Η ΑΣΥΝΕΧΗΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ GALERKIN

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΑΛΑΝΔΡΑΚΗ ΓΑΡΥΦΑΛΙΑ

Επιβλέπων καθηγητής : Μακριδάκης Χαράλαμπος

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι μέθοδοι του Galerkin χρησιμοποιούνται πλέον σε πολλούς τομείς των μαθηματικών,εδώ θα μελετήσουμε τη διακριτοποίηση προβλημάτων αρχικών τιμών.Οι μέθοδοι χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, την ασυνεχή και την συνεχή μέθοδο.Εδώ θα αναλύσουμε ξεχωριστά και τις δύο μεθόδους . Οι μέθοδοι του Galerkin είναι μονοβηματικής φύσης και δίνουν προσεγγίσεις της λύσης σε όλο το διάστημα στο οποίο αυτή ορίζεται, σε αντίθεση με άλλες μεθόδους,όπως αυτές των Runge-Kutta και τις πολυβηματικές μεθόδους , οι οποίες δίνουν προσεγγίσεις στους κόμβους ενός διαμερισμού.Επιπλέον ένα σημαντικό πλεονέκτημα των μεθόδων του Galerkin είναι ότι μπορούμε να μελετήσουμε τις ιδιότητες τους χρησιμοποιώντας τεχνικές που εφαρμόζονται σε μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων.Αρκεί να γίνει κατάλληλη τροποποίηση και επέκταση των τεχνικών αυτών οπότε η μελέτη της μεθόδου γίνεται ευκολότερη και πιο συστηματική.Γι’αυτό το λόγο οι συγκεκριμένοι μέθοδοι ειναι τόσο διαδεδομένοι και εύχρηστοι καθώς ακόμα και όταν εφαρμόζονται σε δύσκολα προβλήματα διευκολύνουν την ανάλυση και την μελέτη της μεθόδου.

Στα κεφάλαια που ακολουθούν θα αναλύσουμε τις μεθόδους του Galerkin και θα εκτιμήσουμε το σφάλμα στο κεφάλαιο ένα ,θα αποδείξουμε συνέπεια της μεθόδου στο κεφάλαιο δύο,στο κεφάλαιο τρία αποδεικνύουμε ευστάθεια και τέλος στο κεφάλαιο τέσσερα και πέντε θα αποδείξουμε σύγκλιση της μεθόδου και την ύπαρξη των προσεγγιστικών λύσεων που μας δίνει η μέθοδος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η ΑΣΥΝΕΧΗΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ GALERKIN

1.1 ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ

Θα περιγράψουμε τις μεθόδους του Galerkin για προβλήματα αρχικών τιμών της μορφής

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \quad t \in [a,b], \\ \qquad y(a) = y_o \ , \end{cases}$$

όπου $f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεδομένη ομαλή συνάρτηση , $y_0 \in \mathbb{R}$ και $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ η ζητούμενη λύση.

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h \coloneqq (b-a)/N$ και $t^n \coloneqq a + nh$, $n = 0, \dots, N$ ο ομοιόρφος διαμερισμός του διαστήματος $[a,b]$ με βήμα h. Θέτουμε $I_n \coloneqq (t^n, t^{n+1}]$, $n = 0, \dots, N-1$ και περιοριζόμαστε στην περίπτωση ομοιόρφου διαμερισμού , αφού μπορεί να γενικευτεί και στην περίπτωση του μη ομοιόμορφου, λόγω της μονοβηματικής φύσεως της μεθόδου.

Ψάχνουμε προσέγγιση Υ της λύσης y του Π.Α.Τ.

Ζητείται Υ $\in S_h$ όπου με S_h συμβολίζουμε το σύνολο των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $[a,b]$, οι οποίες είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ $q-1$ σε κάθε υποδιάστημα $I_n = (t^n, t^{n+1}]$.

Δηλαδή

$$S_h = \{\, u: [a,b] \to \mathbb{R} \ / \ (u|_{I_n})(t) = \textstyle\sum_{i=0}^{q-1} a_i t^i \ , \ a_i \in \mathbb{R} \,\} \ .$$

Η προσέγγιση Υ πρέπει να ικανοποιεί τα εξής:

$Y(a) = y_0$ και

(G.1) $\int_{I_n} Y'(t)\chi(t)dt + (Y^{n+} - Y^n)\chi^{n+} = \int_{I_n} f\big(t, Y(t)\big)\chi(t)dt \quad \forall \chi \in \mathbb{P}_{q-1}(I_n)$,

για $n = 0,1,\dots,N$.

Τα στοιχεία του S_h μπορεί να είναι ασυνεχή στα σημεία t^0,…,t^{N-1} γι'αυτο συμβολίζουμε v^{n+}=$\lim_{t\to t^n} v(t)$ και v^n =$v(t^n)$ για $v \in S_h$.

<u>Θα εξηγήσουμε πως καταλήγουμε στον παραπάνω τύπο</u> :

Εστω οτι η προσέγγιση Y∈ $\mathbb{P}_{q-1}(I_n)$ ικανοποιεί το Π.Α.Τ δηλαδή

$$Y'(t) = f(t, Y(t)) \quad \text{ισοδύναμα}$$

$$\int_{I_n} Y'(t)\chi(t)dt=\int_{I_n} f\big(t, Y(t)\big)\chi(t)dt \quad \forall\, \chi \in \mathbb{P}_{q-1}(I_n).$$

Ολοκληρώνουμε το αριστερό μέρος κατα μέλη και έχουμε

$$\int_{I_n} Y'(t)\chi(t)dt = -\int_{I_n} Y(t)\chi'(t)dt + Y^{n+1}\chi^{n+1} - Y^{n+}\chi^{n+} .$$

Έχοντας υποθέσει οτι έχουμε ηδη προσδιορίσει την Y στο $[a, t^n]$, αντικαθιστούμε την τιμή Y^{n+}με την προσέγγιση Y^n και έχουμε

$$-\int_{I_n} Y(t)\chi'(t) + Y^{n+1}\chi^{n+1} - Y^n\chi^{n+} = \int_{I_n} f\big(t, Y(t)\big)\chi(t)dt =$$

$$\int_{I_n} Y'(t)\chi(t)dt - Y^{n+1}\chi^{n+1} + Y^{n+}\chi^{n+} + Y^{n+1}\chi^{n+1} - Y^n\chi^{n+}$$

η οποία οδηγεί στην (G.1).

<u>Παράδειγμα</u>

Θεωρούμε την απλούστερη περίπτωση της ασυνεχούς μεθόδου του Galerkin , όταν η προσέγγιση γίνεται με κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις , δηλαδή για $q = 1$. Σ'αυτή την περίπτωση η προσέγγιση Y λαμβάνει την ίδια τιμή σε κάθε σημείο του I_n , συνεπώς ισχύει

$$Y(t) = Y^{n+1}\,,\ t \in I_n\,.$$

Επίσης ,προφανώς, $Y^{n+} = Y^{n+1}$.

Αρα η μέθοδος γράφεται στην μορφή

$$(Y^{n+1} - Y^n)\chi^{n+1} = \int_{I_n} f(t, Y^{n+1})\chi(t)dt \quad \forall \chi \in \mathbb{P}_0(I_n)\,,$$

και επομένως, αφού οι συναρτήσεις χ είναι κατά τμήματα σταθερές,

$$Y^{n+1} - Y^n = \int_{I_n} f(t, Y^{n+1})dt\,, \qquad n = 0, \dots, N-1\,.$$

Στην περίπτωση γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $y'(t) = a(t)y(t) + f(t)$, η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής :

$$Y^{n+1} - Y^n = \int_{I_n} a(t)dt\, Y^{n+1} + \int_{I_n} f(t)dt\,, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

1.2 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Για την εκτίμηση του σφάλματος $e = y - Y$ θα εισάγουμε μια προβολή $\tilde{y}$ της ακριβούς λύσης y στο S_h διότι η y δεν ανήκει σ΄αυτο. Ετσι θέτοντας ρ= $y - \tilde{y}$ και θ= $\tilde{y}$ −Y το σφάλμα γράφεται στην μορφή $e = \rho + \theta$.

Στον ορισμό της προβολή $\tilde{y} \in S_h$ επιβάλουμε τις ακόλουθες ιδιότητες:

$\tilde{y}^0 = \tilde{y}(a) = y_0$,

$\tilde{y}^{n+1} = y^{n+1}$,

$\int_{I_n} (y - \tilde{y}\ )(t)u(t)dt = 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{P}_{q-2}(I_n)\,,\ n = 0, \dots, N-1$.

