad n \geq n_0.$$

Επειδή το k είναι τυχαίο,

$$\parallel a^{(n)} - a \parallel_\infty \leq \varepsilon/2 < \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to+\infty} \parallel a^{(n)} - a \parallel_\infty = 0.$$

Άρα, η τυχαία ακολουθία *Cauchy* $\{a^{(n)}\}$ συγκλίνει σε στοιχείο του l^∞ και επομένως, ο l^∞ είναι χώρος *Banach*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5: Ο χώρος

$$c_0 = \left\{ a = (a_1, a_2, \ldots) \mid a_k \in \mathbf{C} \quad \text{για κάθε} \quad k \in \mathbf{N} \quad \text{και} \quad \lim_{k\to+\infty} a_k = 0 \right\}.$$

Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη, οπότε $c_0 \subseteq l^\infty$. Είναι προφανές ότι ο c_0 είναι γραμμικός υπόχωρος του l^∞, αφού άθροισμα ακολουθιών που συγκλίνουν στο 0 είναι ακολουθία που συγκλίνει στο 0 και γινόμενο αριθμού με ακολουθία που συγκλίνει στο 0 είναι ακολουθία που συγκλίνει στο 0.

Θα αποδείξουμε ότι ο c_0 είναι κλειστό υποσύνολο του l^∞. Έστω $\{a^{(n)}\}$ ακολουθία στον c_0 η οποία συγκλίνει στον l^∞ σε κάποιο $a \in l^\infty$. Θα δείξουμε ότι $a \in c_0$.

Γράφουμε:

$$a^{(n)} = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots), \quad a = (a_1, a_2, \ldots).$$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} \parallel a^{(n)} - a \parallel_\infty = 0$ και $\lim_{k\to+\infty} a_k^{(n)} = 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και θέλουμε να δείξουμε ότι $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.
Έστω τυχαίο $\varepsilon > 0$. Υπάρχει n_0 ώστε $\parallel a^{(n_0)} - a \parallel_\infty < \varepsilon/2$. Για το n_0 υπάρχει

k_0 ώστε $|a_k^{(n_0)}| < \varepsilon/2$ για κάθε $k \geq k_0$.
Τότε, για κάθε $k \geq k_0$ έχουμε:

$$|a_k| \leq |a_k^{(n_0)} - a_k| + |a_k^{(n_0)}| \leq \| a^{(n_0)} - a \|_\infty + |a_k^{(n_0)}| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Άρα,

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = 0,$$

οπότε $a \in c_0$.

Άρα, ο c_0 είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του l^∞ και επειδή ο l^∞ είναι χώρος *Banach*, συνεπάγεται ότι ο c_0 (με την ίδια νόρμα) είναι χώρος *Banach*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6: Έστω οποιοδήποτε μη κενό σύνολο K. Θεωρούμε τον χώρο

$$B(K) = \Big\{ f \mid f : K \to \mathbf{C} \quad \text{και} \quad f \quad \text{φραγμένη} \Big\}.$$

Ο $B(K)$ είναι γραμμικός χώρος με τις συνηθισμένες πράξεις συναρτήσεων:

$$(f+g)(k) = f(k) + g(k), \quad k \in K$$

$$(\lambda f)(k) = \lambda f(k), \quad k \in K.$$

Ορίζουμε νόρμα στον $B(K)$ με τύπο

$$\| f \|_\infty = \sup_{k \in K} |f(k)|, \quad f \in B(K).$$

Η $\| \cdot \|_\infty$ είναι νόρμα διότι
(i) $\| f \|_\infty = 0 \Leftrightarrow f(k) = 0$ για κάθε $k \in K \Leftrightarrow f =$ η μηδενική συνάρτηση.
(ii) $\| \lambda f \|_\infty = \sup_{k \in K} |(\lambda f)(k)| = \sup_{k \in K} |\lambda||f(k)| = |\lambda| \sup_{k \in K} |f(k)| = |\lambda| \, \| f \|_\infty$.
(iii) Επειδή $|f(k)| \leq \| f \|_\infty$ και $|g(k)| \leq \| g \|_\infty$ για κάθε $k \in K$, συνεπάγεται $|(f+g)(k)| = |f(k) + g(k)| \leq |f(k)| + |g(k)| \leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$ για κάθε $k \in K$. Άρα, $\| f + g \|_\infty = \sup_{k \in K} |(f+g)(k)| \leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$.

Ο $B(K)$ είναι χώρος *Banach*. Πράγματι, έστω ακολουθία *Cauchy* $\{f_n\}$ στον $B(K)$. Δηλαδή,

$$\lim_{n,m \to +\infty} \| f_n - f_m \|_\infty = 0.$$

Σταθεροποιούμε τυχαίο $k \in K$, οπότε $|f_n(k) - f_m(k)| \leq \| f_n - f_m \|_\infty$. Άρα, $\lim_{n,m \to +\infty} |f_n(k) - f_m(k)| = 0$ και επομένως η $\{f_n(k)\}$ είναι *Cauchy* στον $\mathbf{C}$. Άρα, υπάρχει το όριο $\lim_{n \to +\infty} f_n(k)$ στον $\mathbf{C}$. Ορίζουμε συνάρτηση $f : K \to \mathbf{C}$ με τύπο

$$f(k) = \lim_{n \to +\infty} f_n(k), \quad k \in K.$$

Δηλαδή, $f_n \to f$ κατά σημείο στο K.

Υπάρχει n_0 ώστε $\| f_n - f_m \|_\infty < 1$ για κάθε $n, m \geq n_0$, οπότε $\| f_n - f_{n_0} \|_\infty < 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται

$$|f_n(k) - f_{n_0}(k)| < 1, \quad k \in K, n \geq n_0.$$

Παίρνουμε όριο για $n \to +\infty$ και έχουμε

$$|f(k) - f_{n_0}(k)| \leq 1, \quad k \in K.$$

Άρα,

$$|f(k)| \leq 1 + |f_{n_0}(k)| \leq 1 + \| f_{n_0} \|_\infty, \quad k \in K.$$

Άρα,

$$\sup_{k \in K} |f(k)| \leq 1 + \| f_{n_0} \|_\infty < +\infty$$

και, επομένως, $f \in B(K)$.

Παίρνουμε τυχαίο $\varepsilon > 0$. Υπάρχει n_0 ώστε $\| f_n - f_m \|_\infty < \varepsilon/2$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Τότε για κάθε $k \in K$

$$|f_n(k) - f_m(k)| < \varepsilon/2, \quad n, m \geq n_0.$$

Παίρνουμε όριο για $m \to +\infty$ και έχουμε

$$|f_n(k) - f(k)| \leq \varepsilon/2, \quad n \geq n_0.$$

Άρα,

$$\| f_n - f \|_\infty = \sup_{k \in K} |f_n(k) - f(k)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Άρα, $f_n \to f$ στον $B(K)$.

Η νόρμα $\| \cdot \|_\infty$ στον $B(K)$ ονομάζεται **νόρμα της ομοιόμορφης σύγκλισης** συναρτήσεων στο K ή **supremum-νόρμα** στο K.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7: Έστω ότι το K είναι μη κενό υποσύνολο μετρικού χώρου. Ορίζουμε τον χώρο

$$BC(K) = \Big\{ f \mid f : K \to \mathbf{C}, f \text{ φραγμένη και συνεχής στο } K \Big\} \subseteq B(K).$$

Το $BC(K)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $B(K)$ και το εφοδιάζουμε με την $\| \cdot \|_\infty$. Θα αποδείξουμε ότι το $BC(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $B(K)$ και επομένως είναι χώρος *Banach*.

Έστω $\{f_n\}$ στο $BC(K)$ και $\lim_{n\to+\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$, όπου $f \in B(K)$. Θα δείξουμε ότι $f \in BC(K)$. Όμως, $\| f_n - f \|_\infty \to 0$ σημαίνει ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο K. Επειδή κάθε f_n είναι συνεχής στο K, παίρνουμε ότι η f είναι συνεχής στο K, οπότε $f \in BC(K)$.

Αν το K είναι μη κενό συμπαγές υποσύνολο μετρικού χώρου, τότε

$$BC(K) = C(K) = \Big\{ f \mid f : K \to \mathbf{C}, f \text{ συνεχής στο } K \Big\}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8: Έστω Ω ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbf{C}$. Θεωρούμε τον χώρο

$$H^\infty(\Omega) = \Big\{ f \mid f : \Omega \to \mathbf{C}, f \text{ αναλυτική και φραγμένη στο } \Omega \Big\} \subseteq BC(\Omega) \subseteq B(\Omega).$$

Ο $H^\infty(\Omega)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $BC(\Omega)$ και τον εφοδιάζουμε με την νόρμα $\| \cdot \|_\infty$ του $B(\Omega)$ και του $BC(\Omega)$:

$$\| f \|_\infty = \sup_{z\in\Omega} |f(z)|, \quad f \in H^\infty(\Omega).$$

Για να αποδείξουμε ότι ο $H^\infty(\Omega)$ είναι χώρος $Banach$, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι κλειστό υποσύνολο του $B(\Omega)$.

