Πτυχιακή Εργασία

Ταξινόμηση συστημάτων ριζών και άλγεβρες Lie

Γιαννοπούλου Κωνσταντίνα Σταυρούλα

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

2006

- *Επιβλέπων καθηγητής ήταν ο κ. Χ.Κουρουνιώτης τον οποίο θέλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερα για τη βοήθειά του στην προσπάθειά μου αυτή, καθώς και όλους όσους βοήθησαν με κάθε τρόπο.*

- *Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι:*
κ. Α.Κουβιδάκης
κ. Π.Πάμφιλος
κ. Χ.Κουρουνιώτης

Στους γονείς μου

Εισαγωγή

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να παρουσιάσει την ταξινόμηση των συστημάτων ριζών, μέσω των διαγραμμάτων Dynkin. Τα συστήματα ριζών είναι πεπερασμένα σύνολα σε έναν ευκλείδειο χώρο, τα οποία παρουσιάζουν μεγάλη συμμετρία. Το ενδιαφέρον για την ταξινόμηση των συστημάτων ριζών οφείλεται στο ότι τέτοια σύνολα εμφανίζονται με φυσικό τρόπο κατά την μελέτη διάφορων αλγεβρικών ή γεωμετρικών αντικειμένων. Σε αυτή την εργασία θα εξετάσουμε ειδικότερα πως συνδέονται με τη μελέτη των αλγεβρών Lie, μέσα από το παράδειγμα της άλγεβρας Lie $\mathrm{sl}_3(\mathbb{R})$, από την οποία προκύπτει το σύστημα ριζών A_2.

Στο κεφάλαιο 1 εξετάζουμε την ομάδα Lie $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, και βλέπουμε πως προκύπτει η αλγεβρική δομή της άλγεβρας Lie $\mathrm{sl}_3(\mathbb{R})$ στο εφαπτόμενο υπερεπίπεδο στο ουδέτερο στοιχείο $\mathrm{T_I}(\mathrm{SL}_3)$. Έπειτα, εξετάζοντας τη συζυγή δράση στην $\mathrm{sl}_3(\mathbb{R})$ της αβελιανής υποάλγεβρας H που αποτελείται από τα διαγώνια στοιχεία, κατασκευάζουμε το σύστημα ριζών A_2.

Στο κεφάλαιο 2 μελετάμε αναλυτικά τα συστήματα ριζών, ενώ στο επόμενο βλέπουμε τον τρόπο που παράγονται. Επίσης τη δράση της ομάδας Weyl στις βάσεις του συστήματος ριζών, στα χωρία Weyl και σε ολόκληρο το χώρο E. Όμως, αυτούς τους όρους θα τους δούμε αναλυτικά στο αντίστοιχο κεφάλαιο.

Στο τέταρτο κεφάλαιο εισάγουμε την έννοια του irreducible συστήματος ριζών. Τα συστήματα αυτής της κατηγορίας σχετίζονται με το πόσο είναι δυνατή η ανάλυση του συστήματος σε ορθογώνια υποσύνολα. Αυτά είναι πολύ χρήσιμα γιατί στα irreducible αναφερόμαστε στην ταξινόμηση.

Έτσι καταλήγουμε στο κεφάλαιο 5, κάνοντας την ταξινόμηση. Το κεφάλαιο αυτό αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος, θεωρούμε ένα τυχαίο irreducible σύστημα ριζών και αποδεικνύουμε ότι έχει γράφημα που ανήκει σε κάποια από τις άπειρες οικογένειες γραφημάτων $\mathrm{A}_\ell - \mathrm{B}_\ell$, όπου το ℓ είναι η τάξη του συστήματος ριζών, ή το γράφημά του είναι κάποιο από τα πεπερασμένα γραφήματα $\mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8$, F_4 ή G_2.

Τέλος, το δεύτερο μέρος αφιερώνεται στην κατασκευή κάποιων συστημάτων ριζών. Κάνοντας την κατασκευή όλων των συστημάτων ριζών που έχουν γράφημα που ανήκει στις προηγούμενες οικογένειες μπορούμε να μιλήσουμε για μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, μεταξύ των γραφημάτων και των irreducible συστημάτων.

Το έκτο κεφάλαιο όπου αποτελεί παράρτημα περιέχει όλες εκείνες τις βοηθητικές έννοιες και κυρίως λήμματα που θα χρησιμεύσουν στα προηγούμενα πέντε κεφάλαια.

Συμβολισμοί

$\mathbb{N}$	είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών
$\mathbb{N}^*$	$= \mathbb{N} - \{0\}$
$\mathbb{Z}$	είναι το σύνολο των ακεραίων αριθμών
$\mathbb{Z}^+$	είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών
$\mathbb{Z}_0^+$	$= \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών
$\mathbb{R}^+$	είναι το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών
(α, β)	είναι το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των α και β
$\Big(x, y\Big)$	είναι το διατεταγμένο ζεύγος με πρώτο στοιχείο το x και δεύτερο το y
dimX	είναι η διάσταση του διανυσματικού χώρου X, ορισμένος πάνω από κάποιο σώμα $\mathbb{K}$
cardA	είναι ο πληθικός αριθμός ή πληθάριθμος του συνόλου A
sign	είναι η απεικόνιση του προσήμου
GL(X)	είναι το σύνολο όλων των αντιστρέψιμων ενδομορφισμών του X
$\mathrm{M(n,\mathbb{R})}$ ή $\mathrm{M_n(\mathbb{R})}$	είναι το σύνολο των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{R}$
$\mathrm{SL(n,\mathbb{R})}$ ή $\mathrm{SL_n(\mathbb{R})}$	είναι η ομάδα των $n \times n$ πινάκων με ορίζουσα ίση με ένα
det(A)	είναι η ορίζουσα του πίνακα A
tr(A)	είναι το ίχνος του πίνακα A
δ_{ij}	είναι το δέλτα του Kronecker. Για δύο τυχαίους ακεραίους i και j το δ_{ij} ισούται με τη μονάδα εάν $i = j$ και με μηδέν διαφορετικά, δηλαδή

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, \; i \neq j \end{cases}$$

Κεφάλαιο 1

Άλγεβρα Lie

Θεωρούμε την ομάδα των αντιστρέψιμων πραγματικών πινάκων 3×3, με ορίζουσα ίση με 1,

$$\mathrm{SL}_3(\mathbb{R}) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) : \det\mathrm{A} = 1\},$$

την οποία για συντομία θα συμβολίζουμε SL_3.

Παρατηρούμε ότι η αλγεβρική δομή της ομάδας δίδεται από τον πολλαπλασιασμό πινάκων, ο οποίος είναι μία διαφορίσιμη απεικόνιση. Αυτό φαίνεται από την διαφορισιμότητα των στοιχείων του πίνακα που προκύπτει από το γινόμενο των άλλων δύο. Δηλαδή έχουμε

$$\mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Οπότε για τυχαία $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ παίρνουμε

$$\Big(\mathrm{A}, \mathrm{B}\Big) \longmapsto \mathrm{AB}$$

με

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \left[\, (\mathrm{AB})_{ij} = \sum a_{ik} b_{kj} \,\right]$$

όπου $i, j = 1, 2, 3$.

Επίσης, ο αντίστροφος κάθε πίνακα δίδεται μέσω των συμπαραγόντων από μία διαφορίσιμη απεικόνιση στο υποσύνολο του $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ που αποτελείται από πίνακες με μη-μηδενική ορίζουσα. Αυτό μπορούμε να το δούμε από τον τύπο

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathrm{A}} \mathrm{A}_{\,\mathrm{adj}},$$

όπου $\mathrm{A}_{\,\mathrm{adj}}$ είναι ο ανάστροφος του πίνακα των συμπαραγόντων του πίνακα A, [2] (§4.4 σελ.271).

Τα στοιχεία του είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις και όταν διαιρούνται με την ορίζουσα παραμένουν διαφορίσιμα. Συνεπώς η ομάδα SL_3 έχει ταυτόχρονα αλγεβρική και διαφορική δομή. Δηλαδή αποτελεί παράδειγμα αυτού που ονομάζουμε ομάδα Lie, [1] (§7.1 σελ.93).

Σαν υποσύνολο του $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, η SL_3 είναι η ισοσταθμική υπερεπιφάνεια

$$\{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) : \det\mathrm{A} = 1\}$$

και συνεπώς έχει σε κάθε σημείο ένα εφαπτόμενο υπερεπίπεδο. Εάν A' είναι ένα τυχαίο στοιχείο του SL_3 τότε το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο στο σημείο αυτό αποτελείται από τα διανύσματα ταχύτητας $\mathrm{B}'(0)$ όλων των διαφορίσιμων καμπυλών

$$\mathrm{B} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{SL}_3$$

οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση $\mathrm{B}(0) = \mathrm{A}'$.