<u>Θα αποδείξουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα της $\tilde{y}$</u> :

Με βάση τις παραπάνω ιδιότητες θα δείξουμε οτι η $\tilde{y}$ είναι καλώς ορισμένη στο I_n . Θέτω

$$\tilde{y}(t) = y^{n+1} + \sum_{i=1}^{q-1} a_i (t - t^{n+1})^i \ \ , t \in I_n \ .$$

Έτσι ,

$$\tilde{y}^{n+1} = \tilde{y}(t^{n+1}) = y^{n+1} + \sum_{i=1}^{q-1} a_i (t^{n+1} - t^{n+1}) \ = y^{n+1}.$$

Απο τις σχέσεις

$$\begin{cases} \tilde{y}(t) = y^{n+1} \ + \displaystyle\sum_{i=1}^{q-1} a_i (t - t^{n+1})^i \\ \displaystyle\int_{I_n} (y - \tilde{y}\ )(t)u_i(t)dt = 0 \quad , u_i := (t - t^{n+1})^{i-1}\,, i = 1, \dots, q-1 \end{cases}$$

προκύπτει ενα σύστημα $q - 1$ έξισώσεων με αγνώστους τα a_1,..., a_{q-1} οπότε για να έχει μοναδίκη λύση αρκεί το ομογενές να έχει μόνο την τετριμμένη.

Επιλέγω y^{n+1} =0 και έχω

$\tilde{y}$ (t)= $\sum_{i=1}^{q-1} a_i(t-t^{n+1})^i = (t-t^{n+1})u(t)$, $u(t) = \sum_{i=1}^{q-1} a_i(t-t^{n+1})^{i-1}$

όπου $u \in \mathbb{P}_{q-2}(I_n)$ και $t \in I_n$.

Αρα

$$\int_{I_n}(t-t^{n+1})(t)[u(t)]^2 dt = 0$$

συνεπώς $u = 0$ δηλαδή $a_1,\dots,a_{q-1} = 0$.

Δηλαδη αποδείξαμε οτι υπάρχει ακριβώς ενα στοιχείο του S_h με τις επιθυμητές ιδιότητες.

Για την εκτίμηση του $\rho = y - \tilde{y}$ θα διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

- Για $q = 1$,δηλαδή για κατά τμήματα σταθερά πολυώνυμα ισχύει :

  $\tilde{y}(t) = y^{\,n+1} \quad \forall t \in \mathrm{I_n}$

  οπότε έχουμε :

  $$\rho(t) = y(t) - y^{n+1} = y(t) - y(t^{n+1}) = -\int_t^{t^{n+1}} y'(s)ds$$

  απο Cauchy-Schwarz

  $$|\rho(t)|^2 \leq (\int_{t^n}^{t^{n+1}} |y'(s)|ds)^2 \leq (t^{n+1} - t^n) \int_{t^n}^{t^{n+1}} |y'(s)|^2\, ds$$

  δηλαδή,

  $$sup_{t\in In}|\rho(t)|^2 \leq h\int_{t^n}^{t^{n+1}} |y'(s)|^2\, ds\ .$$

Άρα τελικά έχουμε

$$sup_{t\in In}|\rho(t)| \leq h sup_{t\in In}|y'(t)|.$$

- Για q≥ 2 , δηλαδή στην γενική περίπτωση, θα εφαρμόσουμε το παρακάτω λήμμα για την εκτίμηση του σφάλματος ρ .

<u>Λήμμα</u> : Έστω $I_n = (t^n, t^{n+1}]$ ένα φραγμένο διάστημα μήκους h , $q \in \mathbb{N}$, $y \in C^q[t^n, t^{n+1}]$ και $\tilde{y} \in \mathbb{P}_{q-1}(I_n)$ η προβολή όπως την ορίσαμε παραπάνω.Τότε υπάρχει μία σταθερα C τέτοια ώστε για το σφάλμα ρ να ισχύει

$$sup_{t\in I_n}|\rho(t)|^2 \leq Ch^{2q-1}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\left|y^{(q)}(s)\right|^2 ds \quad \text{ή ισοδύναμα}$$

$$sup_{t\in I_n}|\rho(t)| \leq \sqrt{C}h^q sup_{t\in I_n}\left|y^{(q)}(t)\right|$$

<u>Απόδειξη λήμματος</u> :

Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $y \to \tilde{y}$ η οποία αφήνει τα στοιχεία του $\mathbb{P}_{q-1}(I_n)$ αναλλοίωτα,αφού η $\tilde{y}$ είναι καλώς ορισμένη , και είναι ευσταθής.Θεωρούμε μια συνάρτηση $u \in C[0,1]$ και ζητείται $\tilde{u} \in \mathbb{P}_{q-1}$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \tilde{u}(1) = u(1) \\ \int_0^1 (u-\tilde{u})(t)\hat{u}(t)\,dt = 0 \ \ \forall \hat{u} \in \mathbb{P}_{q-2} \end{cases}$$

και θα αποδείξουμε ότι η γραμμική απεικόνιση $u \to \tilde{u}$ είναι ευσταθής ,δηλαδή ότι υπάρχει σταθερά c,που εξαρτάται απ'το q αλλά είναι ανεξάρτητη της u ,τέτοια ώστε

$$max_{0\leq t\leq 1}|\tilde{u}(t)| \leq c\, max_{0\leq t\leq 1}|u(t)| \,.$$

Υποθέτουμε ότι $u(1) = 0$ οπότε και $\tilde{u}(1) = 0$.Έχουμε ορίσει $\tilde{u} \in \mathbb{P}_{q-1}$ οπότε μπορούμε να την γράψουμε στην μορφή : $\tilde{u}(t) = (1-t)\hat{u}(t)$ με $\hat{u} \in \mathbb{P}_{q-2}$.Τώρα έχουμε

$$\int_0^1 |\tilde{u}(t)|^2 dt = \int_0^1 (1-t)^2|\hat{u}(t)|^2 dt \leq \int_0^1 (1-t)|\hat{u}(t)|^2\, dt = \int_0^1 \tilde{u}(t)\hat{u}(t)dt.$$

Όμως απο τον ορισμό της u ξέρουμε ότι $\int_0^1 (u-\tilde{u})(t)\hat{u}(t)\,dt = 0$, δηλαδή ότι στο διάστημα [0,1] έχουμε ορθογωνιότητα , οπότε ισχύει

$$\int_0^1 \tilde{u}(t)\hat{u}(t)dt = \int_0^1 \tilde{u}(t)\hat{u}(t)dt$$

Επομένως ισχύει

$$\int_0^1 |\tilde{u}(t)|^2 dt \leq \int_0^1 u(t)\hat{u}(t)dt$$

και συνεπώς έχουμε

$$\int_0^1 |\tilde{u}(t)|^2 dt \leq max_{0\leq t\leq 1}|u(t)| \int_0^1 \hat{u}(t)dt \,.$$

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος είναι το τετράγωνο μιας νόρμας της $\tilde{u}$ όπως και ο δεύτερος παράγοντας του γινομένου στο δεξιό μέλος .Όμως γνωρίζουμε ότι όλες οι νόρμες σε χώρο πεπερασμένης διάστασης είναι ισοδύναμες αρα καταλήγουμε στην εξής σχέση

$$max_{0\leq t\leq 1}|\tilde{u}(t)| \leq c^* max_{0\leq t\leq 1}|u(t)| \quad \text{με κατάλληλη σταθερά } c^*.$$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται η ευστάθεια για γενικό διάστημα I_n ,δηλαδή για συναρτήσεις $y \in C[t^n, t^{n+1}]$ ισχύει η εκτίμηση

$$\text{(P.1)} \qquad max_{t^n\leq t\leq t^{n+1}}|\tilde{y}(t)| \leq c\; max_{t^n\leq t\leq t^{n+1}}|y(t)| \quad .$$

Έστω λοιπόν y μια συνάρτηση όπως στην εκφώνηση του λήμματος.Θεωρούμε το $\rho_{q-1} \in \mathbb{P}_{q-1}(I_n)$ να είναι το πολυώνυμο Taylor της y ως προς το σημείο t^{n+1} οπότε ισχύει ότι $\rho_{q-1} = \tilde{\rho}_{q-1}$ και σύμφωνα με την (P.1) ισχύει

$$max_{t^n\leq t\leq t^{n+1}}\left|(\tilde{y} - \rho_{q-1})(t)\right| \leq c \quad max_{t^n\leq t\leq t^{n+1}}\left|(y - \rho_{q-1})(t)\right| .$$

Τώρα, $y - \tilde{y} = (y - \rho_{q-1}) - (\tilde{y} - \rho_{q-1})$ οπότε χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα λαμβάνουμε $|y - \tilde{y}| \leq |y - \rho_{q-1}| + |\tilde{y} - \rho_{q-1}| \Rightarrow$

$$max_{t^n\leq t\leq t^{n+1}}|(y - \tilde{y})(t)| \leq (1 + c) \quad max_{t^n\leq t\leq t^{n+1}}\left|(y - \rho_{q-1})(t)\right| \quad .$$

Αρκεί επομένως να υπολογίσουμε την διαφορά $y - \rho_{q-1}$ όπου το ρ_{q-1} μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε πολυώνυμο βαθμού το πολύ $q - 1$.