Έστω ακολουθία $\{f_n\}$ στο $H^\infty(\Omega)$ και $\lim_{n\to+\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$ για κάποια f στο $B(\Omega)$. Μένει να δείξουμε ότι $f \in H^\infty(\Omega)$ ή, ισοδύναμα,ότι η f είναι αναλυτική στο Ω. Αυτό ισχύει λόγω του Θεωρήματος 1.1, αφού όλες οι f_n είναι αναλυτικές στο Ω και η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο Ω.

Στην ειδική περίπτωση $\Omega = D$ συμβολίζουμε H^∞ τον $H^\infty(D)$. Δηλαδή,

$$H^\infty = H^\infty(D).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9: Έστω $D = D(0,1)$. Θεωρούμε τον χώρο

$$A(\overline{D}) = \Big\{ f \mid f : \overline{D} \to \mathbf{C}, f \text{ συνεχής στο } \overline{D} \text{ και αναλυτική στο } D \Big\} \subseteq C(\overline{D}).$$

Ο $A(\overline{D})$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $C(\overline{D})$ και τον εφοδιάζουμε με την νόρμα του $C(\overline{D})$:

$$\| f \|_\infty = \sup_{z\in\overline{D}} |f(z)|, \quad f \in A(\overline{D}).$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει η ισότητα:

$$\| f \|_\infty = \sup_{z\in D} |f(z)|, \quad f \in A(\overline{D}).$$

Προφανώς $\sup_{z\in D} |f(z)| \le \sup_{z\in\overline{D}} |f(z)|$. Για την αντίθετη ανισότητα θέτουμε $M = \sup_{z\in D} |f(z)|$. Έστω τυχόν $z \in \overline{D} \setminus D = \vartheta D$. Τότε $(1-\frac{1}{n})z \in D$ και $\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n})z = z$. Συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty} \mid f\big((1-\frac{1}{n})z\big) \mid = |f(z)|$. Επειδή $\mid f\big((1-\frac{1}{n})z\big) \mid \le M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, παίρνουμε $|f(z)| \le M$. Άρα, για κάθε $z \in \overline{D}$ έχουμε $|f(z)| \le M$. Δηλαδή, $\sup_{z\in\overline{D}} |f(z)| \le \sup_{z\in D} |f(z)|$.
Άρα, ισχύει η ισότητα που θέλαμε να αποδέιξουμε.

Έστω ακολουθία $\{f_n\}$ στον $A(\overline{D})$ και $\lim_{n\to+\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$, για κάποια f στον $C(\overline{D})$. Από το Θεώρημα 1.1 συνεπάγεται ότι η f είναι αναλυτική στον D. Άρα, ο $A(\overline{D})$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $C(\overline{D})$, οπότε ο $A(\overline{D})$ είναι χώρος $Banach$.

Θεώρημα 3.1 *Έστω $f \in H^\infty$ και υποθέτουμε ότι η f δεν είναι η μηδενική συνάρτηση. Τότε η f είτε έχει πεπερασμένο πλήθος ριζών είτε οι ρίζες της αποτελούν ακολουθία $\{a_n\}$ με την ιδιότητα $\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|a_k|) < +\infty$.*

Απόδειξη: Έστω ότι η f δεν έχει πεπερασμένο πλήθος ριζών στο D, διότι στην αντίθετη περίπτωση έχουμε τελειώσει. Επίσης, υποθέτουμε προς το παρόν ότι $f(0) \neq 0$.

Επιλέγουμε οποιεσδήποτε από τις ρίζες της f, έστω $a_1, \ldots, a_n$, και θεωρούμε το $B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \Phi_{a_k}(z)$. Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος

2.4, παίρνουμε ε με $0 < \varepsilon < 1$ και βρίσκουμε $\delta > 0$ ώστε: $z_1, z_2 \in \overline{D}$, $|z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |B_n(z_1) - B_n(z_2)| < \varepsilon$. Κατόπιν, παίρνουμε r με $1-\delta < r < 1$ και έχουμε ότι $\min_{|z|=r} |B_n(z)| > 1 - \varepsilon$.

Τότε για κάθε z με $|z| = r$ έχουμε

$$\frac{|f(z)|}{|B_n(z)|} \leq \frac{\|f\|_{H^\infty}}{1-\varepsilon}.$$

Από την αρχή μεγίστου συνεπάγεται $\frac{|f(0)|}{|B_n(0)|} \leq \frac{\|f\|_{H^\infty}}{1-\varepsilon}$ και, επειδή το ε είναι όσο μικρό θέλουμε, έχουμε ότι $\frac{|f(0)|}{|B_n(0)|} \leq \|f\|_{H^\infty}$ που γράφεται ισοδύναμα

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{|a_k|} \leq \frac{\|f\|_{H^\infty}}{|f(0)|}.$$

Συνεπάγεται

$$\sum_{k=1}^{n}(1-|a_k|) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|a_k|}{|a_k|} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{|a_k|}-1\Big) \leq \prod_{k=1}^{n}\Big(\Big(\frac{1}{|a_k|}-1\Big)+1\Big) \leq \frac{\|f\|_{H^\infty}}{|f(0)|}.$$

Από την ανισότητα αυτή που ισχύει για οποιεσδήποτε ρίζες της f συνεπάγεται ότι σε κάθε δίσκο $|z| \leq R < 1$ περιέχονται το πολύ $\frac{\|f\|_{H^\infty}}{|f(0)|(1-R)} < +\infty$ ρίζες της f. Διότι, αν $a_1, \ldots, a_n$ είναι οποιεσδήποτε ρίζες της f σ΄ αυτόν τον δίσκο, τότε $n(1-R) \leq \sum_{k=1}^{n}(1-|a_k|) \leq \frac{\|f\|_{H^\infty}}{|f(0)|}$. Αυτό συνεπάγεται ότι οι ρίζες της f είναι αριθμήσιμες και, επομένως, σχηματίζουν ακολουθία $\{a_n\}$ με $|a_n| \to 1$ όταν $n \to +\infty$. Επίσης, επειδή στην ανισότητα $\sum_{k=1}^{n}(1-|a_k|) \leq \frac{\|f\|_{H^\infty}}{|f(0)|}$ το n είναι αυθαίρετο, έχουμε

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|a_k|) \leq \frac{\|f\|_{H^\infty}}{|f(0)|}.$$

Στην περίπτωση $f(0) = 0$, έστω m η πολλαπλότητα της ρίζας 0, οπότε οι ρίζες της f είναι $a_1 = \cdots = a_m = 0$ και $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ οι οποίες είναι διάφορες του 0. Τότε η $g(z) = \frac{f(z)}{z^m}$ είναι επίσης στον H^∞ και έχει ρίζες τα $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$. Επειδή $g(0) \neq 0$, εφαρμόζουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα και έχουμε $\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|a_k|) = m + \sum_{k=m+1}^{+\infty}(1-|a_k|) < +\infty$.

Θεώρημα 3.2 *Έστω $f \in H^\infty$, η οποία δεν είναι η μηδενική συνάρτηση και $\{a_n\}$ η ακολουθία των ριζών της f, οπότε ισχύει ότι $\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|a_k|) < +\infty$ και θεωρούμε το $B(z) = \prod_{k=1}^{+\infty}\Phi_{a_k}(z)$. Τότε:*

(1) *η συνάρτηση $F(z) = \frac{f(z)}{B(z)}$ είναι αναλυτική στο D.*

(2) *η F είναι φραγμένη στο D και $\| F \|_{H^\infty} = \| f \|_{H^\infty}$.*

Απόδειξη: (1) Είναι προφανές, διότι οι f και B μηδενίζονται στα ίδια σημεία.

(2) Σταθεροποιούμε τυχόν $z_0 \in D$. Θεωρούμε για κάθε $n \in \mathbf{N}$ το $B_n(z) =$

$\prod_{k=1}^{n} \Phi_{a_k}(z)$. Η συνάρτηση B_n είναι συνεχής στον $\overline{D}$ και επειδή ο $\overline{D}$ είναι συμπαγής η B_n είναι ομοιόμορφα συνεχής στον $\overline{D}$. Παίρνουμε $\varepsilon > 0$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$z_1, z_2 \in \overline{D}, \quad |z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |B_n(z_1) - B_n(z_2)| < \varepsilon.$$

Παίρνουμε r ώστε $\max(|z_0|, 1-\delta) < r < 1$ και τυχαίο z με μέτρο r. Τότε, αν $z' = \frac{z}{|z|}$ ισχύει $|z' - z| = 1 - r < \delta$, οπότε $|B_n(z) - B_n(z')| < \varepsilon$, οπότε $|B_n(z)| > |B_n(z')| - \varepsilon = 1 - \varepsilon$. Άρα, $\min_{|z|=r} |B_n(z)| > 1 - \varepsilon$. Τότε, για κάθε z με $|z| = r$ έχουμε

$$\left| \frac{f(z)}{B_n(z)} \right| \leq \frac{\| f \|_{H^\infty}}{1 - \varepsilon}.$$

και από την αρχή μεγίστου συνεπάγεται ότι

$$\left| \frac{f(z_0)}{B_n(z_0)} \right| \leq \max_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{B_n(z)} \right| \leq \frac{\| f \|_{H^\infty}}{1 - \varepsilon}.$$

Το ε είναι τυχαίο και παίρνοντας όριο όταν $\varepsilon \to 0^+$, βρίσκουμε

$$\left| \frac{f(z_0)}{B_n(z_0)} \right| \leq \| f \|_{H^\infty} .$$

Παίρνοντας όριο όταν $n \to +\infty$ έχουμε

$$|F(z_0)| = \left| \frac{f(z_0)}{B(z_0)} \right| \leq \| f \|_{H^\infty} .$$

Επειδή το z_0 είναι τυχαίο σημείο του D,

$$\| F \|_{H^\infty} \leq \| f \|_{H^\infty}, \quad (\alpha)$$

οπότε η F είναι φραγμένη στο D.