Θα προσπαθήσουμε να πάρουμε πληροφορίες για την ομάδα Lie SL_3 χρησιμοποιώντας το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο στο ουδέτερο στοιχείο της ομάδας $\mathrm{T}_{\mathrm{I}}(\mathrm{SL}_3)$.

Έστω

$$\mathrm{A} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{SL}_3,$$

όπου

$$t \longmapsto \mathrm{A}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \alpha_{23}(t) \\ \alpha_{31}(t) & \alpha_{32}(t) & \alpha_{33}(t) \end{bmatrix}$$

μία διαφορίσιμη καμπύλη του SL_3 που ικανοποιεί την ισότητα $\mathrm{A}(0) = \mathrm{I}$, άρα

$$\alpha_{ij}(0) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases}$$

Βρίσκουμε το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο στο Ι. Εφόσον η $\mathrm{A}(t)$ είναι μία καμπύλη στο SL_3, ικανοποιεί την ισότητα $\det(\mathrm{A}(t)) = 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση της ορίζουσας, $\det : \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, και την υπερεπιφάνεια στάθμης 1. Υπολογίζουμε την βαθμίδα στο Ι, $\nabla\det(\mathrm{I})$.

$$\nabla\det(\mathrm{I}) = \begin{bmatrix} \partial\det(\mathrm{I})/\partial\alpha_{11} & \partial\det(\mathrm{I})/\partial\alpha_{12} & \partial\det(\mathrm{I})/\partial\alpha_{13} \\ \partial\det(\mathrm{I})/\partial\alpha_{21} & \partial\det(\mathrm{I})/\partial\alpha_{22} & \partial\det(\mathrm{I})/\partial\alpha_{23} \\ \partial\det(\mathrm{I})/\partial\alpha_{31} & \partial\det(\mathrm{I})/\partial\alpha_{32} & \partial\det(\mathrm{I})/\partial\alpha_{33} \end{bmatrix},$$

όπου α_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$ είναι οι συναρτήσεις συντεταγμένων.

Ορίζουμε στο $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ την καμπύλη $\mathrm{B}(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, με $\mathrm{B}(t) = \mathrm{I} + t\mathrm{E}_{\mathrm{ij}}$, όπου E_{ij} είναι ο θεμελιώδης πίνακας με 1 στη θέση ij και 0 παντού αλλού. Τότε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\alpha_{ij}}\det(\mathrm{I}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(\mathrm{B}(t))\,\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(\mathrm{I} + t\mathrm{E}_{\mathrm{ij}}\,)\,\Big|_{t=0} \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha_{11}} \det(\mathrm{I}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det(\mathrm{I} + t\mathrm{E}_{11}) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det\left(\begin{bmatrix} 1+t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det(1+t) \Big|_{t=0} \\
&= 1
\end{aligned}$$

και παρόμοια υπολογίζουμε τα υπόλοιπα. Συνοπτικά τα στοιχεία του πίνακα δίδονται από την παρακάτω σχέση,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_{ij}} \det(\mathrm{I}) = \delta_{ij}$$

όπου το δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker, [3] (§2.2 σελ.20). Άρα

$$\nabla \det(\mathrm{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}.$$

Οπότε, εάν Γ είναι ένα τυχαίο στοιχείο του $\mathrm{T_I}(\mathrm{SL}_3)$, δηλαδή είναι εφαπτόμενο στην ισοσταθμική υπερεπιφάνεια $\det \mathrm{A} = 1$, το Γ είναι ορθογώνιο προς το $\nabla \det(\mathrm{I})$ ως προς το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στο $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$

$$\nabla \det(\mathrm{I}) \cdot \Gamma = 0.$$

Συνεπώς, εάν γ_{ii}, για $i = 1, 2, 3$, είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα Γ, τότε $\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} = 0$. Δηλαδή,

$$\mathrm{tr}(\Gamma) = 0$$

και επειδή ο Γ είναι τυχαίο στοιχείο του $\mathrm{T_I}(\mathrm{SL}_3)$, κάθε πίνακας στο εφαπτόμενο υπερεπίπεδο έχει μηδενικό ίχνος. Άρα

$$\boxed{\mathrm{T_I}(\mathrm{SL}_3) = \{\mathrm{X} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(\Gamma) = 0\}} \tag{1.1}$$

Τώρα, θεωρούμε τη συζυγή δράση της ομάδας SL_3, [6] (Κεφ.ΙΙ §9). Εάν $\mathrm{A} \in \mathrm{SL}_3$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Psi_{\mathrm{A}} : \mathrm{SL}_3 \longrightarrow \mathrm{SL}_3, \mathrm{B} \longmapsto \mathrm{ABA}^{-1}$$

η οποία είναι ισομορφισμός ομάδων. Ειδικότερα, μέσω αυτής της απεικόνισης, διατηρείται σταθερό το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας. Αφού $\Psi_{\mathrm{A}}(\mathrm{I}) = \mathrm{AIA}^{-1}$, δηλαδή $\Psi_{\mathrm{A}}(\mathrm{I}) = \mathrm{I}$. Έτσι, παίρνοντας την παράγωγο της Ψ_{A} στο I, η απεικόνιση που προκύπτει είναι ένας αυτομορφισμός του $\mathrm{T_I(SL_3)}$. Δηλαδή

$$\mathrm{D}\Psi_{\mathrm{A}}(\mathrm{I}) : \mathrm{T_I(SL_3)} \longrightarrow \mathrm{T_I(SL_3)}.$$

Αυτό τον αυτομορφισμό το συμβολίζουμε με Ad(A). Οπότε

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{SL_3} \longrightarrow \mathrm{Aut(T_I(SL_3))}, \mathrm{A} \longmapsto \{\mathrm{Ad(A)} : \mathrm{T_I(SL_3)} \longrightarrow \mathrm{T_I(SL_3)}\}$$

Αλλά, η ομάδα $\mathrm{Aut(T_I(SL_3))}$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathrm{End(T_I(SL_3))}$, άρα αν πάρουμε την παράγωγο της Ad στο I έχουμε μία απεικόνιση

$$\mathrm{D(Ad)(I)} : \mathrm{T_I(SL_3)} \longrightarrow \mathrm{End(T_I(SL_3))},$$

την οποία συμβολίζουμε με ad,

$$\mathrm{ad} : \mathrm{T_I(SL_3)} \longrightarrow \mathrm{End(T_I(SL_3))}.$$

Υποθέτουμε ότι τα X, Y είναι δύο στοιχεία του $\mathrm{T_I(SL_3)}$, τότε θεωρούμε την εικόνα ad(X)(Y) του εφαπτόμενου διανύσματος Y μέσω της ad(X) που ορίζει το X, ως μία συνάρτηση δύο μεταβλητών.

Στον εφαπτόμενο χώρο στο I ορίζουμε μία διμελή πράξη που θα τη συμβολίζουμε με [,], όπου

$$[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] := \mathrm{ad(X)(Y)}$$

και

$$\begin{gathered} \mathrm{T_I(SL_3)} \times \mathrm{T_I(SL_3)} \longrightarrow \mathrm{T_I(SL_3)} \\ (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \longmapsto \mathrm{ad(X)(Y)} \end{gathered}$$

Θεωρούμε μία καμπύλη στο $\mathrm{SL_3}$, $\mathrm{A} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{SL_3}$ η οποία επαληθεύει τις σχέσεις $\mathrm{A}(0) = \mathrm{I}$ και $\mathrm{A}'(0) = \mathrm{X}$, τότε

$$\begin{aligned} [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] &= \mathrm{ad(X)(Y)} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{AdA}(t))\mathrm{Y}\,\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathrm{A}(t)\mathrm{Y}\mathrm{A}^{-1}(t)\Big)\,\Big|_{t=0} \\ &= \mathrm{A}'(0)\mathrm{Y}\mathrm{A}^{-1}(0) + \mathrm{A}(0)\mathrm{Y}(\mathrm{A}^{-1}(0))' \\ &= \mathrm{XY\,I} + \mathrm{I\,Y}(\mathrm{A}^{-1}(0))' \qquad (1.2) \end{aligned}$$