Τώρα ,απο ανάπτυγμα Taylor , έχουμε

$$y(t) = \rho_{q-1}(t) + \frac{1}{(q-1)!}\int_{t^{n+1}}^{t}(t-s)^{q-1}y^{(q)}(s)ds \;\; \forall t \in I_n \Rightarrow$$

$$max_{t^n\leq t\leq t^{n+1}}\left|y(t) - \rho_{q-1}(t)\right|$$
$$\leq \frac{1}{(q-1)!} max_{t^n\leq t\leq t^{n+1}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |t-s|^{q-1}\left|y^{(q)}(s)\right|ds$$

Όμως απο την ανισότητα των Cauchy-Schwarz ,έχουμε

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} |t-s|^{q-1} \left|y^{(q)}(s)\right| ds \ \leq \ \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} |t-s|^{2q-2} ds \right)^{1/2} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left|y^{(q)}(s)\right|^2 ds \right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2q-1}} (h^{2q-1})^{1/2} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left|y^{(q)}(s)\right|^2 ds \right)^{1/2} \ .$$

Οπότε

$$max_{t^n \leq t \leq t^{n+1}} \left|y(t) - \rho_{q-1}(t)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2q-1}} (h^{2q-1})^{1/2} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left|y^{(q)}(s)\right|^2 ds \right)^{1/2}$$

και έπεται το εξής :

$$max_{t^n \leq t \leq t^{n+1}} |(y - \tilde{y})(t)| \leq (1+c) \frac{1}{\sqrt{2q-1}} (h^{2q-1})^{1/2} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left|y^{(q)}(s)\right|^2 ds \right)^{1/2} .$$

Συνεπώς

$$sup_{t \in I_n} |\rho(t)|^2 \leq C h^{2q-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left|y^{(q)}(s)\right|^2 ds \quad .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΥΝΕΠΕΙΑ ΤΗΣ ΑΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΟΥ GALERKIN

Θα μελετήσουμε την συνέπεια της μεθόδου για την προβολή $\tilde{y} \in S_h$ της ακριβούς λύσης y του Π.Α.Τ.

Εστω $\mathrm{E} \in \mathbb{P}_{q-1}(I_n)$ το σφάλμα συνέπειας της ασυνεχούς μεθόδου του Galerkin για την $\tilde{y}$,

$$\int_{I_n}[\tilde{y}'(t) - f(t,\tilde{y}(t))]\chi(t)dt + (\tilde{y}^{n+} - \tilde{y}^{n})\chi^{n+} = \int_{I_n}\mathrm{E}(t)\chi(t)dt\,,$$

$\forall \chi \in \mathbb{P}_{q-1}(I_n)$ (*)

Θα εκτιμήσουμε το $\mathrm{E}(t)$ με βάση τον παραπάνω τύπο. Κατ'αρχάς γνωρίζουμε απο τον ορισμό της $\tilde{y} \in S_h$ ότι

$$\int_{I_n}(y - \tilde{y})(t)\chi(t)dt = 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{P}_{q-2}(I_n)\,.$$

Έστω $\chi \in \mathbb{P}_{q-1}(I_n)$, τότε ,

$$\int_{I_n}(y' - \tilde{y}')(t)\chi(t)dt =$$

$$-\int_{I_n}(y - \tilde{y})(t)\chi'(t)dt + (y^{n+1} - \tilde{y}^{n+1})\chi^{n+1} - (y^{n} - \tilde{y}^{n+})\chi^{n+} =$$

$$= -(y^{n} - \tilde{y}^{n+})\chi^{n+} = -(\tilde{y}^{n} - \tilde{y}^{n+})\,\chi^{n+}.$$

Οπότε έχουμε

$$\int_{I_n}y'(t)\chi(t)dt = \int_{I_n}\tilde{y}'(t)\chi(t)dt + (\tilde{y}^{n+} - \tilde{y}^{n})\,\chi^{n+} \quad (**)\,.$$

Απο τις (*) και (**) έχουμε :

$$\int_{I_n}\mathrm{E}(t)\chi(t)dt = \int_{I_n}[y'(t) - f(t,\tilde{y}(t))]\chi(t)dt \quad \forall \chi \in \mathbb{P}_{q-1}(I_n) \Longrightarrow$$

$$\int_{I_n}\mathrm{E}(t)x(t)dt = \int_{I_n}[f(t,y(t)) - f(t,\tilde{y}(t))]\chi(t)dt\,.$$

Θέτω $\chi = E$ και έχω :

$$\int_{I_n}|\mathrm{E}(t)|^2dt = \int_{I_n}[f(t,y(t)) - f(t,\tilde{y}(t))]E(t)dt\,.$$

Όμως f Lipschitz και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy – Schwarz και την αριθμητική - γεωμετρική ανισότητα, για το δεξιό μέλος τη ισότητας ,καταλήγουμε στο εξης :

$$\int_{I_n}[f(t,y(t)) - f(t,\tilde{y}(t))]E(t)dt \le L \int_{I_n}|\, y(t) - \tilde{y}(t)||E(t)|dt$$

$$\le L \left(\int_{I_n}|\, y(t) - \tilde{y}(t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_{I_n}|E(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

$$\le \frac{L^2}{2}\int_{I_n}|\, y(t) - \tilde{y}(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_{I_n}|E(t)|^2 dt\,.$$

Συνεπώς έχουμε

$$\int_{I_n}|\mathrm{E}(t)|^2 dt \le \frac{L^2}{2}\int_{I_n}|\, y(t) - \tilde{y}(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_{I_n}|E(t)|^2 dt \implies$$

$$\int_{I_n}|\mathrm{E}(t)|^2 dt \le L^2 \int_{I_n}|\, y(t) - \tilde{y}(t)|^2 dt\ .$$

Όμως απο το λήμμα που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη του σφάλματος ρ έχουμε ότι

$$sup_{t\in I_n}|E(t)|^2 \le Ch^{2q-1}\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left|y^{(q)}(s)\right|^2 ds$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται η επιθυμητή εκτίμηση συνέπειας

$$\int_{I_n}|\mathrm{E}(t)|^2 dt \le Ch^{2q}\int_{I_n}|y^{(q)}(t)|^2 dt\ .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1 ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Έστω $Y \in S_h$ η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών με $Y(a) = y_0$ και $Z \in S_h$ μια άλλη λύση του ίδιου προβλήματος με αρχική τιμή $Z(\alpha) = z_0$. Και οι δύο λύσεις ικανοποιούν την ασυνεχή μέθοδο Galerkin δηλαδή έχουμε :

$$\int_{I_n} Y'(t)\chi(t)dt + (Y^{n+} - Y^n)\chi^{n+} = \int_{I_n} f\big(t, Y(t)\big)\chi(t)dt \quad \forall x \in \mathbb{P}_{q-1}(I_n)$$

$$\int_{I_n} Z'(t)\chi(t)dt + (Z^{n+} - Z^n)\chi^{n+} = \int_{I_n} f\big(t, Z(t)\big)\chi(t)dt \quad \forall x \in \mathbb{P}_{q-1}(I_n) ,$$
$n = 0, \dots, N-1$

Αφαιρούμε τις 2 σχέσεις κατα μέλη και συμβολίζουμε με ζ την διαφορά $Y - Z$ οπότε λαμβάνουμε :

$$\int_{I_n} \zeta'(t)\chi(t)dt + (\zeta^{n+} - \zeta^n)\chi^{n+} = \int_{I_n} \big[f\big(t, Y(t)\big) - f\big(t, Z(t)\big)\big]\chi(t)dt \quad \text{(E.1)}$$