Αντιστρόφως, επειδή $|B(z)| < 1$ για κάθε $z \in D$, έχουμε $|f(z)| < |F(z)| \leq \| F \|_{H^\infty}$ για κάθε $z \in D$. Άρα,

$$\| f \|_{H^\infty} \leq \| F \|_{H^\infty} . \quad (\beta)$$

Από τις (α), (β) συνεπάγεται ότι

$$\| F \|_{H^\infty} = \| f \|_{H^\infty} .$$

Κεφάλαιο 4

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Ορισμός 4.1 *Έστω X και Y δύο γραμμικοί χώροι επί του $\mathbf{C}$ και συνάρτηση $T : X \to Y$. Η T ονομάζεται* ***γραμμικός μετασχηματισμός*** *ή* ***γραμμικός τελεστής*** *αν:*
(1) $T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2$ *για κάθε* $x_1, x_2 \in X$.
(2) $T(\lambda x) = \lambda Tx$ *για κάθε* $x \in X$ *και* $\lambda \in \mathbf{C}$.

Αν ο T είναι γραμμικός τελεστής, τότε $T0 = T(0 + 0) = T0 + T0$, οπότε $T0 = 0$. Δηλαδή ο T απεικονίζει το μηδενικό στοιχείο του X στο μηδενικό στοιχείο του Y. Επίσης είναι προφανές ότι $T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2$, διότι $T(x_1 - x_2) + Tx_2 = T(x_1 - x_2 + x_2) = Tx_1$.

Ορισμός 4.2 *Έστω X, Y δύο γραμμικοί χώροι επί του $\mathbf{C}$ και γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Ορίζουμε:*

$$R(T) = \{\ Tx \mid x \in X\ \} \subseteq Y,$$

$$N(T) = \{\ x \in X \mid Tx = 0\ \} \subseteq X.$$

Το $R(T)$ είναι το σύνολο τιμών του T και το $N(T)$ ονομάζεται ***μηδενόχωρος του*** *T ή* ***πυρήνας του*** *T.*

Πρόταση 4.1 *Έστω X, Y γραμμικοί χώροι επί του $\mathbf{C}$ και γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Τότε το $R(T)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του Y και το $N(T)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X.*

Απόδειξη: (1) Έστω $y_1, y_2 \in R(T)$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in X$ ώστε $y_1 = Tx_1,\ y_2 = Tx_2$. Συνεπάγεται

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 Tx_1 + \lambda_2 Tx_2 = T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in R(T).$$

(2) Έστω $x_1, x_2 \in N(T)$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$. Τότε

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 Tx_1 + \lambda_2 Tx_2 = \lambda_1 0 + \lambda_2 0 = 0.$$

Άρα, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in N(T)$.

Πρόταση 4.2 *Έστω X, Y γραμμικοί χώροι επί του $\mathbf{C}$ και γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Τότε: ο T είναι ένα προς ένα αν και μόνο αν $N(T) = \{0\}$.*

Απόδειξη: Έστω ότι ο T είναι ένα προς ένα. Αν $x \in N(T)$, τότε $Tx = 0 = T0$, οπότε $x = 0$. Άρα, $N(T) \subseteq \{0\}$. Το ότι $\{0\} \subseteq N(T)$ είναι προφανές, οπότε $N(T) = \{0\}$. Αντιστρόφως, έστω $N(T) = \{0\}$. Αν $Tx_1 = Tx_2$, τότε $T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0$, οπότε $x_1 - x_2 \in N(T)$, οπότε $x_1 - x_2 = 0$, οπότε $x_1 = x_2$. Άρα, ο T είναι ένα προς ένα.

Πρόταση 4.3 *Έστω X, Y γραμμικοί χώροι επί του $\mathbf{C}$ και γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$.*
(1) Ο T είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $R(T) = Y$ και $N(T) = \{0\}$.
(2) Αν ο T είναι αντιστρέψιμος, τότε ο $T^{-1} : Y \to X$ είναι γραμμικός τελεστής.

Απόδειξη: (1) Προφανές, λόγω της Πρότασης 4.2.
(2) Έστω $y_1, y_2 \in Y$. Θέτουμε $x_1 = T^{-1}y_1, x_2 = T^{-1}y_2$, οπότε $y_1 = Tx_1, y_2 = Tx_2$. Τότε $y_1 + y_2 = Tx_1 + Tx_2 = T(x_1 + x_2)$, οπότε $T^{-1}(y_1 + y_2) = x_1 + x_2 = T^{-1}y_1 + T^{-1}y_2$.

Έστω $y \in Y$ και $\lambda \in \mathbf{C}$. Θέτουμε $x = T^{-1}y$, οπότε $y = Tx$. Τότε $\lambda y = \lambda Tx = T(\lambda x)$. Άρα, $T^{-1}(\lambda y) = \lambda x = \lambda T^{-1}y$. Άρα, ο T^{-1} είναι γραμμικός τελεστής.

Ορισμός 4.3 *Έστω X και Y δύο γραμμικοί χώροι επί του $\mathbf{C}$ με νόρμες $\| \cdot \|_X$ και $\| \cdot \|_Y$ αντίστοιχα. Έστω επίσης και γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$.*

*Ο T ονομάζεται **φραγμένος** αν υπάρχει αριθμός $c \geq 0$ ώστε*

$$\| Tx \|_Y \leq c \| x \|_X, \quad x \in X.$$

Πρόταση 4.4 *Έστω X και Y γραμμικοί χώροι επί του $\mathbf{C}$ με νόρμες $\| \cdot \|_X$ και $\| \cdot \|_Y$ και γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*
(1) Ο T είναι φραγμένος.
(2) Ο T είναι συνεχής σαν συνάρτηση από τον μετρικό χώρο X στον μετρικό χώρο Y.

Απόδειξη: (1) $\Rightarrow$ (2) Έστω ότι ο T είναι φραγμένος, οπότε υπάρχει $c \geq 0$ ώστε $\| Tx \|_Y \leq c \| x \|_X$ για κάθε $x \in X$. Παίρνουμε τυχαίο $x \in X$ και ακολουθία $\{x_n\}$ στον X με $x_n \to x$ στον X. Τότε,

$$\| Tx_n - Tx \|_Y = \| T(x_n - x) \|_Y \leq c \| x_n - x \|_X \to 0.$$

Άρα, $Tx_n \to Tx$ στον Y και επομένως ο T είναι συνεχής στο τυχαίο $x \in X$. Άρα, ο T είναι συνεχής.
(2) $\Rightarrow$ (1) Έστω ότι ο T είναι συνεχής. Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι ο T δεν είναι φραγμένος.

Συνεπάγεται ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει $x_n \in X$ ώστε $\| Tx_n \|_Y > n \| x_n \|_X$. Είναι προφανές ότι $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε ορίζουμε $z_n = \frac{1}{n\|x_n\|_X} x_n \in X$. Τότε

$$\| z_n \|_X = \frac{1}{n \| x_n \|_X} \| x_n \|_X = \frac{1}{n} \to 0$$

και επομένως, $z_n \to 0$ στον X. Όμως,

$$\| Tz_n \|_Y = \left\| \frac{1}{n \| x_n \|_X} Tx_n \right\|_Y = \frac{1}{n \| x_n \|_X} \| Tx_n \|_Y > 1.$$

Άρα, $Tz_n \not\to T0 = 0$ στον Y και αυτό αντιφάσκει με το ότι ο T είναι συνεχής στο 0 του X.