Όμως $\mathrm{A}(t)\mathrm{A}^{-1}(t) = \mathrm{I}$, άρα

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathrm{A}(t)\mathrm{A}^{-1}(t)\Big) = 0.$$

Δηλαδή $\mathrm{A}'(t)\mathrm{A}^{-1}(t)+\mathrm{A}(t)\Big(\mathrm{A}^{-1}(t)\Big)' = 0$ και συνεπώς $(\mathrm{A}^{-1}(t)\Big)' = -\mathrm{A}^{-1}(t)\mathrm{A}'(t)\mathrm{A}^{-1}(t)$ Οπότε για την τιμή $t = 0$ έχουμε $\Big(\mathrm{A}^{-1}(0)\Big)' = -\mathrm{A}^{-1}(0)\mathrm{A}'(0)\mathrm{A}^{-1}(0)$, και αντικαθιστώντας στη (1.2) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
[\mathrm{X},\mathrm{Y}] &= \mathrm{XY} + \mathrm{Y}\Big(-\mathrm{A}^{-1}(0)\mathrm{A}'(0)\mathrm{A}^{-1}(0)\Big) \\
&= \mathrm{XY} - \mathrm{Y\,I\,X\,I} \\
&= \mathrm{XY} - \mathrm{YX}
\end{aligned}$$

$$\boxed{[\mathrm{X},\mathrm{Y}] = \mathrm{XY} - \mathrm{YX}} \tag{1.3}$$

Επαληθεύουμε την αντισυμμετρική ιδιότητα

$$[\mathrm{X},\mathrm{Y}] = -[\mathrm{Y},\mathrm{X}], \tag{1.4}$$

για όλα τα $\mathrm{X},\mathrm{Y} \in \mathrm{T_I}(\mathrm{SL}_3)$. Υπολογίζουμε το δεύτερο μέλος της (1.4) :

$$\begin{aligned}
-[\mathrm{Y},\mathrm{X}] &= -(\mathrm{YX} - \mathrm{XY}) \\
&= \mathrm{XY} - \mathrm{YX} \\
&= [\mathrm{X},\mathrm{Y}].
\end{aligned}$$

Επίσης δείχνουμε ότι ισχύει η ταυτότητα Jacobi:

$$[\mathrm{X},[\mathrm{Y},\mathrm{Z}]] + [\mathrm{Y},[\mathrm{Z},\mathrm{X}]] + [\mathrm{Z},[\mathrm{X},\mathrm{Y}]] = 0 \tag{1.5}$$

Υπολογίζουμε κάθε προσθεταίο χωριστά,

$$\begin{aligned}
[\mathrm{X},[\mathrm{Y},\mathrm{Z}]] &= \mathrm{X}[\mathrm{Y},\mathrm{Z}] - [\mathrm{Y},\mathrm{Z}]\mathrm{X} \\
&= \mathrm{X}(\mathrm{YZ} - \mathrm{ZY}) - (\mathrm{YZ} - \mathrm{ZY})\mathrm{X} \\
&= \mathrm{XYZ} - \mathrm{XZY} - \mathrm{YZX} + \mathrm{ZYX}
\end{aligned}$$

Παρόμοια για τα υπόλοιπα,

$$[\mathrm{Y},[\mathrm{Z},\mathrm{X}]] = \mathrm{YZX} - \mathrm{YXZ} - \mathrm{ZXY} + \mathrm{XZY}$$

και

$$[\mathrm{Z},[\mathrm{X},\mathrm{Y}]] = \mathrm{ZXY} - \mathrm{ZYX} - \mathrm{XYZ} + \mathrm{YXZ}$$

Αντικαθιστούμε τους όρους στο άθροισμα και παίρνουμε το ζητούμενο. Τέλος χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.3) εύκολα επαληθεύουμε ότι η πράξη $[\ ,\ ]$ είναι διγραμμική.

Το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο $\mathrm{T_I}(\mathrm{SL}_3(\mathbb{R}))$ με την αλγεβρική δομή που προσδιορίζεται από την πράξη $[\ ,\ ]$, είναι ένα παράδειγμα αυτού που ονομάζεται άλγεβρα Lie της ομάδας Lie και συμβολίζεται το συμβολίζουμε $\mathrm{sl}(3,\mathbb{R})$.

Γενικότερα, ονομάζουμε άλγεβρα Lie ένα διανυσματικό χώρο με μία **διγραμμική διμελή πράξη**, που επαληθεύει την **αντισυμμετρική ιδιότητα** (1.4) και την **ταυτότητα** Jacobi (1.5).

Συνεχίζουμε το παράδειγμα του $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ και θεωρούμε την αντίστοιχη άλγεβρα Lie, $L = \mathrm{sl}(3,\mathbb{R})$. Όπως δείξαμε προηγουμένως αυτή αποτελείται από τους 3×3 πραγματικούς πίνακες με μηδενικό ίχνος. Αυτός ο διανυσματικός χώρος είναι διάστασης 8. Οι ακόλουθοι πίνακες αποτελούν μία βάση του.

$$h_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, h_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$e_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι τα h_1 και h_2 μετατίθενται, δηλαδή $h_1h_2 = h_2h_1$, και συνεπώς ο γραμμικός υπόχωρος που παράγουν αποτελεί μία υποάλγεβρα της $\mathrm{sl}(3,\mathbb{R})$, την οποία θα συμβολίζουμε H. Εξετάζουμε τη συζυγή δράση της H στην L. Για τυχαίο στοιχείο X της H, έχουμε

$$\mathrm{ad}(\mathrm{X}) : L \longrightarrow L$$

$$\mathrm{Y} \longmapsto \mathrm{ad}(\mathrm{X})(\mathrm{Y}) =: [\mathrm{X},\mathrm{Y}],$$

για κάθε $\mathrm{Y} \in L$. Επίσης για τα h_1, h_2 έχουμε ότι

$$h_1 = e_{11} - e_{22}$$

και

$$h_2 = e_{22} - e_{33}$$

Ακόμη, αφού $e_{ij}\, e_{kl} = \delta_{jk}\, e_{il}$, όπου $\delta_{j\,k}$ είναι το δέλτα του Kronecker, προκύπτει ότι

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{li} e_{kj}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}h_1(e_{21}) &= [h_1, e_{21}] \\
&= [e_{11} - e_{22}, e_{21}] \\
&= [e_{11}, e_{21}] - [e_{22}, e_{21}] \\
&= -e_{21} - e_{21} \\
&= -2e_{21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}h_2(e_{21}) &= [h_2, e_{21}] \\
&= [e_{22} - e_{33}, e_{21}] \\
&= [e_{22}, e_{21}] - [e_{33}, e_{21}] \\
&= e_{21}
\end{aligned}$$

Δηλαδή το e_{21} είναι ιδιοδιάνυσμα για την $\mathrm{ad}h_1$ με ιδιοτιμή -2, και ιδιοδιάνυσμα για την $\mathrm{ad}h_2$ με την ιδιοτιμή 1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}h_1(e_{31}) &= [e_{11} - e_{22}, e_{31}] \\
&= [e_{11}, e_{31}] - [e_{22}, e_{31}] \\
&= -e_{31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}h_2(e_{31}) &= [e_{22} - e_{33}, e_{31}] \\
&= [e_{22}, e_{31}] - [e_{33}, e_{31}] \\
&= -e_{31}
\end{aligned}$$

Δηλαδή το e_{31} είναι ιδιοδιάνυσμα για την $\mathrm{ad}h_1$ με ιδιοτιμή -1, και ιδιοδιάνυσμα για την $\mathrm{ad}h_2$ με την ιδιοτιμή -1.

Παρόμοια υπολογίζουμε και τα υπόλοιπα και παρατηρούμε η βάση του $\mathrm{sl}(3,\mathbb{R})$ που επιλέξαμε αποτελείται από κοινά ιδιοδιανύσματα των $\mathrm{ad}h_1, \mathrm{ad}h_2$, με τις αντίστοιχες ιδιοτιμές.