Θέτω $\chi = 2\zeta$ οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$\int_{I_n} \left[\big(\zeta(t)\big)^2\right]' dt + 2|\zeta^{n+}|^2 - 2\,\zeta^n\zeta^{n+} = \int_{I_n} \big[f\big(t, Y(t)\big) - f\big(t, Z(t)\big)\big]2\zeta dt \leq$$

$$\leq 2L\int_{I_n} |\zeta(t)|^2\, dt \quad \text{(αφού } f \text{ Lipschitz)} \quad \Longrightarrow$$

$$|\zeta^{n+1}|^2 - |\zeta^{n+}|^2 + 2|\zeta^{n+}|^2 - 2\,\zeta^n\zeta^{n+} \leq 2L\int_{I_n} |\zeta(t)|^2\, dt \quad \Longrightarrow$$

$$|\zeta^{n+1}|^2 \leq -|\zeta^{n+}|^2 + 2\,\zeta^n\zeta^{n+} + 2L\int_{I_n} |\zeta(t)|^2\, dt \ .$$

Όμως $2\,\zeta^n\zeta^{n+} \leq |\zeta^n|^2 + |\zeta^{n+}|^2$

συνεπώς έχουμε

$$|\zeta^{n+1}|^2 \leq |\zeta^n|^2 + 2L\int_{I_n} |\zeta(t)|^2\, dt \quad \text{(E.2)}$$

Για να προχωρήσουμε στην απόδειξη της ευστάθειας θα αναφέρουμε κάποια βασικά πράγματα για τους τύπους ολοκλήρωσης του Radau .

Άν $[a, b]$ ένα διάστημα και $q \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένοι κόμβοι $a < \tau_1 < \cdots < \tau_q = b$ και βάρη $w_1, \dots, w_q$ τέτοιοι ώστε ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης Q_q ,

$$Q_q(f) = \sum_{i=1}^{q} w_i f(\tau_i) \,,$$

να ολοκληρώνει πολυώνυμα βαθμού έως και $2q-2$ ακριβώς, δηλαδή

$$\int_a^b p(t)dt = Q_q(p) \ \ \forall p \in \mathbb{P}_{2q-2\,.}$$

Έιμαστε τώρα στη θέση να συνεχίσουμε την απόδειξη της ευστάθειας χρησιμοποιώντας το παρακάτω λήμμα :

Λήμμα

Έστω 0$< \tau_1 < \cdots < \tau_q = 1$ και $w_1, \ldots, w_q$ οι κόμβοι και τα βάρη του τύπου ολοκλήρωσης Radau στο διάστημα [0,1] , $\rho \ \in \mathbb{P}_{q-1}$ $και$ $\tilde{\rho} \in \mathbb{P}_{q-1}$ το πολυώνυμο παρεμβολής της συνάρτησης $\varphi, \varphi(t) = \frac{\rho(t)}{t} \quad t \in (0,1]$, στους κόμβους τ_1,..., τ_q. Τότε ισχύει

$$\int_0^1 \rho'(t)\,\tilde{\rho}(t)dt + \ \rho(0)\tilde{\rho}(0) = \frac{1}{2}\left[|\rho(1)|^2 + \ \sum_{i=1}^{q} w_i |\tau_i{}^{-1}\,\rho(\tau_i)|^2\right]$$

ή

$$\int_0^1 \rho'(t)\,\tilde{\rho}(t)dt + \ \rho(0)\tilde{\rho}(0) \geq 1\backslash 2\ [|\rho(1)|^2 + \int_0^1 |\rho(t)|^2 dt]$$

Απόδειξη λήμματος

Εισάγουμε το πολυώνυμο $u \ \in \ \mathbb{P}_{q-2}$ με $u(t) = \frac{[\rho(t)-\rho(0)]}{t} \implies$

$$\rho(t) = \rho(0) + tu(t).$$

Έτσι έχουμε $\varphi(t) = \rho(t)/t$ = $u(t) + \rho(0)/t$.

Επιπλεον το $\tilde{\rho}$ γράφεται στην μορφή :

$\tilde{\rho} = \ u + \rho(0)\Lambda$ οπου Λ ∈ $\mathbb{P}_{q-1}$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της συνάρτησης $1/t$ στα σημεία του Radau , $\Lambda(t_i) = 1/t_i \ \ i = 1, \ldots, q$.

Αρχικά υπολογίζουμε το γινόμενο

$$\int_0^1 \rho'(t)\,\tilde{\rho}(t)dt = \int_0^1 [u(t) + tu'(t)][u(t) + \rho(0)\Lambda]\,dt \quad =$$

$$= \int_0^1 |u(t)|^2 dt + \int_0^1 t\,u'(t)\,u(t)dt$$
$$+\ \rho(0)[\int_0^1 tu'(t)\Lambda(t)dt + \int_0^1 u(t)\Lambda(t)dt]$$

$$= \int_0^1 |u(t)|^2 dt + \frac{1}{2}|u(1)|^2 - \int_0^1 \frac{|u(t)|^2}{2}dt$$
$$+ \rho(0)[\int_0^1 tu'(t)\Lambda(t)dt + \int_0^1 u(t)\Lambda(t)dt]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 |u(t)|^2 dt + \frac{1}{2}|u(1)|^2 + \rho(0)[\int_0^1 tu'(t)\Lambda(t)dt$$
$$+ \int_0^1 u(t)\Lambda(t)dt]\,.$$

Τώρα ,για $s \in \mathbb{P}_{q-1}$,χρησιμοποιώντας την ακρίβεια του τύπου του Radau , έχουμε

$\int_0^1 ts'(t)\Lambda(t)dt = \int_0^1 s'(t)dt = s(1) - s(0)$ οποτε στην παραπάνω σχέση έχουμε

$\int_0^1 tu'(t)\Lambda(t)dt = u(1) - u(0)$ και

$\int_0^1 t\Lambda'(t)\Lambda(t)dt = 1 - \Lambda(0)$.

Επίσης αφου το πολυώνυμο $u\Lambda$ ολοκληρώνεται ακριβώς από τον τύπο Radau λαμβάνουμε τελικά

$$\int_0^1 \rho'(t)\,\tilde{\rho}(t)dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 |u(t)|^2 dt + \frac{1}{2}|u(1)|^2 + \rho(0)[\,u(1) - u(0)$$
$$+ \sum_{i=1}^{q} w_i u(\tau_i)\tau_i^{-1}]$$

Όμως $\quad u(1) = [\rho(1) - \rho(0)]/1$,

$$\rho(0)\tilde{\rho}(0) = \rho(0)(u(0) + \rho(0)\Lambda) = \rho(0)u(0) + \rho(0)^2\Lambda(0)$$

και επιπλέον το u^2 είναι βαθμού έως $2q - 2$ δηλαδή ολοκληρώνεται ακριβώς απ'τον τύπο του Radau οπότε έχουμε

$$\int_0^1 \rho'(t)\,\tilde{\rho}(t)dt =$$

$$\frac{1}{2}[\rho(1) - \rho(0)]^2 + \rho(0)u(1) - \rho(0)u(0) + \sum_{i=1}^{q} w_i u(\tau_i)\tau_\iota^{-1}\,\rho(0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q} w_i u(\tau_i)^2$$

$$= \tfrac{1}{2}|\rho(1)|^2 + \tfrac{1}{2}|\rho(0)|^2 - \rho(1)\rho(0) + \rho(0)[\rho(1) - \rho(0)] - \rho(0)u(0)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{q} w_i[u(\tau_i)^2 + 2u(\tau_i)\tau_\iota^{-1}\rho(0)].$$

Οπότε τελικά λαμβάνουμε την εξής σχέση

$$\int_0^1 \rho'(t)\,\tilde{\rho}(t)dt =$$
$$\tfrac{1}{2}|\rho(1)|^2 + [\Lambda(0) - \tfrac{1}{2}]\rho(0)^{2}+ \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{q} w_i[u(\tau_i)^2 + 2u(\tau_i)\tau_\iota^{-1}\rho(0)] \quad \text{(E.3)}$$

Για το πολυώνυμο παρεμβολής γνωρίζουμε ότι

$$\int_0^1 t\Lambda'(t)\Lambda(t)dt = 1 - \Lambda(0) \;\Rightarrow$$

$$\Lambda(0) = 1 - \int_0^1 t\Lambda'(t)\Lambda(t)dt = 1 - \int_0^1 \frac{t(\Lambda^2)'(t)}{2}dt$$