Πρόταση 4.5 *Έστω X, Y γραμμικοί χώροι επί του $\mathbf{C}$ με νόρμες $\| \cdot \|_X$ και $\| \cdot \|_Y$ και φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Τότε ο $N(T)$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X.*

Απόδειξη: Ο T είναι συνεχής συνάρτηση και το $N(T) = \{x \in X \,|\, Tx = 0\} = T^{-1}(\{0\})$ είναι η αντίστροφη εικόνα του κλειστού υποσυνόλου $\{0\}$ του Y. Άρα, το $N(T)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Πρόταση 4.6 *Έστω X, Y γραμμικοί χώροι επί του $\mathbf{C}$ με νόρμες $\| \cdot \|_X$ και $\| \cdot \|_Y$ και φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Τότε:*
(1)

$$\sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\| Tx \|_Y}{\| x \|_X} = \sup_{x \in X, \|x\|_X = 1} \| Tx \|_Y < +\infty.$$

(2) *Αν θέσουμε $\| T \| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$, τότε ο $\| T \|$ είναι ο ελάχιστος μη-αρνητικός αριθμός c για τον οποίο ισχύει η ανισότητα $\| Tx \|_Y \leq c \| x \|_X$ για κάθε $x \in X$.*

Απόδειξη: (1) Αφού ο T είναι φραγμένος, υπάρχει $c \geq 0$ ώστε $\| Tx \|_Y \leq c \| x \|_X$ για κάθε $x \in X$. Άρα, για κάθε $x \in X$ με $x \neq 0$ ισχύει $\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq c$ και επομένως, $\sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq c < +\infty$. Ομοίως, για κάθε $x \in X$ με $\| x \|_X = 1$ ισχύει $\| Tx \|_Y \leq c$, οπότε $\sup_{x \in X, \|x\|_X = 1} \| Tx \|_Y \leq c < +\infty$. Θέτουμε

$$c_1 = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\| Tx \|_Y}{\| x \|_X}$$

και

$$c_2 = \sup_{x \in X, \|x\|_X = 1} \| Tx \|_Y$$

και θα δείξουμε ότι $c_1 = c_2$.

Παίρνουμε τυχαίο $x \in X$ με $x \neq 0$. Τότε

$$\left\| \frac{x}{\| x \|_X} \right\|_X = \frac{1}{\| x \|_X} \| x \|_X = 1,$$

οπότε

$$\frac{\| Tx \|_Y}{\| x \|_X} = \left\| \frac{1}{\| x \|_X} Tx \right\|_Y = \left\| T\Big(\frac{x}{\| x \|_X} \Big) \right\|_Y \leq c_2.$$

Άρα,

$$c_1 = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\| Tx \|_Y}{\| x \|_X} \leq c_2.$$

Παίρνουμε τυχαίο $x \in X$ με $\| x \|_X = 1$. Τότε $x \neq 0$, οπότε

$$\| Tx \|_Y = \frac{\| Tx \|_Y}{\| x \|_X} \leq c_1.$$

Άρα,

$$c_2 = \sup_{x \in X, \|x\|_X = 1} \| Tx \|_Y \leq c_1.$$

(2) Για κάθε $x \in X$, $x \neq 0$ ισχύει $\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq \| T \|$, οπότε $\| Tx \|_Y \leq \| T \| \| x \|_X$. Η ανισότητα αυτή ισχύει προφανώς και για $x = 0$. Άρα, ο $\| T \|$ είναι ένας μη-αρνητικός αριθμός c για τον οποίο ισχύει η $\| Tx \|_Y \leq c \| x \|_X$ για κάθε $x \in X$. Αν πάρουμε τυχαίο $c \geq 0$ για το οποίο ισχύει $\| Tx \|_Y \leq c \| x \|_X$ για κάθε $x \in X$, τότε $\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq c$ για κάθε $x \in X$ με $x \neq 0$, οπότε

$$\| T \| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\| Tx \|_Y}{\| x \|_X} \leq c.$$

Ορισμός 4.4 *Έστω X, Y γραμμικοί χώροι επί του $\mathbf{C}$ με νόρμες $\| \cdot \|_X$ και $\| \cdot \|_Y$ και φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$. Τότε ο αριθμός $\| T \|$ που ορίστηκε στην Πρόταση 4.6 ονομάζεται* ***νόρμα του*** *T.*

Λήμμα 4.1 *Έστω X μετρικός χώρος με μετρική d, ανοικτό σύνολο $A \subseteq X$, $a \in A$ και θετικός αριθμός δ. Τότε υπάρχει θετικό $\varepsilon < \delta$ ώστε $\overline{D(a;\varepsilon)} \subseteq A$.*

Απόδειξη: Επειδή $a \in A$ και A είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon_1 > 0$ ώστε $D(a;\varepsilon_1) \subseteq A$. Παίρνουμε οποιοδήποτε θετικό $\varepsilon < \min(\varepsilon_1, \delta)$. Τότε αφ' ενός $\varepsilon < \delta$. Αφ' ετέρου, αν $x \in \overline{D(a;\varepsilon)}$, συνεπάγεται $d(x;a) \leq \varepsilon < \varepsilon_1$, οπότε $x \in D(a;\varepsilon_1)$, οπότε $x \in A$. Επομένως, $\overline{D(a;\varepsilon)} \subseteq A$.

Θεώρημα 4.1 ***(Baire)*** *Έστω X ένας πλήρης μετρικός χώρος με μετρική d. Αν τα $A_1, A_2, \ldots$ είναι υποσύνολα του X έτσι ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, τότε υπάρχει κάποιο n ώστε το σύνολο $\overline{A_n}$ να περιέχει τουλάχιστον μία ανοικτή μπάλα του X.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$ το $\overline{A_n}$ δεν περιέχει καμία ανοικτή μπάλα του X.

Παίρνουμε οποιοδήποτε $x_1 \in X$ και μπάλα $D(x_1; \varepsilon_1)$ με οποιοδήποτε θετικό $\varepsilon_1 < 1$. Λόγω της υπόθεσης ισχύει $D(x_1; \varepsilon_1) \not\subseteq \overline{A_1}$, οπότε υπάρχει $x_2 \in D(x_1; \varepsilon_1) \cap \overline{A}_1^c$. Το σύνολο $D(x_1; \varepsilon_1) \cap \overline{A}_1^c$ είναι ανοικτό, ως τομή δύο ανοικτών συνόλων, οπότε υπάρχει θετικό $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}$ ώστε

$$\overline{D(x_2; \varepsilon_2)} \subseteq D(x_1; \varepsilon_1) \cap \overline{A}_1^c.$$

Λόγω υπόθεσης ισχύει $D(x_2; \varepsilon_2) \not\subseteq \overline{A_2}$, οπότε υπάρχει $x_3 \in D(x_2; \varepsilon_2) \cap \overline{A}_2^c$. Το $D(x_2; \varepsilon_2) \cap \overline{A}_2^c$ είναι ανοικτό, οπότε υπάρχει θετικό $\varepsilon_3 < \frac{1}{3}$ ώστε

$$\overline{D(x_3; \varepsilon_3)} \subseteq D(x_2; \varepsilon_2) \cap \overline{A}_2^c.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε ακολουθίες $\{x_n\}$ στον X και $\{\varepsilon_n\}$ θετικών αριθμών ώστε για κάθε $n \in \mathbf{N}$ να ισχύουν:

(1)

$$\overline{D(x_{n+1}; \varepsilon_{n+1})} \subseteq D(x_n; \varepsilon_n) \cap \overline{A}_n^c,$$

(2)

$$\varepsilon_n < \frac{1}{n}.$$

Είναι προφανές ότι για κάθε $m, n \in \mathbf{N}$ με $m > n$ ισχύει:

$$D(x_m; \varepsilon_m) \subseteq D(x_{m-1}; \varepsilon_{m-1}) \subseteq \cdots \subseteq D(x_n; \varepsilon_n)$$

και επομένως $x_m \in D(x_n; \varepsilon_n)$. Άρα, λόγω της (2),

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon_n < \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{όταν} \quad n \to +\infty,$$

που σημαίνει ότι η $\{x_n\}$ είναι ακολουθία *Cauchy* στον X. Επειδή ο X είναι πλήρης συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο $x \in X$ ώστε $x_n \to x$.

Παίρνουμε τώρα τυχαίο $n \in \mathbf{N}$. Για κάθε $m > n + 1$ ισχύει:

$$x_m \in D(x_{n+1}; \varepsilon_{n+1}) \subseteq \overline{D(x_{n+1}; \varepsilon_{n+1})}.$$

Αφού το $\overline{D(x_{n+1}; \varepsilon_{n+1})}$ είναι κλειστό και $x_m \to x$, έχουμε $x \in \overline{D(x_{n+1}; \varepsilon_{n+1})}$. Άρα, λόγω της (1), συνεπάγεται $x \in \overline{A}_n^c$, οπότε $x \notin \overline{A_n}$ και επομένως $x \notin A_n$.

Αποδείξαμε ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ισχύει $x \notin A_n$ και αυτό αντιφάσκει με το ότι $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

Σε ένα γραμμικό χώρο X επί του $\mathbf{C}$, για τυχόντα $A, B \subseteq X$ και τυχόν $\lambda \in \mathbf{C}$ ορίζουμε:

$$\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\},$$

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Αν X, Y είναι γραμμικοί χώροι επί του $\mathbf{C}$ και $T : X \to Y$ είναι γραμμικός τελεστής, τότε είναι προφανές ότι:

$$T(A + B) = T(A) + T(B),$$

$$T(\lambda A) = \lambda T(A)$$

για κάθε $A, B \subseteq X$ και κάθε $\lambda \in \mathbf{C}$.