Για κάθε διάνυσμα $e_{i,j}$, $i \neq j$ και $i, j = 1, 2, 3$ υπάρχει μία γραμμική απεικόνιση, $\alpha_{i,j} : H \longrightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί την

$$\mathrm{ad}h(e_{ij}) = \alpha_{ij}(h) e_{ij}$$

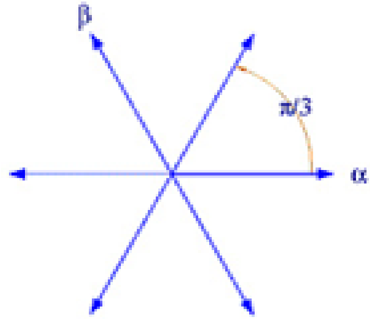
διάνυσμα	e_{12}	e_{21}	e_{13}	e_{31}	e_{23}	e_{32}	h_1	h_2
ιδιοτιμή για adh_1	2	-2	1	-1	-1	1	0	0
ιδιοτιμή για adh_1	-1	1	1	-1	2	-2	0	0
ρίζες	α_{12}	α_{21}	α_{13}	α_{31}	α_{23}	α_{32}	$-$	$-$

Τα μη-μηδενικά στοιχεία του χώρου H^* των γραμμικών συναρτήσεων στο H, τα ονομάζουμε **ρίζες** και το σύνολο

$$\Phi = \{\alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{13}, \alpha_{31}, \alpha_{23}, \alpha_{32}\}$$

λέγεται **σύστημα ριζών**.

Και αν ορίσουμε ένα κατάλληλο εσωτερικό γινόμενο στον H μπορούμε να παραστήσουμε το σύστημα ριζών στο δυϊκό χώρο H^* και να παρατηρήσουμε τη συμμετρία του σχήματος. Οι ρίζες του συστήματος ριζών βρίσκονται στις κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου.



Σχήμα 1.1: Το σύστημα ριζών της άλγεβρας $\mathrm{sl}(3, \mathbb{R})$

Γενικότερα μπορούμε να δείξουμε ότι για μία σημαντική κατηγορία αλγεβρών Lie, τις ημιαπλές άλγεβρες Lie, [9] (§3.2,σελ.11), μπορούμε να προσδιορίσουμε μία αβελιανή υποάλγεβρα H της L, και να κατασκευάσουμε με ανάλογο τρόπο ένα σύνολο συναρτήσεων ιδιοτιμών της συζυγούς δράσης της H στην L,

$$\Phi \subseteq H^*,$$

το οποίο ικανοποιεί κάποιες απλές γεωμετρικές ιδιότητες. Αυτά, τα σύνολα, τα οποία ανομάζουμε συστήματα ριζών, μπορούμε να τα ταξινομήσουμε σχετικά εύκολα, λόγω της μεγάλης συμμετρίας που παρουσιάζουν. Η ταξινόμηση των συστημάτων ριζών αποτελεί το πρώτο βήμα για την ταξινόμηση των ημιαπλών αλγεβρών Lie.

Κεφάλαιο 2

Συστήματα Ριζών

Για να καταλήξουμε στην ταξινόμηση όπου αυτός είναι ο σκοπός μας, ορίζουμε κάποια απλά μαθηματικά αντικείμενα, τα συστήματα ριζών. Εξετάζουμε τον τρόπο που παράγονται και κάποιες βασικές ιδιότητές τους.

2.1 Σύστημα Ριζών

Ορισμός. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό της ανάκλασης που περιγράφουμε στο παράρτημα, ορίζουμε ένα υποσύνολο Φ να είναι **σύστημα ριζών** στον E, όταν ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα:
(R1) Το Φ είναι πεπερασμένο, παράγει τον E και δεν περιέχει το μηδενικό διάνυσμα.
(R2) Αν $\alpha \in \Phi$ τότε τα μοναδικά συγγραμμικά διανύσματα που ανήκουν στο Φ είναι το $+\alpha$ και το $-\alpha$.
(R3) Εάν α είναι ένα στοιχείο του Φ, τότε η ανάκλαση που ορίζει αφήνει το Φ αναλλοίωτο, δηλαδή $\sigma_\alpha(\Phi) \subseteq \Phi$, και αφού η σ_α είναι ισομορφισμός τελικά έχουμε $\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$.
(R4) Για κάθε ζεύγος στοιχείων α, β του Φ ισχύει ότι:

$$\boxed{<\beta, \alpha> \in \mathbb{Z}}$$

Τα στοιχεία του συνόλου Φ ονομάζονται **ρίζες**.

Τέλος, εάν συμβολίσουμε με $-\Phi$ το σύνολο $\{-x : x \in \Phi\}$ βλέπουμε από το αξίωμα (R2) ή το (R3), να ισχύει ότι $\Phi = -\Phi$, αφού εάν $\alpha \in \Phi$ τότε το $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha \in \Phi$.

2.2 Ομάδα Weyl

Έστω Φ, ένα σύστημα ριζών στον E. Θεωρούμε την υποομάδα του GL(E) που παράγεται από τις ανακλάσεις σ_α, με α στο Φ, και τη συμβολίζουμε με $\mathcal{W}$.

Αν περιοριστούμε στα στοιχεία του Φ, έχουμε μία απεικόνιση $\Phi \longrightarrow \Phi$. Σύμφωνα με το (R3), η $\mathcal{W}$ μεταθέτει τα στοιχεία του συνόλου Φ, τα οποία σύμφωνα με το (R1) είναι πεπερασμένα σε πλήθος και το ίδιο το Φ παράγει το χώρο E. Έτσι μπορούμε να ταυτίσουμε το $\mathcal{W}$ με μία υποομάδα της συμμετρικής ομάδας του Φ. Την $\mathcal{W}$ την ονομάζουμε **ομάδα Weyl** του Φ.

Λήμμα 2.1 *Θεωρούμε ένα σύστημα ριζών* Φ *στον ευκλείδειο χώρο* E *και την ομάδα Weyl* $\mathcal{W}$. *Αν* σ *είναι ένα στοιχείο της ομάδας* GL(E) *που αφήνει το* Φ *αναλλοίωτο τότε:*

1. $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$ *για κάθε* $\alpha \in \Phi$

2. $<\beta, \alpha> = <\sigma(\beta), \sigma(\alpha)>$ *για κάθε* $\alpha, \beta \in \Phi$

Απόδειξη.

1. Έστω β μία ρίζα, τότε $\sigma(\beta) \in \Phi$ εφόσον η σ αφήνει το Φ αναλλοίωτο. Έτσι εφαρμόζοντας το γινόμενο ανακλάσεων $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ στη $\sigma(\beta)$ παίρνουμε $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\beta)) = \sigma\sigma_\alpha(\sigma^{-1}\sigma(\beta)) = \sigma\sigma_\alpha(\beta)$. Όμως το $\sigma\sigma_\alpha(\beta)$ είναι ρίζα, αφού η $\sigma\sigma_\alpha$ αφήνει αναλλοίωτο το Φ, άρα λόγω της ισότητας το $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\beta))$ είναι ρίζα. Δηλαδή η $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ αφήνει το Φ αναλλοίωτο, και αν αντικαταστήσουμε το $\sigma_\alpha(\beta)$ με $\beta - <\beta, \alpha>\alpha$ τελικά παίρνουμε:

$$\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\beta)) = \sigma(\beta) - <\beta, \alpha>\sigma(\alpha) \tag{2.1}$$

Τώρα, θεωρούμε ένα τυχαίο στοιχείο του $\sigma(\mathrm{P}_\alpha)$, έστω $\mathbf{a}$. Αυτό γράφεται στη μορφή $\sigma(\mathbf{b})$ για κάποιο $\mathbf{b} \in \mathrm{P}_\alpha$ με την ιδιότητα $(\mathbf{b}, \alpha) = 0$. Προφανώς $<\mathbf{b}, \alpha> = 0$. Οπότε αν πάρουμε την εικόνα του $\mathbf{a}$ μέσω της $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ έχουμε:

$$\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\mathbf{a}) = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-\mathbf{1}}(\sigma(\mathbf{b})) = \sigma(\mathbf{b}) - <\mathbf{b}, \alpha>\sigma(\alpha),$$

λόγω της σχέσης (2.1), και εφόσον $<\mathbf{b}, \alpha> = 0$ τελικά παίρνουμε

$$\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\mathbf{a}) = \sigma(\mathbf{b}) = \mathbf{a}.$$

Δηλαδή η $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ διατηρεί σταθερά τα σημεία του υπερεπιπέδου $\sigma(\mathrm{P}_\alpha)$. Τέλος, έχουμε το $\sigma(\alpha)$ να απεικονίζεται μεσω της $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ στο αντίθετό του. Αυτό προκύπτει κάνοντας τους υπολογισμούς, δηλαδή

$$\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\alpha)) = \sigma\sigma_\alpha(\alpha) = \sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$$