και ολοκληρώνοντας κατα μέλη έχουμε

$$\Lambda(0) = 1 - \frac{1}{2}[\Lambda(1)]^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 [\Lambda(t)]^2 dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 [\Lambda(t)]^2 dt$$

Δηλαδή

$\Lambda(0) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q} w_i \tau_i^{-2}$,αφού Λ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της $1/t$ στα σημεία του Radau . Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην (Ε.3) και χρησιμοποιώντας την σχέση

$$[\rho(0)]^2\tau_i{}^{-2} + [u(\tau_i)]^2 + 2\rho(0)u(\tau_i)\tau_i{}^{-1} = |\tau_i{}^{-1}\rho(\tau_i)|^2 \ ,$$

η οποία έπεται απο την σχέση $u(\tau) = \frac{[\rho(\tau)-\rho(0)]}{\tau} \Longrightarrow u(\tau) + \rho(0)\tau^{-1} = \rho(\tau)\tau^{-1}$ αν την υψώσουμε στο τετράγωνο , οδηγούμαστε στην ζητούμενη σχέση. Έχουμε δηλαδή

$$\int_0^1 \rho'(t)\,\tilde{\rho}(t)dt + \ \rho(0)\tilde{\rho}(0) = 1\backslash 2\ [|\rho(1)|^2 + \ \textstyle\sum_{i=1}^{q} w_i|\tau_i{}^{-1}\,\rho(\tau_i)|^2]$$

Επί πλέον ,

$\int_0^1 \rho'(t)\,\tilde{\rho}(t)dt + \ \rho(0)\tilde{\rho}(0) \geq \frac{1}{2}\ [|\rho(1)|^2 + \ \sum_{i=1}^{q} w_i|\,\rho(\tau_i)|^2] = \frac{1}{2}\ [|\rho(1)|^2 + \int_0^1 |\rho(t)|^2 dt.$

Για την συνέχεια της αποδειξης θα χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο λήμμα στο διάστημα $[t^n, t^{n+1}]$ και εχουμε το εξης : Έστω $\rho \in \mathbb{P}_{q-1}$ στο διάστημα $[t^n, t^{n+1}]$ και έστω $\varphi(t) = (t^{n+1} - t^n)\rho(t)/(t - t^n)$ και $\tilde{\rho} \in \mathbb{P}_{q-1}$ το πολυώνυμο παρεμβολής της συνάρτησης φ στα σημεία του Radau $t^{n,i}, i = 1, \ldots, q$. Τότε ισχύει

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \rho'(t)\tilde{\rho}(t)dt + \rho(t^n)\,\tilde{\rho}(t^n) = \frac{1}{2}[|\rho(t^{n+1})|^2 + \sum_{i=1}^{q} w_i\left|\tau_i{}^{-1}\rho(\tau^{n,i})\right|^2]$$

$$\geq \frac{1}{2}[|\rho(t^{n+1})|^2 + \frac{1}{t^{n+1}-t^n}\int_{t^n}^{t^{n+1}} |\rho(t)|^2 dt]$$

(E.4)

Επιπλέον θα χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω σχέσεις για την ολοκλήρωση της απόδειξης .

$$|\tilde{u}(t^n)|^2 \leq \frac{c}{h}\int_{I_n} |u(t)|^2\, dt \qquad \forall u \in \mathbb{P}_{q-1}(I_n) \qquad \text{(E.5)}$$

$$\left(\int_{I_n} |\tilde{u}(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leq \frac{1}{\tau_1}\left(\int_{I_n} u|(t)|^2 dt\right)^{1/2} \qquad \forall u \in \mathbb{P}_{q-1}(I_n) \qquad \text{(E.6)}$$

όπου $\tilde{u} \in \mathbb{P}_{q-1}(I_n)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της συνάρτησης $hu(t)/(t - t^n)$ στα σημεία του Radau $t^{n,1}, \ldots, t^{n,q}$ στο διάστημα I_n και επίσης $0 < \tau_1 < \cdots < \tau_q = 1$ τα σημεία του Radau στο [0,1] .

Στην σχέση (Ε.1) θέτουμε $\chi = \tilde{\zeta}$, όπου ζ , $\tilde{\zeta}$ έχουν τις ίδιες ιδιότητες με τα $\rho, \tilde{\rho}$ πού ορίσαμε παραπάνω, και έχουμε

$$\int_{I_n} \zeta'(t)\tilde{\zeta}(t)dt + \zeta^{n+}\tilde{\zeta}^{n+} = \zeta^n\tilde{\zeta}^{n+} + \int_{I_n} \left[f\big(t, Y(t)\big) - f\big(t, Z(t)\big)\right]\tilde{\zeta}(t)dt.$$

Όμως $\int_{I_n} \zeta'(t)\tilde{\zeta}(t)dt + \zeta^{n+}\tilde{\zeta}^{n+} \geq \frac{1}{2}[|\zeta^{n+1}|^2 + \frac{1}{h}\int_{t^n}^{t^{n+1}} |\zeta(t)|^2 dt]$ απο (Ε.4) και απο Lipschitz το δεξιό μέλος γίνεται

$\zeta^n\tilde{\zeta}^{n+} + \int_{I_n}\left[f\big(t, Y(t)\big) - f\big(t, Z(t)\big)\right]\tilde{\zeta}(t)dt \leq \zeta^n\tilde{\zeta}^{n+} + L\int_{I_n}|\zeta(t)|\left|\tilde{\zeta}(t)\right|$ οπότε έχουμε

$$|\zeta^{n+1}|^2 + \frac{1}{h}\int_{t^n}^{t^{n+1}}|\zeta(t)|^2 dt \leq 2\zeta^n\tilde{\zeta}^{n+} + 2L\int_{I_n}|\zeta(t)|\left|\tilde{\zeta}(t)\right| dt$$

$\leq 2\zeta^n\tilde{\zeta}^{n+} + 2L\left(\int_{I_n}|\zeta(t)|^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_{I_n}\left|\tilde{\zeta}(t)\right|^2 dt\right)^{1/2} \leq 2\zeta^n\tilde{\zeta}^{n+} + 2L\frac{1}{\tau_1}\int_{I_n}|\zeta(t)|^2 dt$ απο (Ε.6)

Τώρα $2\zeta^n\tilde{\zeta}^{n+} \leq 2c|\zeta^n|^2 + \frac{1}{2c}\left|\tilde{\zeta}^{n+}\right|^2$ και απο την (Ε.5) έχουμε

$2\zeta^n\tilde{\zeta}^{n+} \leq 2c|\zeta^n|^2 + \frac{1}{2h}\int_{I_n}|\zeta(t)|^2 dt$ αρα τελικά λαμβάνουμε

$|\zeta^{n+1}|^2 + \frac{1}{h}\int_{t^n}^{t^{n+1}}|\zeta(t)|^2 dt \leq 2c|\zeta^n|^2 + \frac{1}{2h}\int_{I_n}|\zeta(t)|^2 dt + 2L\frac{1}{\tau_1}\int_{I_n}|\zeta(t)|^2 dt \implies$

$|\zeta^{n+1}|^2 + \left(\frac{1}{2h} - \frac{2L}{\tau_1}\right)\int_{I_n}|\zeta(t)|^2 dt \leq 2c|\zeta^n|^2 \implies \left(\frac{1}{2h} - \frac{2L}{\tau_1}\right)\int_{I_n}|\zeta(t)|^2 dt \leq 2c|\zeta^n|^2$.

Θεωρούμε h αρκετά μικρό , ώστε $\frac{1}{2h} - \frac{2L}{\tau_1} \geq \frac{1}{4h}$ οπότε λαμβάνουμε

$2L\int_{I_n}|\zeta(t)|^2 dt \leq 16chL|\zeta^n|^2$. Θέτω $\tilde{c} = 16cL$ και

χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση στην (Ε.2) λαμβάνουμε

$|\zeta^{n+1}|^2 \leq |\zeta^n|^2 + 2L\int_{I_n}|\zeta(t)|^2 dt \leq (1 + \tilde{c}h)|\zeta^n|^2 \leq e^{\tilde{c}h}|\zeta^n|^2$ οπότε επαγωγικά συμπαιρένουμε ότι :

για n=0 $|\zeta^1|^2 \le e^{\tilde{c}h}|\zeta^0|^2$

για n=1 $|\zeta^2|^2 \le e^{\tilde{c}h}|\zeta^1|^2 \le e^{2\tilde{c}h}|\zeta^0|^2$

...

$$|\zeta^n|^2 \le e^{\tilde{c}hn}|\zeta^0|^2 = e^{\tilde{c}(t^n-a)}|\zeta^0|^2 \ .$$

Επομένως έχουμε $max_{0\le n\le N}|\zeta^n| \le \mathrm{e}^{\breve{c}(\mathrm{b}-\alpha)/2}|\zeta^0|$

ή ισοδύναμα

$$max_{0\le n\le N}|Y(t^n) - Z(t^n)| \le \mathrm{e}^{\breve{c}(\mathrm{b}-\alpha)/2}|Y(a) - Z(a)| \quad .$$

Επί πλέον , μπορούμε να αποδείξουμε ευστάθεια σε όλο το διάστημα [α,b].