Αν X είναι γραμμικός χώρος επί του $\mathbf{C}$ με νόρμα $\| \cdot \|_X$ θα συμβολίζουμε

$$B(x; r) = \{z \in X \mid \ \| z - x \| < r\}.$$

Ειδικώτερα, συμβολίζουμε

$$B_X = B(0; 1)$$

τη μοναδιαία μπάλα του X με κέντρο 0 και ακτίνα 1. Είναι προφανές ότι

$$\lambda B(x; r) = B(\lambda x; |\lambda| r)$$

για κάθε $x \in X$, κάθε $r > 0$ και κάθε $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Ειδικώτερα,

$$\lambda B(0; r) = B(0; |\lambda| r)$$

για κάθε $r > 0$ και $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Πράγματι: $z \in \lambda B(x; r)$ ισοδυναμεί με $\frac{1}{\lambda} z \in B(x; r)$ ισοδυναμεί με $\| \frac{1}{\lambda} z - x \|_X < r$ ισοδυναμεί με $\| z - \lambda x \|_X < |\lambda| r$ ισοδυναμεί με $z \in B(\lambda x; |\lambda| r)$.

Επίσης ισχύει:

$$B(x_1; r_1) + B(x_2; r_2) = B(x_1 + x_2; r_1 + r_2)$$

για κάθε $x_1, x_2 \in X$ και $r_1, r_2 > 0$. Πράγματι, έστω $z_1 \in B(x_1; r_1)$ και $z_2 \in B(x_2; r_2)$. Τότε,

$$\| (z_1 + z_2) - (x_1 + x_2) \|_X \leq \| z_1 - x_1 \|_X + \| z_2 - x_2 \|_X < r_1 + r_2,$$

οπότε $z_1 + z_2 \in B(x_1 + x_2; r_1 + r_2)$. Άρα,

$$B(x_1; r_1) + B(x_2; r_2) \subseteq B(x_1 + x_2; r_1 + r_2).$$

Αντιστρόφως, έστω $z \in B(x_1 + x_2; r_1 + r_2)$. Θέτουμε $z_1 = x_1 + \frac{r_1}{r_1 + r_2}\big(z - (x_1 + x_2)\big)$ και $z_2 = x_2 + \frac{r_2}{r_1 + r_2}\big(z - (x_1 + x_2)\big)$, οπότε,

$$\| z_1 - x_1 \|_X = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \| z - (x_1 + x_2) \|_X < r_1$$

και ομοίως,

$$\| z_2 - x_2 \|_X = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \| z - (x_1 + x_2) \|_X < r_2.$$

Άρα, $z_1 \in B(x_1; r_1)$ και $z_2 \in B(x_2; r_2)$ και

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + \frac{r_1 + r_2}{r_1 + r_2}\big(z - (x_1 + x_2)\big) = z,$$

οπότε $z \in B(x_1; r_1) + B(x_2; r_2)$. Επομένως,

$$B(x_1 + x_2; r_1 + r_2) \subseteq B(x_1; r_1) + B(x_2; r_2).$$

Λήμμα 4.2 *Έστω X και Y δύο χώροι Banach επί του $\mathbf{C}$ και $T : X \to Y$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής, ο οποίος είναι επί του Y. Τότε υπάρχει $k > 0$ ώστε*

$$B_Y \subseteq kT\big(B_X\big) = T\big(kB_X\big).$$

Απόδειξη: (1) Είναι προφανές ότι $X = \bigcup_{k=1}^{+\infty} kB_X$. Επειδή ο T είναι επί του Y, ισχύει:

$$Y = T(X) = T\Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty} kB_X\Big) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} T\big(kB_X\big).$$

Ο Y είναι πλήρης μετρικός χώρος, οπότε από το θεώρημα του *Baire* συνεπάγεται ότι υπάρχει $k_0 \in \mathbf{N}$ ώστε το $\overline{T(k_0 B_X)}$ να περιέχει κάποια ανοικτή μπάλα. Δηλαδή, υπάρχουν $k_0 \in \mathbf{N}$, $y_0 \in Y$ και $r_0 > 0$ ώστε

$$B\big(y_0; r_0\big) \subseteq \overline{T\big(k_0 B_X\big)} = \overline{k_0 T\big(B_X\big)}. \quad (\alpha)$$

Ειδικώτερα, ισχύει:

$$y_0 \in \overline{T\big(k_0 B_X\big)} = \overline{k_0 T\big(B_X\big)}. \quad (\beta)$$

(2) Δεν είναι δύσκολο, με βάση τα (α) και (β), να δείξουμε ότι

$$rB_Y \subseteq \overline{T\Big(r\frac{2k_0}{r_0}B_X\Big)} = \overline{r\frac{2k_0}{r_0}T\big(B_X\big)} \quad (\gamma)$$

για κάθε $r > 0$. Πράγματι, για τυχόν $w \in rB_Y$ έχουμε ότι $\frac{1}{r}w \in B_Y$, οπότε $\| \, (\frac{r_0}{r}w + y_0) - y_0 \, \|_Y < r_0$, οπότε $\frac{r_0}{r}w + y_0 \in B(y_0; r_0)$. Από την (α) συνεπάγεται ότι υπάρχουν $y_n' \in T(k_0 B_X)$ ώστε $y_n' \to \frac{r_0}{r}w + y_0$ στον Y. Επίσης, από την (β) συνεπάγεται ότι υπάρχουν $y_n'' \in T(k_0 B_X)$ ώστε $y'' \to y_0$ στον Y. Θέτουμε $y_n = y_n' - y_n''$, οπότε:

$$y_n \in T\big(k_0 B_X\big) + T\big(k_0 B_X\big) = T\big(k_0 B_X + k_0 B_X\big) = T\big(2k_0 B_X\big)$$

και $y_n \to \frac{r_0}{r}w + y_0 - y_0 = \frac{r_0}{r}w$. Συνεπάγεται ότι $\frac{r}{r_0}y_n \to w$ και

$$\frac{r}{r_0}y_n \in \frac{r}{r_0}T\big(2k_0 B_X\big) = T\bigg(r\frac{2k_0}{r_0}B_X\bigg).$$

Άρα, $w \in \overline{T(r\frac{2k_0}{r_0}B_X)}$ και αποδείχθηκε η (γ).
(3) Θα δείξουμε τώρα ότι

$$B_Y \subseteq T\bigg(\frac{8k_0}{r_0}B_X\bigg)$$

και θα τελειώσει η απόδειξη με αυτό το αποτέλεσμα.

Παίρνουμε τυχόν $y \in B_Y$. Από την (γ) με $r = 1$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $x_1 \in \frac{2k_0}{r_0} B_X$ ώστε:

$$\| y - Tx_1 \|_Y < \frac{1}{2}.$$

Από την (γ) με $r = \frac{1}{2}$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $x_2 \in \frac{1}{2}\frac{2k_0}{r_0} B_X$ ώστε:

$$\| y - Tx_1 - Tx_2 \|_Y < \frac{1}{2^2}.$$

Από την (γ) με $r = \frac{1}{2^2}$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $x_3 \in \frac{1}{2^2}\frac{2k_0}{r_0} B_X$ ώστε:

$$\| y - Tx_1 - Tx_2 - Tx_3 \|_Y < \frac{1}{2^3}.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, βρίσκουμε ακολουθία $\{x_n\}$ στον X ώστε για κάθε $n \in \mathbf{N}$ να ισχύει

(i)

$$x_n \in \frac{1}{2^{n-1}}\frac{2k_0}{r_0} B_X,$$

(ii)

$$\| y - Tx_1 - \cdots - Tx_n \|_Y < \frac{1}{2^n}.$$

Η ακολουθία $\{s_n\}$, όπου $s_n = x_1 + \cdots + x_n$, είναι ακολουθία $Cauchy$. Πράγματι για κάθε $m, n \in \mathbf{N}$ με $n < m$ έχουμε

$$\begin{aligned} \| s_m - s_n \|_X = \| x_{n+1} + \cdots + x_m \|_X \leq \| x_{n+1} \|_X + \cdots + \| x_m \|_X \\ < \frac{2k_0}{r_0}\left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}}\right) < \frac{2k_0}{r_0}\frac{1}{2^{n-1}}, \end{aligned}$$

οπότε $\| s_m - s_n \|_X \to 0$ όταν $m, n \to +\infty$.