Συμπερασματικά, για το γινόμενο $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ ισχύει ότι, αφήνει το Φ αναλλοίωτο, δρα ταυτοτικά στα σημεία του υπερεπιπέδου $\sigma(\mathrm{P}_\alpha)$ και υπάρχει στοιχείο του Φ, το $\sigma(\alpha)$, που απεικονίζεται στο αντίθετό του. Άρα σύμφωνα με το Λήμμα 6.4 ικανοποιείται η σχέση:

$$\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)} \quad \text{για όλα τα } \alpha \in \Phi.$$

2. Απο το πρώτο σκέλος του Λήμματος ισχύει ότι $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$ και επειδή

$$\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\beta)) = \sigma(\beta) - <\beta, \alpha> \sigma(\alpha)$$

και

$$\sigma_{\sigma(\alpha)}(\sigma(\beta)) = \sigma(\beta) - <\sigma(\beta), \sigma(\alpha)> \sigma(\alpha)$$

παίρνουμε

$$<\beta, \alpha> \sigma(\alpha) = <\sigma(\beta), \sigma(\alpha)> \sigma(\alpha)$$

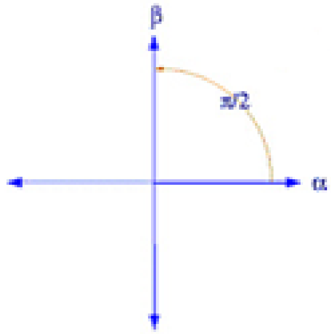
για κάθε α, β στο Φ και εφόσον το α δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα έχουμε $<\beta, \alpha> = <\sigma(\beta), \sigma(\alpha)>$ για όλα τα $\alpha, \beta \in \Phi$.

$\square$

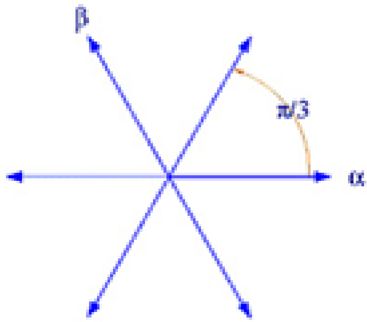
Ορισμός. Έστω Φ ένα σύστημα ριζών στον ευκλείδειο χώρο E, διάστασης ℓ. Ορίζουμε η **τάξη** του Φ που τη συμβολίζουμε με $\operatorname{rank}\Phi$, να είναι ίση με τη διάσταση του E. Άρα

$$\boxed{\operatorname{rank}\Phi := \dim \mathrm{E} = \ell}$$

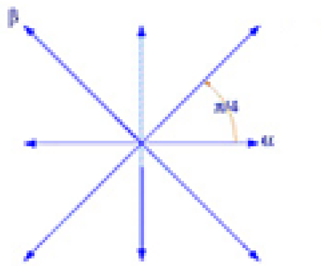
Παρακάτω δίδουμε ορισμένα παραδείγματα συστημάτων ριζών. Στην περίπτωση τάξεως ένα, το σύστημα περιγράφεται από δύο αντίθετα διανύσματα. Ενώ, εάν ένα σύστημα είναι τάξεως δύο, αναπαριστάται με ένα από τα τέσσερα πιθανά σχήματα:



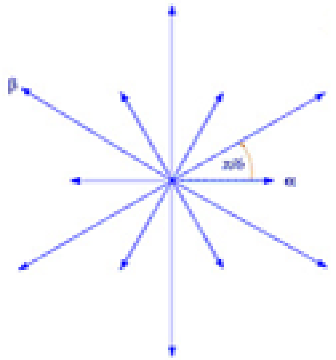
Σχήμα 2.1: $A_1 \times A_1$



Σχήμα 2.2: A_2



Σχήμα 2.3: B_2



Σχήμα 2.4: G_2

Επαληθεύουμε τα αξιώματα (R1)-(R4) για το σύστημα $A_1 \times A_1$. Σε αυτή την περίπτωση ο χώρος Ε παράγεται από δύο διανύσματα, έστω α και β, για τα οποία προς το παρόν υποθέτουμε ότι ανήκουν στο Φ, έχουν ίσο μήκος και τέλος σχηματίζουν ορθή γωνία. Τα υπερεπίπεδα που ορίζουν τα α και β, P_α και P_β αντίστοιχα είναι διάστασης ένα, δηλαδή η διάσταση όλου του χώρου μειωμένη κατά ένα.

Το διάνυσμα α ορίζει την ανάκλαση σ_α που απεικονίζει το α στο αντίθετό του, το $-\alpha$. Ενώ το β μέσω αυτού του μετασχηματισμού παραμένει σταθερό, αφού ανήκει στο υπερεπίπεδο P_α. Ανάλογα το β, ορίζει τη σ_β που απεικονίζει το β στο $-\beta$ και διατηρεί σταθερό το $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$, διότι το $-\alpha$ ανήκει στο P_β.

Εφόσον υποθέσαμε ότι τα α, β ανήκουν στο Φ, και τα υπόλοιπα διανύσματα που προκύπτουν από τις ανακλάσεις, είναι πολλαπλάσια αυτών των δύο, συμπεραίνουμε ότι το Φ παράγει τον Ε. Επίσης το σύνολο Φ είναι πεπερασμένο και επιπλέον τα αρχικά διανύσματα είναι μη-μηδενικά, άρα οι εικόνες τους δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα. Συνεπώς, μετά τους τελευταίους τρείς ισχυρισμούς ικανοποιείται το (R1.)

Από τον ορισμό της ανάκλασης, το α μέσω της σύνθεσης $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ απεικονίζεται στο $-\alpha$ και το β μέσω της ίδιας στροφής πηγαίνει στο $-\beta$, άρα ικανοποιείται το (R2.)

Για να δείξουμε ότι ισχύει το αξίωμα (R3), αρκεί να θεωρήσουμε ένα τυχαίο διάνυσμα του Φ και μέσω της ανάκλασης που ορίζει να πάρουμε πάλι στοιχείο του συνόλου. Κάτι τέτοιο ισχύει, αφού όποια ανάκλαση κι αν θεωρήσουμε θα πάρουμε $\alpha, -\alpha, \beta$ ή $-\beta$, δηλαδή το διάνυσμα θα πηγαίνει στο αντίθετό του ή θα διατηρείται σταθερό.

Τώρα, το μόνο που μένει να αποδείξουμε ώστε το Φ να αποτελεί σύστημα ριζών, είναι το αξίωμα (R4). Για όλα τα πιθανά ζεύγη διανυσμάτων στο Φ η ποσότητα $<,>$ να είναι ακέραιος αριθμός. Ύστερα από απλές πράξεις στον τύπο του $<\,,\,>$, με δεδομένη τη γωνία των α, β, έχουμε $<\alpha, \beta> = <-\alpha, -\beta> = 0 \in \mathbb{Z}$, και $<\alpha, -\alpha> = <\beta, -\beta> = -2 \in \mathbb{Z}$. Επομένως ικανοποιείται και το τέταρτο αξίωμα. Άρα το Φ είναι σύστημα ριζών.

Ας δούμε πιο αναλυτικά ποια είναι η διάταξη των ριζών, των προηγούμενων συστημάτων στο χώρο και τι πληροφορίες μπορούμε να πάρουμε για τα σχετικά μήκη των ριζών αυτών.

Παρατήρηση 2.2 *Εάν ϑ είναι η γωνία μεταξύ των ριζών α και β, τότε ισχύει*

$$\begin{aligned} <\beta, \alpha> &= 2 \cdot (\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha) \\ &= 2 \cdot \| \beta \| \cdot \cos\vartheta / \| \alpha \| \end{aligned}$$

Επομένως για να ικανοποιείται το αξίωμα (R4) *του ορισμού θα πρέπει ο αριθμός* $2 \cdot \| \beta \| \cdot \cos\vartheta / \| \alpha \|$ *να είναι ακέραιος. Έτσι περιορίζονται οι επιλογές των μηκών, η μεταξύ τους γωνία, άρα και το πλήθος των διανυσμάτων που αποτελούν ρίζα.*

Επιπλέον, ισχύει ότι $<\alpha, \beta><\beta, \alpha> = 4 \cdot \cos^2\vartheta$ *το οποίο είναι μη αρνητικός αριθμός, αφού το τετράγωνο του συνημιτόνου μίας γωνίας φράσσεται από το 0 και το 1. Εύκολα συμπεραίνουμε ότι*

$$<\alpha, \beta><\beta, \alpha> \leq 4$$

και

$$\operatorname{sgn}\Big(<\alpha, \beta>\Big) = \operatorname{sgn}\Big(<\beta, \alpha>\Big)$$