Κατ’αρχάς ισχυει η ακόλουθη εκτίμηση : $sup_{t\in I_n}|\zeta(t)|^2 \le \frac{c}{h}\int_{I_n}|\zeta(t)|^2 dt$ διότι :

$\int_{I_n}|\zeta(t)|^2\,dt = (t^{n+1} - t^n)\int_0^1 \tilde{\zeta}(y)^2 dy$ όπου $\tilde{\zeta}(\mathrm{y}) = \zeta(t^n + hy)\,, y \in [0,1]$ και προφανώς είναι πολυώνυμο ίδιου βαθμού με το ζ στο [0,1] .

Όμως

$$(t^{n+1} - t^n)\int_0^1 \tilde{\zeta}(y)^2 dy \ge Ch\left(max_{0\le y\le 1}\left|\tilde{\zeta}(y)\right|\right)^2 = Ch\left(max_{t^n\le t\le t^{n+1}}\left||\zeta(t)|\right|\right)^2 .$$

Συνδιάζοντας την παραπάνω σχέση με την $2L\int_{I_n}|\zeta(t)|^2\,dt \le 16chL|\zeta^n|^2$ (απο την απόδειξη της ευστάθειας στο $[t^n, t^{n+1}]$) λαμβάνουμε

$$sup_{t\in I_n}|\zeta(t)|^2 \le \frac{c\tilde{c}}{2L}|\zeta^n|^2 = 8c^2|\zeta^n|^2 .$$

Επομένως όπως και στην απόδειξη της ευστάθειας στο διάστημα $[t^n, t^{n+1}]$ καταλήγουμε στο εξής :

$$sup_{a\le t\le b}|\zeta(t)| \le 2\sqrt{2}c\mathrm{e}^{\breve{c}(\mathrm{b}-\alpha)/2}|\zeta^0| \quad \text{ή ισοδύναμα}$$

$$sup_{a\le t\le b}|Y(t) - Z(t)| \le 2\sqrt{2}c\mathrm{e}^{\breve{c}(\mathrm{b}-\alpha)/2}|Y(a) - Z(a)| \ .$$

3.2 Β-ευστάθεια ασυνεχών μεθόδων Galerkin

Για να αποδέιξουμε ότι η ασυνεχής μέθοδος του Galerkin είναι Β-ευσταθής αρκεί να δείξουμε ότι για οποιεσδήποτε λύσεις, που ικανοποιούν τον τύπο της μεθόδου και αντιστοιχούν στις αρχικές τιμές y_0 , z_0 ,ισχύει

$$\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \leq \|y^n - z^n\| .$$

Σημειώνουμε ότι συμβολίζουμε με $\|\cdot\|$ την ευκλείδια νόρμα.

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε τα εξής :

Υποθέτουμε ότι η f είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς την δεύτερη μεταβλητή της. Επιλέγω $\chi = \zeta = Y - Z$ στην (Ε.1) οπότε το δεξιό μέλος γίνεται μη θετικό εφόσον f φθίνουσα και ικανοποιεί την εξής :

$$f\big(t, Y(t)\big) - f\big(t, Z(t)\big)\big(Y(t) - Z(t)\big) \leq 0$$

Ετσι έχουμε

$$\int_{I_n} \zeta'(t)\zeta(t)dt + |\zeta^{n+}|^2 \leq \zeta^n \zeta^{n+} \Rightarrow \frac{|\zeta^{n+1}|^2}{2} - \frac{|\zeta^{n+}|^2}{2} + |\zeta^{n+}|^2 \leq \zeta^n \zeta^{n+} .$$

Όμως παρατηρούμε ότι $|\zeta^n|^2 - |\zeta^n - \zeta^{n+}|^2 = 2|\zeta^n||\zeta^{n+}| - |\zeta^{n+}|^2$ αρα έχουμε

$$|\zeta^{n+1}|^2 \leq |\zeta^n|^2 - |\zeta^n - \zeta^{n+}|^2 \quad \Rightarrow \quad |\zeta^{n+1}| \leq |\zeta^n|$$

Επομένως έχουμε όντως

$$|Y(t^{n+1}) - Z(t^{n+1})| \leq |Y(t^n) - Z(t^n)|$$

ή

$$\|Y^{n+1} - Z^{n+1}\| \leq \|Y^n - Z^n\|.$$

Καταλήξαμε επομένως στο συμπέρασμα ότι η ασυνεχής μέθοδος του Galerkin είναι Β-ευσταθής .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε το σφάλμα $e = y - Y$ όπου y η ακριβής λύση και Y η προσέγγιση που δίνει η ασυνεχής μέθοδος Galerkin . Έχουμε εισάγει την $\tilde{y}$ να είναι η προβολή της ακριβούς λύσης και με την βοήθεια της γράφουμε το σφάλμα e στην μορφή

$e = \rho + \theta$ όπου $\rho = y - \tilde{y}$ και $\theta = \tilde{y} - Y$. Το πρώτο μέρος εχει ήδη υπολογιστεί αρα απομένει να υπολογίσουμε το θ .

Θα χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες σχέσεις :

$$\int_{I_n} Y'(t)\chi(t)dt + (Y^{n+} - Y^n)\,\chi^{n+} = \int_{I_n} f\big(t, Y(t)\big)\chi(t)dt$$

και τον τύπο της συνέπειας της μεθόδου για την προβολή $\tilde{y}$

$$\int_{I_n} \mathrm{E}(t)\chi(t)dt = \int_{I_n} [\tilde{y}'(t) - f(t, \tilde{y}(t))]\chi(t)dt + (\tilde{y}^{n+} - \tilde{y}^n)\,\chi^{n+}.$$

Αφαιρώντας την πρώτη απ'την δεύτερη λαμβάνουμε

$$(\Sigma.1) \qquad \int_{I_n} \theta'(t)\chi(t)dt + (\theta^{n+} - \theta^n)\,\chi^{n+} = \int_{I_n} \big[f\big(t, \tilde{y}(t)\big) - f\big(t, Y(t)\big)\big]\chi(t)dt + \int_{I_n} \mathrm{E}(t)\chi(t)dt\,.$$

Επιλέγω $\chi = 2\theta$ και έχουμε το εξής :

$$2\int_{I_n} \theta'(t)\theta(t)dt + (\theta^{n+} - \theta^n)2\theta^{n+} = \int_{I_n} \big[f\big(t, \tilde{y}(t)\big) - f\big(t, Y(t)\big)\big]2\theta(t)dt + \int_{I_n} \mathrm{E}(t)2\theta(t)dt$$

$$\Longrightarrow\ |\theta^{n+1}|^2 - |\theta^{n+}|^2 + 2|\theta^{n+}|^2 - 2\theta^n\theta^{n+} \le 2L\int_{I_n} |\theta(t)|^2\,dt + 2\int_{I_n} \mathrm{E}(t)\theta(t)dt$$

$$\Rightarrow |\theta^{n+1}|^2 \le -|\theta^{n+}|^2| + 2\theta^n\theta^{n+} + 2L\int_{I_n} |\theta(t)|^2\,dt + 2\int_{I_n} \mathrm{E}(t)\theta(t)dt$$

$$\xRightarrow{2\theta^n\theta^{n+} \le |\theta^n|^2| + |\theta^{n+}|^2}$$

$$|\theta^{n+1}|^2 \le |\theta^n|^2 + 2L\int_{I_n} |\theta(t)|^2\,dt + 2\int_{I_n} \mathrm{E}(t)\theta(t)dt \quad .$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwartz και την αριθμητική-γεωμετρική ανισότητα για τον τελευταίο όρο στο δεξιό μέλος παίρνουμε

$$2\int_{I_n} \mathrm{E}(t)\theta(t)dt \le 2(\int_{I_n} |E(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}} (\int_{I_n} |\theta(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \int_{I_n} |E(t)|^2 dt + \int_{I_n} |\theta(t)|^2 dt\,.$$