Επειδή ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος συνεπάγεται ότι υπάρχει $x \in X$ ώστε $s_n \to x$ στον X. Συνεπάγεται ότι $Ts_n \to Tx$ στον Y, αφού η $T : X \to Y$ είναι συνεχής. Από την (ii) συνεπάγεται ότι $\| y - Ts_n \|_Y < \frac{1}{2^n}$, οπότε $Ts_n \to y$ στον Y. Άρα,

$$y = Tx. \quad (\delta)$$

Επίσης, από την (i) συνεπάγεται ότι:

$$\| s_n \|_X \leq \| x_1 \|_X + \cdots + \| x_n \|_X < \frac{2k_0}{r_0}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < \frac{4k_0}{r_0}.$$

Παίρνοντας όριο, έχουμε:

$$\| x \|_X \leq \frac{4k_0}{r_0} < \frac{8k_0}{r_0}. \quad (\varepsilon)$$

Από τις (δ) και (ε) συνεπάγεται $x \in \frac{8k_0}{r_0} B_X$ και $y \in T\left(\frac{8k_0}{r_0} B_X\right)$. Άρα,

$$B_Y \subseteq T\left(\frac{8k_0}{r_0} B_X\right).$$

Θεώρημα 4.2 ***(Ανοικτής Απεικόνισης)*** *Έστω X και Y δύο χώροι Banach επί του $\mathbf{C}$ και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής, ο οποίος είναι ένα προς ένα και επί του Y. Τότε ο αντίστροφος γραμμικός τελεστής $T^{-1} : Y \to X$ είναι και αυτός φραγμένος.*

Απόδειξη: Από το Λήμμα 4.2 συνεπάγεται ότι υπάρχει $k > 0$ ώστε

$$B_Y \subseteq T\big(kB_X\big).$$

Παίρνουμε τυχαίο $y \in Y$, $y \neq 0$. Τότε $\frac{1}{2\|y\|_Y} y \in B_Y$, οπότε $T^{-1}\Big(\frac{1}{2\|y\|_Y} y\Big) \in kB_X$. Άρα,

$$\frac{1}{2 \parallel y \parallel_Y} T^{-1}(y) \in kB_X,$$

οπότε

$$\frac{1}{2 \parallel y \parallel_Y} \parallel T^{-1}(y) \parallel_X < k$$

οπότε

$$\parallel T^{-1}(y) \parallel_X < 2k \parallel y \parallel_Y .$$

Η ανισότητα αυτή ισχύει και για το $y = 0$, οπότε ο T^{-1} είναι φραγμένος.

Θεώρημα 4.3 *Έστω X και Y χώροι Banach επί του $\mathbf{C}$ και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής ο οποίος είναι επί του Y. Τότε υπάρχει κάποιο $M > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ ώστε*
(1) $Tx = y$ *και*
(2) $\parallel x \parallel_X \leq M \parallel y \parallel_Y$.

Απόδειξη: Έστω τυχόν $y \in Y$, $y \neq 0$. Τότε $\frac{y}{2\|y\|_Y} \in B_Y$. Από το Λήμμα 4.2 συνεπάγεται ότι υπάρχει $k > 0$ ώστε $B_Y \subseteq T(kB_X)$, οπότε $\frac{y}{2\|y\|_Y} \in T(kB_X)$. Επομένως, υπάρχει $x_1 \in B_X$ ώστε $T(kx_1) = \frac{y}{2\|y\|_Y}$.

Θέτουμε $x = 2k \parallel y \parallel_Y x_1$, οπότε

$$Tx = y.$$

Επίσης,

$$\parallel x \parallel_X = 2k \parallel y \parallel_Y \parallel x_1 \parallel_X \leq 2k \parallel y \parallel_Y .$$

Άρα παίρνοντας $M = 2k$ τα (1), (2) ισχύουν για κάθε $y \neq 0$. Είναι προφανές ότι αυτά ισχύουν και για $y = 0$, παίρνοντας $x = 0$.

Κεφάλαιο 5

Το Θεώρημα του Carleson

Θυμόμαστε ότι ο H^∞ είναι ο χώρος με στοιχεία όλες τις συναρτήσεις $f : D \to \mathbf{C}$ οι οποίες είναι αναλυτικές στον μοναδιαίο δίσκο $D = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| < 1\}$ και φραγμένες. Ο H^∞ είναι χώρος *Banach* με νόρμα

$$\| f \|_\infty = \sup_{z \in D} |f(z)|, \quad f \in H^\infty.$$

Θεωρούμε μιαν ακολουθία $\{a_n\}$ στον δίσκο D με διαφορετικούς όρους. Αν πάρουμε μια τυχαία $f \in H^\infty$, παρατηρούμε ότι η ακολουθία τιμών της f στα a_n, δηλαδή η $\{f(a_n)\}$, είναι στοιχείο του l^∞. Πράγματι,

$$|f(a_n)| \leq \| f \|_\infty, \quad n \in \mathbf{N}$$

και επομένως $\{f(a_n)\} \in l^\infty$ και μάλιστα

$$\| \{f(a_n)\} \|_\infty = \sup_{n \in \mathbf{N}} |f(a_n)| \leq \| f \|_\infty .$$

Δηλαδή, η νόρμα της $\{f(a_n)\}$ στον l^∞ είναι μικρότερη ή ίση από την νόρμα της f στον H^∞.

Ορισμός 5.1 *Η ακολουθία $\{a_n\}$ ονομάζεται **ακολουθία παρεμβολής για τον** H^∞ αν, αντιστρόφως, για κάθε $\{b_n\} \in l^\infty$ υπάρχει κάποια $f \in H^\infty$ ώστε $b_n = f(a_n)$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.*

Θεώρημα 5.1 ***(Carleson)*** *Η ακολουθία $\{a_n\}$ στον D είναι ακολουθία παρεμβολής για τον H^∞ αν και μόνο αν υπάρχει κάποιο $\delta > 0$, το οποίο εξαρτάται από την $\{a_n\}$, έτσι ώστε να ισχύει*

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{+\infty} \left| \frac{a_j - a_k}{1 - \overline{a_j} a_k} \right| \geq \delta, \quad k \in \mathbf{N}. \qquad (1)$$

Το απειρογινόμενο που εμφανίζεται στην (1) είναι το μέτρο του απειρογινομένου *Blaschke* με ρίζες τα a_j, $j \neq k$ για $z = a_k$. Άρα, η (1) συνεπάγεται τη συνθήκη *Blaschke*, $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{+\infty}(1-|a_j|) < +\infty$ και επομένως την

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(1-|a_j|) < +\infty.$$

Απόδειξη του αναγκαίου:

Έστω ότι η $\{a_n\}$ είναι ακολουθία παρεμβολής για τον H^∞. Σχηματίζουμε την απεικόνιση $T : H^\infty \to l^\infty$ με τύπο:

$$T(f) = \{f(a_n)\}, \quad f \in H^\infty.$$

Η απεικόνιση αυτή είναι γραμμική. Πράγματι για κάθε f, $g \in H^\infty$ και κάθε λ, $\mu \in \mathbf{C}$ ισχύει $T(\lambda f + \mu g) = \{(\lambda f + \mu g)(a_n)\} = \{\lambda f(a_n) + \mu g(a_n)\} = \lambda\{f(a_n)\} + \mu\{g(a_n)\} = \lambda T(f) + \mu T(g)$.

Το ότι η $\{a_n\}$ είναι ακολουθία παρεμβολής για τον H^∞ είναι ισοδύναμο με το ότι ο γραμμικός τελεστής T είναι επί του l^∞. Επίσης, ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, αφού

$$\| T(f) \|_\infty = \| \{f(a_n)\} \|_\infty \leq \| f \|_\infty .$$

Δηλαδή, η νόρμα του T είναι ≤ 1.

Από το Θεώρημα 4.3 έχουμε ότι υπάρχει κάποιο $M \geq 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\{b_n\} \in l^\infty$ υπάρχει $f \in H^\infty$ ώστε

(i) $T(f) = \{b_n\}$, δηλαδή $f(a_n) = b_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, και

(ii) $\| f \|_\infty \leq M \| \{b_n\} \|_\infty$.

Παίρνουμε τώρα συγκεκριμένες ακολουθίες $\{b_n\}$ στον l^∞. Για κάθε $k \in \mathbf{N}$ θεωρούμε την ακολουθία

$$\{\delta_{jk}\}_j \in l^\infty,$$

με τύπο

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad j = k, \\ 0, & \text{αν} \quad j \neq k. \end{cases}$$

Προφανώς ισχύει $\| \{\delta_{jk}\} \|_\infty = 1$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$, οπότε για κάθε $k \in \mathbf{N}$ υπάρχει $f_k \in H^\infty$ ώστε
(i) $f_k(a_j) = \delta_{jk}$ για κάθε $j \in \mathbf{N}$,
(ii) $\| f_k \|_\infty \leq M$.

Θεωρούμε για κάθε $k \in \mathbf{N}$ τη συνάρτηση

$$F_k(z) = \frac{f_k(z)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{+\infty} \left(-\frac{\overline{a_j}}{|a_j|}\right) \frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}}.$$

Τότε $\| F_k \|_\infty = \| f_k \|_\infty \leq M$, οπότε $|F_k(a_k)| \leq \| F_k \|_\infty \leq M$.
Άρα,

$$\frac{| \ f_k(a_k) \ |}{| \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{+\infty} \left(-\frac{\overline{a_j}}{|a_j|}\right) \frac{a_k-a_j}{1-\overline{a_j}a_k} \ |} \leq M,$$

οπότε,

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{+\infty} \left| \frac{a_k - a_j}{1-\overline{a_j}a_k} \right| \geq \frac{1}{M}$$

και παίρνουμε $\delta = \frac{1}{M}$.