Ενώ στην περίπτωση που οι α, β δεν είναι συγγραμμικές, δηλαδή η ϑ είναι διαφορετική των 0 και π έχουμε $\cos^2\vartheta \neq 1$, *άρα*

$$<\alpha, \beta><\beta, \alpha> < 4$$

Τώρα, θεωρούμε δύο μη συγγραμμικές ρίζες του Φ, α και β, με $\| \beta \| \geq \| \alpha \|$. Τότε από τον περιορισμό $0 \leq <\alpha, \beta><\beta, \alpha> < 4$ έχουμε τις τιμές των $<\alpha, \beta>$, $<\beta, \alpha>$ να δίδονται από τον ακόλουθο πίνακα

$\boxed{\text{Πίνακας } (\pi)}$

$<\alpha, \beta>$	$<\beta, \alpha>$	ϑ	$\| \beta \|^2 / \| \alpha \|^2$
0	0	$\pi/2$	δεν ορίζεται
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

όπου η τρίτη στήλη υπολογίζεται από τη σχέση $<\alpha,\, \beta><\beta,\, \alpha> = 4 \cdot \cos^2\vartheta$. Και για την τελευταία έχουμε $<\alpha,\, \beta> = 2\| \beta \| \cos\vartheta / \| \alpha \|$, συνεπώς

$$\begin{aligned} \| \beta \|^2 / \| \alpha \|^2 &= <\beta,\, \alpha><\beta,\, \alpha>/4\cos^2\vartheta \\ &= <\beta,\, \alpha><\beta,\, \alpha>/<\alpha,\, \beta><\beta,\, \alpha> \\ &= <\beta,\, \alpha>/<\alpha,\, \beta>. \end{aligned}$$

Συνεπώς, από τον Πίνακα π, αιτιολογείται ο τρόπος που προκύπτουν τα προηγούμενα συστήματα ριζών δεύτερης τάξης.

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια του πίνακα αποδεικνύουμε το παρακάτω Λήμμα, σύμφωνα με το οποίο, ανάλογα με τη γωνία των δύο ριζών, μπορούμε να μάθουμε εάν το άθροισμα ή η διαφορά τους αποτελεί ρίζα.

Λήμμα 2.3 *Έστω α, β δύο μη συγγραμμικές ρίζες, τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Εάν η γωνία που σχηματίζουν οι α, β είναι οξεία, δηλαδή ισχύει $(\alpha, \beta) > 0$, τότε το $\alpha - \beta$ αποτελεί ρίζα.*

2. *Εάν η γωνία που σχηματίζουν οι α, β είναι αμβλεία, δηλαδή ισχύει $(\alpha, \beta) < 0$, τότε το $\alpha + \beta$ αποτελεί ρίζα.*

Απόδειξη.

1. Δείχνουμε τη συνεπαγωγή:

$$(\alpha, \beta) > 0 \Longrightarrow (\alpha - \beta) \in \Phi$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι το διάνυσμα $\alpha - \beta$ είναι ρίζα. Αρκεί να το παραστήσουμε ως εικόνα ενός στοιχείου του Φ μέσω κάποιας ανάκλασης. Έτσι απο το αξίωμα (R3) του ορισμού του συστήματος ριζών εξασφαλίζουμε ότι το $\alpha - \beta$ θα είναι ρίζα.

Από την υπόθεση έχουμε ότι $(\alpha, \beta) > 0$ και ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε ότι $(\beta, \alpha) > 0$, εφόσον το εσωτερικό γινόμενο είναι συμμετρικό. Επίσης έχουμε την ποσότητα $< \beta, \alpha >$ να δίνεται από τον τύπο: $<\beta, \alpha> = 2 \cdot (\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha)$, δηλαδή $<\beta,\, \alpha> = 2 \cdot (\beta, \alpha)/\| \alpha \|^2$. Όμως $\| \alpha \|^2 > 0$, αφού από το αξίωμα (R1) πρέπει $\alpha \neq \vec{0}$. Έτσι απο τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνουμε ότι:

$$\operatorname{sgn}\Big(<\beta,\, \alpha>\Big) = \operatorname{sgn}\Big((\beta, \alpha)\Big).$$

Εδώ συγκεκριμένα έχουμε ότι $(\beta, \alpha) > 0$, οπότε από την προηγούμενη ισότητα πρέπει: $< \beta,\, \alpha >> 0$. Προφανώς και $< \alpha,\, \beta >> 0$. Όμως από τον Πίνακα π παρατηρούμε ότι οι ανισότητες αυτές ικανοποιούνται όταν τουλάχιστον ένα από τα $<\alpha,\, \beta>, <\beta,\, \alpha>$ είναι ίσο με 1, οπότε διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Εάν $<\alpha, \beta>= 1$, τότε η ανάκλαση που ορίζει η ρίζα β όταν εφαρμόζεται στην α δίδει: $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - <\alpha, \beta>\beta = \alpha - \beta$. Επομένως $\alpha - \beta \in \Phi$, αφού από το αξίωμα (R3) του ορισμού του συστήματος ριζών η σ_β αφήνει αναλλοίωτο το Φ.

- Εάν $<\beta, \alpha>= 1$, τότε η ανάκλαση που ορίζει η ρίζα α όταν εφαρμόζεται στην β δίδει: $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - <\beta, \alpha>\alpha = \beta - \alpha$. Άρα $\beta - \alpha \in \Phi$, εφόσον η σ_α αφήνει αναλλοίωτο το Φ. Επομένως η ανάκλαση του $\beta - \alpha$ ως προς τον εαυτό της είναι ίση με $\sigma_{\beta-\alpha}(\beta - \alpha) = -(\beta - \alpha) = \alpha - \beta$ και $\alpha - \beta \in \Phi$, από το αξίωμα (R3) του ορισμού του Φ.

2. Δείχνουμε τη συνεπαγωγή:

$$(\alpha, \beta) < 0 \Longrightarrow (\alpha + \beta) \in \Phi$$

Από το δεύτερο αξίωμα του ορισμού του Φ, το $-\beta$ είναι ρίζα και είναι μη συγγραμμική της α, αφού οι α, β είναι μη συγγραμμικές. Εφαρμόζουμε το πρώτο σκέλος του Λήμματος στις ρίζες α, $-\beta$. Οπότε $(\alpha, -\beta) = -(\alpha, \beta) > 0$ άρα το $\alpha - (-\beta)$ είναι ρίζα, δηλαδή το $\alpha + \beta$ είναι ρίζα.

□

2.3 Strings

Ορισμός. Έστω α, β δύο μη-συγγραμμικές ρίζες του Φ. Το σύνολο των ριζών που γράφονται στην μορφή $\beta + i\alpha$ για κάποιο $i \in \mathbb{Z}$, αποτελούν το **string του** α **που περνά από το** β, ή διαφορετικά το α-**string ως προς** β. Ανάλογα, στο string του β που περνά από το α ανήκουν εκείνες οι ρίζες της μορφής $\alpha + j\beta, j \in \mathbb{Z}$.

Σημείωση 2.4 *Το α-string ως προς β είναι οι ρίζες που βρίσκονται στην ευθεία που διέρχεται από το β και είναι παράλληλη της ρίζας α.*

Θεωρούμε τους μέγιστους φυσικούς αριθμούς r, q για τους οποίους τα διανύσματα $\beta - r\alpha$ και $\beta + q\alpha$, για $r, q \in \mathbb{Z}_0^+$, είναι ρίζες. Δηλαδή οι δύο αυτές ρίζες είναι τα άκρα του string.

Παρακάτω δείχνουμε ότι ένα string ριζών δε διασπάται από κάποιο διάνυσμα που δεν είναι ρίζα.

Λήμμα 2.5 *Έστω α, β δύο μη-συγγραμμικές ρίζες του Φ. Εάν θεωρήσουμε το α-string ως προς β, τότε αυτό δε διασπάται. Δηλαδή για κάθε ακέραιο i με $-r \leq i \leq q$, το διάνυσμα $\beta + i\alpha$ είναι ρίζα.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιο i, μεταξύ των r, q όπως τα ορίσαμε παραπάνω, για το οποίο το διάνυσμα $\beta + i\alpha$ δεν ανήκει στο Φ. Τότε μπορούμε να βρούμε p, s σε αυτό το διάστημα, με $p < s$ τέτοιο ώστε, $\beta + p\,\alpha \in \Phi$ ενώ $\beta + (p+1)\alpha \notin \Phi$ και $\beta + (s-1)\alpha \notin \Phi$ και $\beta + s\alpha \in \Phi$.