Επομένως με βάση το παραπάνω έχουμε

$$|\theta^{n+1}|^2 \le |\theta^n|^2 + (2L+1)\int_{I_n} |\theta(t)|^2\, dt + \int_{I_n} |E(t)|^2 dt \quad (\Sigma.2).$$

Επιλέγοντας τώρα $\chi = \tilde{\theta}$ στην (Σ.1) (όπου οι θ και $\tilde{\theta}$ συνδέονται με τα ρ και $\tilde{\rho}$ όπως στο λήμμα που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη της ευστάθειας) και χρησιμοποιώντας τον τύπο (Ε.4) και την συνθήκη Lipschitz λαμβάνουμε την εξής σχέση :

$$\int_{I_n} \theta'(t)\tilde{\theta}(t)dt + \theta^{n+}\tilde{\theta}^{n+} = \theta^n\, \tilde{\theta}^{n+} + \int_{I_n} \left[f\big(t, \tilde{y}(t)\big) - f\big(t, Y(t)\big)\right]\tilde{\theta}(t)dt$$
$$+ \int_{I_n} \mathrm{E}(t)\tilde{\theta}(t)dt \quad \Longrightarrow$$

$$|\theta^{n+1}|^2 + \frac{1}{h}\int_{I_n} |\theta^n|^2 dt \le 2\theta^n\tilde{\theta}^{n+} + 2L\int_{I_n} |\theta(t)|\left|\tilde{\theta}(t)\right| dt + 2\int_{I_n} \mathrm{E}(t)\tilde{\theta}(t)dt\,.$$

Όπως και στην απόδειξη της ευστάθειας θα εφαρμόσουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz και χρησιμοποιώντας την (Ε.6) οδηγούμαστε στη εκτίμηση

$$|\theta^{n+1}|^2 + \frac{1}{h}\int_{I_n} |\theta^n|^2 dt \le 2\theta^n\tilde{\theta}^{n+} + 2L\frac{1}{\tau_1}\int_{I_n} |\theta(t)|^2 dt + 2\int_{I_n} \mathrm{E}(t)\tilde{\theta}(t)dt$$

$$\le 2c|\theta^n|^2 + \frac{1}{2h}\int_{I_n} |\theta(t)|^2 dt + 2L\frac{1}{\tau_1}\int_{I_n} |\theta(t)|^2 dt + 2\int_{I_n} \mathrm{E}(t)\tilde{\theta}(t)dt$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{1}{2h} - 2L\frac{1}{\tau_1}\right)\int_{I_n} |\theta(t)|^2 dt \le 2c|\theta^n|^2 + 2\int_{I_n} \mathrm{E}(t)\tilde{\theta}(t)dt \;.$$

Όμως απο γνωστές ανισότητες και με βάση την (Ε.6) έχουμε

$$2\int_{I_n} \mathrm{E}(t)\tilde{\theta}(t)dt \;\le \int_{I_n} |E(t)|^2 dt + \int_{I_n} |\theta(t)|^2 dt \le \int_{I_n} |E(t)|^2 dt + \frac{1}{{\tau_1}^2}\int_{I_n} |\theta(t)|^2 dt\,.$$

Οπότε έχουμε

$$\left(\frac{1}{2h} - 2L\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{{\tau_1}^2}\right)\int_{I_n} |\theta(t)|^2 dt \le 2c|\theta^n|^2 + \int_{I_n} |E(t)|^2 dt \;.$$

Για h αρκετά μικρό ώστε $\frac{1}{2h} - 2L\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_1{}^2} \geq \frac{1}{4h}$ η παραπάνω μας δίνει

$$(2L+1)\int_{I_n}|\theta(t)|^2 dt \leq h\tilde{c}|\theta^n|^2 + h\tilde{c}\int_{I_n}|E(t)|^2 dt$$

με $\tilde{c} = max\{8c(2L+1), 4(2L+1)\}$.

Συνδιάζοντας την παραπάνω σχέση με την (Σ.2) λαμβάνουμε

$$|\theta^{n+1}|^2 \leq (1+h\tilde{c})\left[|\theta^n|^2 + \int_{I_n}|E(t)|^2 dt\right] .$$

Απο αυτήν την εκτίμηση, επαγωγικά , συμπαιρένουμε ότι

$$|\theta^n|^2 \leq e^{\tilde{c}(t^n-a)}\left[|\theta^0|^2 + \int_a^{t^n}|E(t)|^2 dt\right] \quad n = 1, \dots, N$$

Τώρα , $\theta^0 = \tilde{y}(a) - Y(a) = y_0 - y_0 = 0$.

Επίσης σύμφωνα με την εκτίμηση συνέπειας έχουμε

$$\int_0^{t^n}|E(t)|^2 dt \leq Ch^{2q}\int_a^{t^n}|y^{(q)}(t)|^2 dt.$$

Επομένως λαμβάνουμε τελικά

$$|\theta^n|^2 \leq Ce^{\tilde{c}(t^n-a)}h^{2q}\int_a^{t^n}\left|y^{(q)}(t)\right|^2 dt$$

από την οποία έπεται ότι

$$max_{0\leq n\leq N}|\theta^n| \leq \sqrt{C}e^{\tilde{c}(b-a)/2}h^q\left(\int_a^{t^n}|y^{(q)}(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

ή ισοδύναμα

$$max_{0\leq n\leq N}|y(t^n) - Y(t^n)| \leq \sqrt{C}e^{\tilde{c}(b-a)/2}h^q\left(\int_a^{t^n}|y^{(q)}(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

που είναι η επιθυμητή εκτίμηση του σφάλματος στους κόμβους .

Επιπλέον θα αποδείξουμε την σύγκλιση σε όλο το διάστημα $[\alpha, b]$ με όμοιο τρόπο όπως στην απόδειξη της ευστάθειας.

Κατ’αρχάς γνωρίζουμε ότι

$$sup_{t\in I_n}|\theta(t)|^2 \leq \frac{c}{h}\int_{I_n}|\theta(t)|^2\, dt\ .$$

Συνδυάζοντας αυτή την εκτίμηση με την σχέση

$$(2L+1)\int_{I_n}|\theta(t)|^2 dt \leq h\tilde{c}|\theta^n|^2 + h\tilde{c}\int_{I_n}|E(t)|^2 dt$$

λαμβάνουμε

$$sup_{t\in I_n}|\theta(t)|^2 \leq \frac{\tilde{c}}{2L+1}\left[|\theta^n|^2 + \int_{I_n}|E(t)|^2 dt\right].$$

Επομένως αν λάβουμε υπ’όψιν μας την εκτίμηση του σφάλματος στους κόμβους που υπολογίσαμε παραπάνω καθώς και την εκτίμηση συνέπειας

$$\int_{I_n}|\mathrm{E}(t)|^2 dt \leq Ch^{2q}\int_{I_n}|y^{(q)}(t)|^2 dt$$

καταλήγουμε στο εξής :

$$sup_{t\in[\alpha,b]}|\theta(t)| \leq \tilde{C}\left[\int_a^b |y^{(q)}(t)|^2 dt\right]^{1/2} h^q$$

με κατάλληλη σταθερά $\tilde{C}$.

Τέλος απο γνωστό λήμμα γνωρίζουμε ότι $sup_{t\in I_n}|\rho(t)| \leq \sqrt{C}h^q sup_{t\in I_n}|y^{(q)}(t)|$

όποτε καταλήγουμε στην εξής σχέση :

$$sup_{t\in[\alpha,b]}|y(t) - Y(t)| \leq Ch^q$$

που είναι η επιθυμητή εκτίμηση του σφάλματος σε όλο το διάστημα $[\alpha, b]$.

Σημειώνουμε επίσης ότι στην παραπάνω σχέση υποθέτουμε ότι η ακριβής λύση είναι q φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, b]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ

Θα αποδείξουμε αρχικά ότι υπάρχουν οι προσεγγιστικές λύσεις της ασυνεχούς μεθόδου Galerkin , δηλαδή ότι η προσέγγιση $Y \in S_h$ είναι όντως καλώς ορισμένη, και στη συνέχεια ότι είναι μοναδική.