Για την απόδειξη του ικανού θα χρειαστούμε τα παρακάτω:

Ορισμός 5.2 *Θα λέμε ότι η ακολουθία $\{a_j\}$ είναι* ***διαχωρισμένη*** *αν υπάρχει αριθμός $c > 0$ ώστε*

$$\left| \frac{a_j - a_k}{1-\overline{a_j}a_k} \right| \geq c > 0, \quad j \neq k.$$

Λήμμα 5.1 *Η ακολουθία $\{a_j\}$ ικανοποιεί τη σχέση (1) αν και μόνο αν είναι διαχωρισμένη και υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε k*

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\left(1-|a_j|^2\right)\left(1-|a_k|^2\right)}{|1-\overline{a_j}a_k|^2} \leq C. \quad (2)$$

Απόδειξη: Αν $0 < c \leq x \leq 1$, συνεπάγεται ότι

$$1 - x \leq -\log x \leq \frac{1}{c}(1-x).$$

Έστω A_{jk} οι όροι του αθροίσματος στη σχέση (2). Τότε

$$1 - A_{jk} = \frac{|a_j - a_k|^2}{|1-\overline{a_j}a_k|^2}.$$

Έστω ότι η $\{a_j\}$ ικανοποιεί την (1). Τότε για κάθε $j \neq k$ ισχύει $\left| \frac{a_j-a_k}{1-\overline{a_j}a_k} \right| \geq \delta$, οπότε η $\{a_j\}$ είναι διαχωρισμένη.

Επίσης,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} A_{jk} = 1 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{+\infty} A_{jk} \leq 1 - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{+\infty} \log\left(1 - A_{jk}\right) =$$

$$= 1 - 2\log\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{+\infty} \left| \frac{a_j - a_k}{1 - \overline{a_j} a_k} \right|\right) \leq 1 - 2\log\delta,$$

οπότε ισχύει η (2) με $C = C_\delta = 1 - 2\log\delta$.

Έστω ότι ισχύει η (2) και η $\left| \frac{a_j - a_k}{1 - \overline{a_j} a_k} \right| \geq c,\ j \neq k$. Συνεπάγεται $0 < c^2 \leq 1 - A_{jk} \leq 1$, οπότε

$$-2\log\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{+\infty} \left| \frac{a_j - a_k}{1 - \overline{a_j} a_k} \right| = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{+\infty} \log\big(1 - A_{jk}\big) \leq \frac{1}{c^2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{+\infty} A_{jk} \leq \frac{1}{c^2}\big(C - 1\big).$$

Άρα,

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{+\infty} \left| \frac{a_j - a_k}{1 - \overline{a_j} a_k} \right| \geq \exp\Big(-\frac{1}{2c^2}\big(C - 1\big)\Big) > 0,$$

οπότε η $\{a_j\}$ ικανοποιεί την (1) με $\delta = \exp\big(-\frac{1}{2c^2}(C-1)\big)$.

Απόδειξη του ικανού:

Έστω $\{b_k\} \in l^\infty$. Αρκεί να βρούμε $G_k \in H^\infty$ τέτοιες ώστε η $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k G_k$ να συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του D και ώστε

$$G_k(a_j) = \delta_{jk}, \quad j \in \mathbf{N}, \quad (3)$$

και

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |G_k(z)| \leq C, \quad z \in D, \quad (4)$$

διότι τότε η $f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k G_k(z)$ λύνει το πρόβλημα. Πράγματι, η f είναι αναλυτική στο D διότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k G_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του D. Ακόμη έχουμε:

$$f(a_j) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k G_k\big(a_j\big) = b_j, \quad j \in \mathbf{N},$$

και

$$|f(z)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |b_k| |G_k\big(z\big)| \leq \| \{b_k\} \|_\infty C, \quad z \in D.$$

Επομένως η f είναι φραγμένη και

$$\| f \|_\infty \leq C \| \{b_k\} \|_\infty .$$

Μία πρώτη δοκιμή για την εύρεση της G_k είναι η εξής.
Θεωρούμε το γινόμενο *Blaschke*

$$B_k(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{+\infty} -\frac{\overline{a_j}}{|a_j|}\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}$$

το οποίο συγκλίνει διότι η $\{a_j\}$ ικανοποιεί τη συνθήκη $\sum_{j=1}^{+\infty}(1-|a_j|) < +\infty$.
Ορίζουμε

$$G_k(z) = \frac{B_k(z)}{B_k(a_k)} = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{+\infty}\Big(\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z} \Big/ \frac{a_k-a_j}{1-\overline{a_j}a_k}\Big), \quad z\in D.$$

Η $G_k(z)$ ικανοποιεί την (3), όμως δεν ικανοποιεί τη σχέση (4).

Μετασχηματίζουμε τη $G_k(z)$ ως εξής. Ορίζουμε

$$G_k(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{+\infty}\Big(\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z} \Big/ \frac{a_k-a_j}{1-\overline{a_j}a_k}\Big)\Big(\frac{1-|a_k|^2}{1-\overline{a_k}z}\Big)^2 W(a_k,z), \quad (5)$$

όπου η $W(\zeta,z)$ θα επιλεχθεί παρακάτω ώστε να είναι αναλυτική ως προς $z\in D$ και $W(\zeta,\zeta)=1$. Τότε η $G_k(z)$ ικανοποιεί πάλι την (3) και θα δείξουμε ότι η W μπορεί να επιλεχθεί έτσι ώστε να ικανοποιείται η (4) και να συγκλίνει η $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k G_k$ σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του D.

Αριθμούμε την $\{a_j\}$ κατά αύξουσα απόλυτη τιμή:

$$0 \le |a_1| \le \cdots \le |a_j| \le |a_{j+1}| \le \cdots$$

και ορίζουμε

$$\psi(\zeta,z) = \sum_{|a_j|\ge|\zeta|}\Big(\frac{1+\overline{a_j}z}{1-\overline{a_j}z} - \frac{1+\overline{a_j}\zeta}{1-\overline{a_j}\zeta}\Big)\big(1-|a_j|^2\big), \quad \zeta,z\in D.$$

Αν $|z|\le r<1$ έχουμε:

$$\Big|\frac{1+\overline{a_j}z}{1-\overline{a_j}z}\Big|\big(1-|a_j|^2\big) \le \frac{1+|a_j||z|}{1-|a_j||z|}\big(1-|a_j|^2\big) \le \frac{4}{1-r}\big(1-|a_j|\big).$$

Επειδή $\sum_{j=1}^{+\infty}(1-|a_j|) < +\infty$, από το Κριτήριο του *Weirstrass* συνεπάγεται ότι η σειρά που ορίζει την $\psi(\zeta,z)$, συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε δίσκο κέντρου 0 και ακτίνας $r<1$. Άρα η $\psi(\zeta,z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση του z στον D. Επίσης, $\psi(\zeta,\zeta)=0$.

Παίρνουμε το πραγματικό μέρος της $\psi(\zeta,z)$:

$$\Re\psi(\zeta,z) = \sum_{|a_j|\ge|\zeta|}\Big(\frac{1-|a_j|^2|z|^2}{|1-\overline{a_j}z|^2} - \frac{1-|a_j|^2|\zeta|^2}{|1-\overline{a_j}\zeta|^2}\Big)\big(1-|a_j|^2\big).$$

Παρατηρούμε ότι, αν $|a_j| \geq |\zeta|$, τότε

$$1-|a_j|^2|\zeta|^2 \leq 1-|\zeta|^4 = \big(1+|\zeta|^2\big)\big(1-|\zeta|^2\big) \leq 2\big(1-|\zeta|^2\big).$$

Θέτουμε τώρα

$$W\big(\zeta,z\big) = \exp\Big(-\psi\big(\zeta,z\big)\Big), \quad z \in D$$

οπότε η W είναι αναλυτική συνάρτηση του z, ως σύνθεση αναλυτικών συναρτήσεων, και $W(\zeta,\zeta)=1$.
Τώρα,

$$|W(a_k,z)| = \exp\big(-\Re\psi(a_k,z)\big) =$$

$$= \exp\Bigg(-\sum_{|a_j|\geq|a_k|}\Big(\frac{1-|a_j|^2|z|^2}{|1-\overline{a_j}z|^2} - \frac{1-|a_j|^2|a_k|^2}{|1-\overline{a_j}a_k|^2}\Big)\big(1-|a_j|^2\big)\Bigg) =$$

$$= \exp\Bigg(-\sum_{|a_j|\geq|a_k|}\frac{\big(1-|a_j|^2|z|^2\big)\big(1-|a_j|^2\big)}{|1-\overline{a_j}z|^2}\Bigg)\cdot$$

$$\cdot\exp\Bigg(\sum_{|a_j|\geq|a_k|}\frac{\big(1-|a_j|^2|a_k|^2\big)\big(1-|a_j|^2\big)}{|1-\overline{a_j}a_k|^2}\Bigg).$$