Έχουμε $\beta + (p+1)\alpha \notin \Phi$, άρα σύμφωνα με το Λήμμα 2.3 ισχύει ότι

$$(\alpha, \beta + p\,\alpha) \geq 0$$

Αλλά λόγω της γραμμικότητας $(\alpha, \beta + p\,\alpha) = (\alpha, \beta) + p\,(\alpha, \alpha)$, οπότε έχουμε $(\alpha, \beta) + p\,(\alpha, \alpha) \geq 0$. Ομοίως για το $\beta + (s-1)\alpha \notin \Phi$ παίρνουμε την ανισότητα $(\alpha, \beta) + s\,(\alpha, \alpha) \leq 0$. Από τις δύο τελευταίες ανισότητες έχουμε

$$p\,(\alpha, \alpha) \geq s(\alpha, \alpha)$$

και επειδή το α είναι ρίζα, από το (R1) παίρνουμε $p \geq s$. Αντίφαση, διότι αρχικά υποθέσαμε ότι $p < s$. Άρα δεν υπάρχει διάνυσμα στο α-string ως προς β, που δεν είναι ρίζα.

□

Λήμμα 2.6 *Η ανάκλαση σ_α αφήνει αναλλοίωτο το α-string ως προς β.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μία τυχαία ρίζα του α-string ως προς β. Τότε θα έχει την μορφή $\beta + i\alpha$ για κάποιο $i \in \mathbb{Z}$. Εφαρμόζουμε σε αυτή την ανάκλαση σ_α και έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(\beta + i\alpha) &= \sigma_\alpha(\beta) + \sigma_\alpha(i\alpha) \\ &= \beta - <\beta,\, \alpha>\alpha - i\alpha \\ &= \beta - (<\beta,\, \alpha> + i)\alpha \end{aligned}$$

Αλλά από το (R4) ο αριθμός $<\beta,\, \alpha>$ είναι ακέραιος και αφού και το $i \in \mathbb{Z}$, η ρίζα $\beta - (<\beta,\, \alpha> + i)\alpha$ ανήκει στο α-string ως προς β.

□

Πιο συγκεκριμένα, δείχνουμε ότι τα δύο άκρα του string μετατίθονται. Όπως δείξαμε παραπάνω $\sigma_\alpha(\beta + i\alpha) = \beta - (<\beta,\, \alpha> + i)\alpha$, δηλαδή

$$\sigma_\alpha : \beta + i\alpha \longmapsto \beta - (<\beta,\, \alpha> + i)\alpha$$

Επομένως, εάν έχουμε δύο συντελεστές n, m για τους οποίους ισχύει $n < m$ τότε:

$$-(<\beta,\, \alpha> + n) > -(<\beta,\, \alpha> + m) \tag{2.2}$$

Όταν εφαρμόζεται στις ρίζες η ανάκλαση σ_α, ορίζουμε την απεικόνιση των συντελεστών τ, $\tau : s \longmapsto t$, εάν $\sigma_\alpha : \beta + s\alpha \longmapsto \beta + t\alpha$, με s, t ανάμεσα στα r, q.

Υποθέτουμε ότι η ρίζα $\beta + r\alpha$ απεικονίζεται σε κάποια ρίζα του string διαφορετική της ακραίας ρίζας. Άρα $\tau(-r) < q$, τότε υπάρχει κάποιο j τέτοιο ώστε $\tau(j) = q$. Αλλά, επειδή η $\beta - r\alpha$ είναι στο άκρο του string έχουμε ότι $-r < j$, αλλά και $\tau(-r) < \tau(j)$.

Αυτό έρχεται σε αντίφαση με τη (2.2), αφού διατηρείται η διάταξη των συντελεστών μετά την εφαρμογή της σ_α.

Επίσης, έχουμε ότι $\sigma_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - (<\beta, \alpha> + q)\alpha$, αλλά από τα προηγούμενα ισχύει $\sigma_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - r\alpha$, άρα $r - q = <\beta, \alpha>$.

Τότε, εάν $r = 0$, το $|<\beta, \alpha>| + 1$ δίνει το μήκος του string, όπου σύμφωνα με τον Πίνακα π είναι το πολύ 4. Ενώ στη γενική περίπτωση το μήκος του string, δίνεται από τον αριθμό $r + q + 1$.

Κεφάλαιο 3

Βάση συστήματος ριζών

Συνεχίζουμε την μελέτη των συστημάτων ριζών, κυρίως ότι αφορά τη δράση της ομάδας Weyl στις βάσεις του συστήματος ριζών, στα χωρία Weyl αλλά και σε ολόκληρο τον ευκλείδειο χώρο. Όμως, όλα αυτά θα τα δούμε αναλυτικά στην πορεία.

Ορισμός. Θεωρούμε ένα υποσύνολο Δ του συστήματος ριζών Φ, στον ευκλείδειο χώρο E. Το Δ είναι **βάση** του Φ όταν ισχύει:
(B1) Το Δ είναι βάση του E.
Αν ℓ είναι η διάσταση του E τότε $\operatorname{card}(\Delta) = \ell$ και το Δ είναι ένα σύνολο ριζών με γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα που παράγουν τον E.
(B2) Κάθε ρίζα β του Φ, γράφεται με μοναδικό τρόπο στην μορφή:

$$\boxed{\beta = \sum k_\alpha \alpha \ , \alpha \in \Delta}$$

όπου οι συντελεστές k_α είναι σταθεροί ακέραιοι αριθμοί όλοι μη-αρνητικοί ή όλοι μη-θετικοί.

Οι ρίζες της βάσης του Φ καλούνται **απλές ρίζες**.

Σημειώνουμε ότι το Δ είναι γνήσιο υποσύνολο του Φ. Αρκεί να θεωρήσουμε ένα στοιχείο του Δ, έστω α, τότε αυτό είναι ρίζα του Φ όπως και το $-\alpha$, βάσει του (R2). Όμως το $-\alpha$ δεν ανήκει στο Δ, διότι τότε το Δ δε θα ήταν γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο, όπως απαιτεί ο ορισμός του. Άρα $\Delta \neq \Phi$.

Σημείωση 3.1 *Η τυχαία ρίζα β εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης και σύμφωνα με το* (B2) *ανήκουν είτε στο $\mathbb{Z}_0^+$ είτε στο $\mathbb{Z}_0^-$. Διευκρινίζουμε λοιπόν, ότι τουλάχιστον ένας από αυτούς πρέπει να είναι μη-μηδενικός. Διότι, εάν όλα τα k_α είναι ίσα με το μηδέν, τότε παίρνουμε ως στοιχείο του συνόλου Φ το μηδενικό διάνυσμα, το οποίο, εξ' ορισμού, δεν περιέχεται σε αυτό. Αντίφαση.*

Παρατήρηση 3.2 *Γεωμετρικά, όλες οι ρίζες βρίσκονται στον κυρτό κώνο που παράγεται από τις απλές ρίζες. Αυτό οφείλεται στο* (B2) *του ορισμού της βάσης του* Φ, *και συγκεκριμένα στους ομόσημους συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού των ριζών.*

Η βάση Δ ορίζει μία μερική διάταξη «$\prec$» στα στοιχεία του χώρου Ε. Για δύο συγκρίσιμα στοιχεία γράφουμε $\beta \prec \alpha$ εάν και μόνον εάν, είτε η διαφορά $\alpha - \beta$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των απλών ριζών με θετικούς πραγματικούς συντελεστές, δηλαδή

$$\alpha - \beta = \sum k_x x$$

με $x \in \Delta, k_x \in \mathbb{R}^+$, είτε ικανοποιείται η ισότητα

$$\alpha = \beta.$$

Μπορούμε να περιορίσουμε τη διάταξη $\prec$ στο σύνολο των ριζών Φ. Τότε γράφουμε $\beta \prec \alpha$, εάν και μόνον εάν το $\alpha - \beta$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των απλών ριζών με θετικούς ακέραιους συντελεστές, δηλαδή

$$\alpha - \beta = \sum k_x x,$$

με $x \in \Delta, k_x \in \mathbb{Z}^+$, ή διαφορετικά

$$\alpha = \beta.$$

Τώρα, εάν έχουμε τη διάταξη $\prec$ στο σύνολο Φ, αλλά συγκρίνουμε τα στοιχεία του με το μηδενικό διάνυσμα και μόνο, τότε αυτή η σχέση μετατρέπεται σε μία απλή ιδιότητα των ριζών του Φ. Οι ρίζες θα είναι είτε $\succ 0$, είτε $\prec 0$.