Έστω λοιπόν Y, Z δύο λύσεις που ικανοποιούν την εξίσωση της ασυνεχούς μεθόδου τέτοιες ώστε $Z^n = Y^n$.Τότε για την διαφορά τους $\zeta = Y - Z$, όπως έχουμε αποδείξει στο κεφάλαιο της ευστάθειας , ισχύει

$$|\zeta^{n+1}|^2 + \frac{1}{h}\int_{I_n}|\zeta(t)|^2 dt \leq 2\zeta^n\tilde{\zeta}^{n+} + 2L\frac{1}{\tau_1}\int_{I_n}|\zeta(t)|^2\, dt\,.$$

Αφού τώρα $\zeta^n = Y^n - Z^n = 0$ έχουμε τελικά

$$\left(1 - \frac{2L}{\tau_1}h\right)\int_{I_n}|\zeta(t)|^2 dt \leq 0.$$

Για $h < \tau_1/(2L)$, ο συντελεστής στο αριστερό μέλος είναι θετικός και αμέσως συμπαιρένουμε ότι $\zeta = 0$, δηλαδή ότι $Y = Z$.

Για να αποδείξουμε ύπαρξη της λύσης θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer το οποίο μας λέει το εξής :

> Αν K είναι ένα μη κενό, κυρτό, κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ και $f : K \longrightarrow K$ μια συνεχής συνάρτηση , τότε η f έχει στο K τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο , δηλαδή
>
> $$\exists\, x^* \in K \quad \text{τέτοιο ώστε} \quad f(x^*) = x^*\ .$$

Έστω λοιπόν $w \in \mathbb{P}_{q-1}(I_n)$ και $\widetilde{w} \in \mathbb{P}_{q-1}(I_n)$ το πολυώνυμο παραμβολής της συνάρτησης $hw(t)/(t - t^n)$ στα σημεία του Radau $t^{n,i}, i = 1, \dots, q$ στο διάστημα $[t^n, t^{n+1}]$, $t^n < t^{n,1} < \cdots < t^{n,q} = t^{n+1}$. Θα προσπαθήσουμε να γράψουμε την εξίσωση της μεθόδου σε καταλληλότερη μορφή για τους σκοπούς μας γι'αυτο εισάγουμε στον $\mathbb{P}_{q-1}(I_n)$ το εσωτερικό γινόμενο ως

$$\langle u, w\rangle = \int_{I_n} u(t)\widetilde{w}(t)dt \qquad \forall u, w \in \mathbb{P}_{q-1}(I_n)\,.$$

Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση

$$G: \mathbb{P}_{q-1}(I_n) \longrightarrow \mathbb{P}_{q-1}(I_n)$$

$$(Y.1) \quad \langle G(u), w\rangle = \int_{I_n} \left[u'(t) - f\big(t, u(t)\big)\right] \widetilde{w}(t)dt + (u^{n+} - Y^n)\widetilde{w}^{n+},$$

για κάθε $u, w \in \mathbb{P}_{q-1}(I_n)$.

Όμως το $G(u)$ είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $q-1$ άρα γράφεται στην μορφή

$$G(u)(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{q-1}t^{q-1}$$

και λαμβάνοντας υπ'όψιν το γεγονός ότι ικανοποιείται η (Υ.1) για τις συναρτήσεις $w_j(t) = t^j$, $j = 0, \dots, q-1$,οι οποίες αποτελούν βάση του $\mathbb{P}_{q-1}(I_n)$, διαπιστώνουμε ότι το πρόβλημα (Υ.1) μπορεί να γραφεί ως γραμμικό σύστημα q εξισώσεων με q αγνώστους. Έχουμε επομένως ενα σύστημα ο πίνακας του οποίου είναι πίνακας του Gram για τις ανεξάρτητες συναρτήσεις $w_0, \dots, w_{q-1}$, συνεπώς , αντιστρέψιμος. Αρα μπορούμε να γράψουμε την (Ε.1) ισοδύναμα στην μορφή

$$G(Y) = 0 \,.$$

Αρκεί επομένως να βρούμε το σημείο Υ το οποίο μηδενίζει την συνάρτηση.Σύμφωνα με την $(Y.1)$, για $u \in \mathbb{P}_{q-1}(I_n)$,έχουμε

$$\langle G(u), u\rangle = \int_{I_n} u'(t)\tilde{u}(t)dt + u^{n+}\tilde{u}^{n+} - \int_{I_n} f\big(t, u(t)\big)\tilde{u}(t)dt - Y^n\tilde{u}^{n+} \,.$$

Όμως απο την (Ε.4) έχουμε

$$(Y.2) \quad \langle G(u), u\rangle \geq \frac{1}{2}|u^{n+1}|^2 + \frac{1}{2h}\int_{I_n} |u(t)|^2 dt - \int_{I_n} f\big(t, u(t)\big)\tilde{u}(t)dt - Y^n\tilde{u}^{n+} \,.$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη Lipschitz και την ανισότητα των Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\left|\int_{I_n} f\big(t, u(t)\big)\tilde{u}(t)dt\right| = \left|\int_{I_n}\left[f\big(t, u(t)\big) - f(t,0)\right]\tilde{u}(t)dt - \int_{I_n} f(t,0)\tilde{u}(t)dt\right|$$

$$\leq L\int_{I_n}|u(t)||\tilde{u}(t)|dt + \int_{I_n}|f(t,0)||\tilde{u}(t)|dt$$

$$\leq \left(\int_{I_n}|u(t)|^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_{I_n}|\tilde{u}(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

$$+\left(\int_{I_n}|f(t,0)|^2dt\right)^{1/2}\left(\int_{I_n}|\tilde{u}(t)|^2dt\right)^{1/2}.$$

Επομένως, σύμφωνα με την (Ε.6) και την αριθμητική-γεωμετρική ανισότητα ,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{I_n} f\big(t,u(t)\big)\tilde{u}(t)dt\right| \\
&\qquad\le \frac{L}{\tau_1}\int_{I_n}|u(t)|^2dt+\frac{1}{\tau_1}\left(\int_{I_n}|f(t,0)|^2dt\right)^{1/2}\left(\int_{I_n}|u(t)|^2dt\right)^{1/2} \\
&\qquad\le \frac{L+1}{\tau_1}\int_{I_n}|u(t)|^2dt+\frac{1}{4\tau_1}\int_{I_n}|f(t,0)|^2dt
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\ -\int_{I_n} f\big(t,u(t)\big)\tilde{u}(t)dt \ge -\frac{L+1}{\tau_1}\int_{I_n}|u(t)|^2dt-\frac{1}{4\tau_1}\int_{I_n}|f(t,0)|^2dt\,.$$

Απομένει να υπολογίσουμε τον τελευταιό όρο της (Υ.2) . Προφανώς ,

$$|Y^n\tilde{u}^{n+}|\le c|Y^n|^2+\frac{1}{4h}|\tilde{u}^{n+}|^2$$

για οποιαδήποτε θετική σταθερά c , οπότε , σύμφωνα με την (Ε.5) ,

$$|Y^n\tilde{u}^{n+}|\le c|Y^n|^2+\frac{1}{4h}\int_{I_n}|u(t)|^2dt$$

$$\Rightarrow\ \ -Y^n\tilde{u}^{n+}\ge -c|Y^n|^2-\frac{1}{4h}\int_{I_n}|u(t)|^2dt\,.$$

Τώρα ,σύμφωνα με τους παραπάνω υπολογισμούς , η (Υ.2) δίνει

$$\langle G(u),u\rangle \ge \left(\frac{1}{4h}-\frac{L+1}{\tau_1}\right)\int_{I_n}|u(t)|^2dt-c|Y^n|^2-\frac{1}{4\tau_1}\int_{I_n}|f(t,0)|^2dt\,.$$

Για $h<\tau_1/(4L+4)$ ο συντελεστής του πρώτου όρου στο δεξιό μέλος είναι θετικός , οπότε για u με αρκετά μεγάλη νόρμα συμπεραίνουμε ότι $\langle G(u),u\rangle \ge 0$. Έχουμε επομένως ,σύμφωνα με το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer , την ύπαρξη ενος σημείου στο οποίο μηδενίζεται η G.

Βιβλιογραφία

1. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ , ΓΕΩΡΓΙΟΣ Δ. ΑΚΡΙΒΗΣ , ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ Α. ΔΟΥΓΑΛΗΣ

2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ , ΓΕΩΡΓΙΟΣ Δ. ΑΚΡΙΒΗΣ , ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ Α. ΔΟΥΓΑΛΗΣ

3. Understanding and implementing the finite element, Mark S. Gockenbach