Ισχύει $1-|a_j|^2|a_k|^2 \leq 2(1-|a_k|^2)$, αφού $|a_j| \geq |a_k|$, οπότε από την (2) έχουμε

$$\sum_{|a_j|\geq|a_k|}\frac{\big(1-|a_j|^2|a_k|^2\big)\big(1-|a_j|^2\big)}{|1-\overline{a_j}a_k|^2} \leq \sum_{|a_j|\geq|a_k|}\frac{2\big(1-|a_k|^2\big)\big(1-|a_j|^2\big)}{|1-\overline{a_j}a_k|^2} \leq 2C_\delta.$$

Άρα,

$$\exp\sum_{|a_j|\geq|a_k|}\frac{\big(1-|a_j|^2|a_k|^2\big)\big(1-|a_j|^2\big)}{|1-\overline{a_j}a_k|^2} \leq \exp 2C_\delta$$

και παίρνουμε

$$|W(a_k,z)| \leq \exp 2C_\delta \exp\Bigg(-\sum_{|a_j|\geq|a_k|}\frac{\big(1-|a_j|^2|z|^2\big)\big(1-|a_j|^2\big)}{|1-\overline{a_j}z|^2}\Bigg). \quad (6)$$

Επίσης, $W(a_k,a_k)=1$.
Από τις (1), (5) και (6) παίρνουμε

$$|G_k(z)| = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{+\infty}\Bigg(\Big|\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}\Big| \Big/ \Big|\frac{a_k-a_j}{1-\overline{a_j}a_k}\Big|\Bigg)\Big(\frac{1-|a_k|^2}{1-\overline{a_k}z}\Big)^2|W(a_k,z)| =$$

$$= \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{+\infty}\Big|\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}\Big|\frac{1}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{+\infty}\Big|\frac{a_j-a_k}{1-\overline{a_j}a_k}\Big|}\Big(\frac{1-|a_k|^2}{1-\overline{a_k}z}\Big)^2|W(a_k,z)|$$

$$\leq \frac{1}{\delta} c_k(z) \exp 2C_\delta \exp\Big(- \sum_{|a_j| \geq |a_k|} \frac{\big(1-|a_j|^2|z|^2\big)\big(1-|a_j|^2\big)}{|1-\overline{a_j}z|^2} \Big), \quad (7)$$

όπου

$$c_k(z) = \frac{\big(1-|a_k|^2\big)^2}{|1-\overline{a_k}z|^2}.$$

Ισχύει ότι

$$\sum_{j=1}^{+\infty} c_j(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\big(1-|a_j|^2\big)^2}{|1-\overline{a_j}z|^2} \leq \frac{1}{\big(1-|z|\big)^2} \sum_{j=1}^{+\infty} \big(1-|a_j|^2\big)^2$$

$$\leq \frac{1}{\big(1-|z|\big)^2} \sum_{j=1}^{+\infty} \big(1-|a_j|^2\big) \leq \frac{2}{\big(1-|z|\big)^2} \sum_{j=1}^{+\infty} \big(1-|a_j|\big) < +\infty.$$

Άρα, η σειρά $\sum_{j=1}^{+\infty} c_j(z)$ συγκλίνει και επομένως

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{j=k}^{+\infty} c_j(z) = 0.$$

Ισχύει

$$\exp\Big(- \sum_{|a_j| \geq |a_k|} \frac{\big(1-|a_j|^2|z|^2\big)\big(1-|a_j|^2\big)}{|1-\overline{a_j}z|^2} \Big) \leq \exp\Big(- \sum_{|a_j| \geq |a_k|} \frac{\big(1-|a_j|^2\big)^2}{|1-\overline{a_j}z|^2} \Big)$$

$$\leq \exp\Big(- \sum_{j=k}^{+\infty} c_j(z) \Big).$$

Με βάση την ανισότητα αυτή μετασχηματίζουμε την (7):

$$|G_k(z)| \leq \frac{\exp 2C_\delta}{\delta} c_k(z) \exp\Big(- \sum_{j=k}^{+\infty} c_j(z) \Big). \quad (8)$$

Αν $c_1, c_2, \cdots$ είναι οποιοιδήποτε θετικοί αριθμοί με $\sum_{j=1}^{+\infty} c_j < +\infty$, τότε

$$\int_{\sum_{j=k+1}^{+\infty} c_j}^{\sum_{j=k}^{\infty} c_j} \exp(-t)dt \geq \int_{\sum_{j=k+1}^{+\infty} c_j}^{\sum_{j=k}^{+\infty} c_j} \exp\Big(- \sum_{j=k}^{+\infty} c_j \Big) dt,$$

επειδή η $\exp(-t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση και έχουμε

$$\int_{\sum_{j=k+1}^{+\infty} c_j}^{\sum_{j=k}^{+\infty} c_j} \exp(-t)dt \geq \exp\Big(- \sum_{j=k}^{+\infty} c_j \Big) \Big(\sum_{j=k}^{+\infty} c_j - \sum_{j=k+1}^{+\infty} c_j \Big) = c_k \exp\Big(- \sum_{j=k}^{+\infty} c_j \Big).$$

Αθροίζοντας την (8) ως προς k, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}|G_k(z)| &\le \frac{\exp 2C_\delta}{\delta}\sum_{k=1}^{+\infty}c_k(z)\exp\Big(-\sum_{j=k}^{+\infty}c_j(z)\Big)\\ &\le \frac{\exp 2C_\delta}{\delta}\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{\sum_{j=k+1}^{+\infty}c_j(z)}^{\sum_{j=k}^{+\infty}c_j(z)}\exp(-t)dt\\ &= \frac{\exp 2C_\delta}{\delta}\int_0^{\sum_{j=1}^{+\infty}c_j(z)}\exp(-t)dt\\ &\le \frac{\exp 2C_\delta}{\delta}\int_0^{+\infty}\exp\big(-t\big)dt = \frac{\exp 2C_\delta}{\delta}.\end{aligned}$$

Άρα, ικανοποιείται και η (4) με $C = \frac{\exp 2C_\delta}{\delta}$.

Απομένει να αποδειχθεί η ομοιόμορφη σύγκλιση της $\sum_{k=1}^{+\infty}b_kG_k$ στα συμπαγή υποσύνολα του D.

Παίρνουμε $r<1$. Για $|z|\le r$ η σχέση (7) γίνεται:

$$|G_k(z)| \le \frac{4\exp 2C_\delta}{\delta\big(1-|z|\big)^2}c_k\exp\Big(-\sum_{|a_j|\ge|a_k|}\frac{(1-|a_j|^2|z|^2)(1-|a_j|^2)}{|1-\overline{a_j}z|^2}\Big),$$

όπου $c_k = \big(1-|a_k|\big)^2$.
Ισχύει

$$\exp\Big(-\sum_{|a_j|\ge|a_k|}\frac{\big(1-|a_j|^2|z|^2\big)\big(1-|a_j|^2\big)}{|1-\overline{a_j}z|^2}\Big)\le \exp\Big(-\sum_{|a_j|\ge|a_k|}\frac{\big(1-|a_j|^2\big)^2}{\big(1+|a_j|\big)^2}\Big) =$$

$$= \exp\Big(-\sum_{|a_j|\ge|a_k|}\big(1-|a_j|\big)^2\Big)$$

$$\le \exp\Big(-\sum_{j=k}^{+\infty}c_j\Big).$$

Άρα για $|z|\le r$ έχουμε

$$|b_kG_k(z)| \le \frac{4\exp 2C_\delta}{\delta\big(1-r\big)^2}|b_k|c_k\exp\Big(-\sum_{j=k}^{+\infty}c_j\Big).$$

Είναι προφανές ότι $\sum_{j=1}^{+\infty}c_j = \sum_{j=1}^{+\infty}(1-|a_j|^2) \le \sum_{j=1}^{+\infty}(1-|a_j|) < +\infty$, οπότε

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{j=k}^{+\infty}c_j = 0.$$

Τώρα,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4\exp 2C_\delta}{\delta\big(1-r\big)^2}|b_k|c_k\exp\Big(-\sum_{j=k}^{\infty}c_j\Big)\leq\frac{4\exp 2C_\delta}{\delta\big(1-r\big)^2}\parallel\{b_k\}\parallel_\infty\sum_{k=1}^{+\infty}c_k\exp\Big(-\sum_{j=k}^{+\infty}c_j\Big)$$

$$\leq\frac{4\exp 2C_\delta}{\delta\big(1-r\big)^2}\parallel\{b_k\}\parallel_\infty\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{\sum_{j=k+1}^{+\infty}c_j}^{\sum_{j=k}^{+\infty}c_j}\exp\big(-t\big)dt$$

$$=\frac{4\exp 2C_\delta}{\delta\big(1-r\big)^2}\parallel\{b_k\}\parallel_\infty\int_0^{\sum_{j=1}^{+\infty}c_j}\exp\big(-t\big)dt$$

$$\leq\frac{4\exp 2C_\delta}{\delta\big(1-r\big)^2}\parallel\{b_k\}\parallel_\infty<+\infty.$$

Από το Κριτήριο του $Weierstrass$, για κάθε $r<1$ η $\sum_{k=1}^{+\infty}b_kG_k(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $|z|\leq r$. Άρα, η f είναι αναλυτική στον D.