Εάν $\beta \succ 0$, η β εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός απλών ριζών με μη-αρνητικούς συντελεστές, άρα

$$\beta = \textstyle\sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha, \text{ όπου } k_\alpha \in \mathbb{Z}_0^+$$

και λέμε ότι η β είναι **θετική** ρίζα.

Ενώ, όταν $\beta \prec 0$, το β γράφεται ως

$$\beta = \textstyle\sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha, \text{ όπου } k_\alpha \in \mathbb{Z}_0^-$$

και λέμε ότι η β είναι **αρνητική** ρίζα.

Το σύνολο των θετικών και αρνητικών ριζών ως προς τη Δ συμβολίζεται με Φ^+ και Φ^- αντίστοιχα, για τα οποία ισχύει $\Phi^+ = -\Phi^-$ και $\Phi^+ \cap \Phi^- = \varnothing$.

Για το πρώτο αρκεί να δείξουμε τους δύο εγκλεισμούς. Αν $\beta \in \Phi^-$, τότε γράφεται ως: $\sum_{\alpha \in \Delta} -m_\alpha \alpha$, όπου $m_\alpha \geq 0$, άρα λόγω γραμμικότητας $\beta \in -\Phi^+$.

Για τον άλλον εγκλεισμό θεωρούμε ένα στοιχείο $\beta \in -\Phi^+$. Τότε αυτό γράφεται στην μορφή $-\sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha$, δηλαδή $\sum_{\alpha\in\Delta} -k_\alpha \alpha$, με $k_\alpha \geq 0$, οπότε $\beta \in \Phi^-$.

Επίσης, οποιοδήποτε διάνυσμα που ανήκει στην τομή των δύο αυτών συνόλων αναγκαστικά είναι το μηδενικό. Όμως αυτό είναι αδύνατο λόγω του (R1). Άρα η τομή τους είναι το κενό σύνολο.

Ορισμός. Ορίζουμε το **ύψος** μίας ρίζας β ως προς τη βάση Δ, να είναι το άθροισμα το συντελεστών k_α και το συμβολίζουμε με $\mathrm{ht}\,\beta$, δηλαδή,

$$\boxed{\mathrm{ht}\,\beta = \textstyle\sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha}$$

Πρόταση 3.3 *Εάν α, β είναι δύο θετικές ρίζες που έχουν ως άθροισμα ρίζα, την $\alpha + \beta$, τότε αυτή είναι θετική.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι η α είναι θετική ρίζα. Επομένως γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης Δ, με συντελεστές στο $\mathbb{Z}_0^+$. Δηλαδή

$$\alpha = k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_\ell x_\ell,$$

με $\ell = \dim\mathrm{E}$, $x_i \in \Delta$ για όλα τα $i \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ και $k_j \in \mathbb{Z}_0^+$ για όλα τα $j \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$. Ομοίως για τη θετική ρίζα β,

$$\beta = n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_\ell x_\ell,$$

όπου $n_j \in \mathbb{Z}_0^+$ για όλα τα $j \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$.

Επομένως, υπολογίζοντας το άθροισμα $\alpha + \beta$ έχουμε

$$\alpha + \beta = (k_1 + n_1)x_1 + (k_2 + n_2)x_2 + \ldots + (k_\ell + n_\ell)x_\ell,$$

με $k_j + n_j \in \mathbb{Z}_0^+$, ως άθροισμα μη-αρνητικών ακεραίων, για όλα τα $j \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$. Συνεπώς, η ρίζα $\alpha + \beta$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης, με μη-αρνητικούς ακέραιους συντελεστές, άρα είναι θετική.

$\square$

Λήμμα 3.4 *Εάν Δ είναι μία βάση του Φ, τότε για διαφορετικά α, β στο Δ ισχύει ότι: $(\alpha, \beta) \leq 0$ και $\alpha - \beta$ δεν είναι ρίζα.*

Απόδειξη. Θα το δείξουμε με άτοπο. Υποθέτουμε ότι για διαφορετικές ρίζες α, β στο Δ ισχύει ότι $(\alpha, \beta) > 0$. Τότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.3, έχουμε ότι το $\alpha - \beta$ είναι ρίζα. Θέτουμε τη διαφορά $\alpha - \beta$ να είναι ίση με γ, άρα

$\gamma = \alpha - \beta = 1 \cdot \alpha + (-1) \cdot \beta$. Δηλαδή η ρίζα γ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης με δύο ετερόσημους συντελεστές.

Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο, αφού το (B2) απαιτεί όλοι οι συντελεστές να είναι ομόσημοι ώστε η γ να είναι ρίζα. Οπότε η αρχική υπόθεση ότι $(\alpha, \beta) > 0$ όπως και το συμπέρασμά της, ότι το $\alpha - \beta$ είναι ρίζα είναι λανθασμένη.

□

Πριν δείξουμε ότι σε κάθε σύστημα ριζών Φ αντιστοιχεί μία βάση και περιγράψουμε τον τρόπο κατασκευής της ορίζουμε κάποιες βοηθητικές έννοιες.

Ορισμός. Για κάθε στοιχείο γ του E, θεωρούμε το σύνολο όλων των ριζών που βρίσκονται στη θετική πλευρά που ορίζει το ορθογώνιο υπερεπίπεδο στο γ, και το συμβολίζουμε με $\Phi^+(\gamma)$:

$$\boxed{\Phi^+(\gamma) = \{\alpha \in \Phi | (\gamma, \alpha) > 0\}}$$

Ανάλογα ορίζεται το σύνολο των ριζών που βρίσκονται στην αρνητική πλευρά. Συμβολίζεται με $-\Phi^+(\gamma)$ και ισούται με:

$$-\Phi^+(\gamma) = \{-\alpha : \alpha \in \Phi^+(\gamma)\} = \{\alpha \in \Phi : (\gamma, \alpha) < 0\}.$$

Προφανώς τα $\Phi^+(\gamma), -\Phi^+(\gamma)$ είναι ξένα μεταξύ τους.

Ορισμός. Ένα στοιχείο γ του E λέγεται **regular**, όταν ανήκει στο σύνολο $\mathrm{E} - \bigcup \mathrm{P}_\alpha$. Διαφορετικά ονομάζεται **singular**.

Αποδεικνύουμε κάποια σημαντικά λήμματα, σχετικά με το regular διάνυσμα, που θα χρησιμοποιηθούν παρακάτω.

Λήμμα 3.5 *Εάν $\gamma \in \mathrm{E}$ είναι regular και σ είναι ένα στοιχείο της ομάδας Weyl $\mathcal{W}$, τότε το $\sigma(\gamma)$ είναι regular.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον ορισμό του *regular* αρκεί να δείξουμε ότι το $\sigma(\gamma)$ είναι ένα στοιχείο του E, τέτοιο ώστε να μην ανήκει σε κανένα υπερεπίπεδο ανάκλασης. Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι το $\sigma(\gamma)$ ανήκει στο E και επιπλέον σχηματίζει μη μηδενικό εσωτερικό γινόμενο με κάθε ρίζα.

Το πρώτο σκέλος του συλλογισμού είναι προφανές. Το $\mathcal{W}$ είναι υποομάδα των αυτομορφισμών του E, οπότε αμέσως συμπεραίνουμε ότι $\sigma(\gamma) \in \mathrm{E}$.

Τώρα, θέλουμε να δείξουμε ότι το $\sigma(\gamma)$ έχει μη μηδενικό εσωτερικό γινόμενο με κάθε ρίζα. Έχουμε τη σ να είναι ισομετρία, ως στοιχείο της ομάδας Weyl, άρα $(x, y) = (\sigma(x), \sigma(y)),\ \forall x, y \in \mathrm{E}$. Συνεπώς και για γ, α, με $\alpha \in \Phi$, έχουμε:

$$(\gamma, \alpha) = (\sigma(\gamma), \sigma(\alpha)) \tag{3.1}$$

Όμως το γ είναι $regular$, άρα από τον ορισμό του ανήκει στο σύνολο $\mathrm{E}-\bigcup \mathrm{P}_\alpha$, δηλαδή $(\gamma,\alpha) \neq 0$ για όλα τα $\alpha \in \Phi$. Οπότε από τη σχέση (3.1) συμπεραίνουμε ότι $(\sigma(\gamma),\sigma(\alpha)) \neq 0$.

Αλλά, εφόσον η ομάδα Weyl αφήνει αναλλοίωτο το Φ, για κάθε ρίζα $\beta \in \Phi$ υπάρχει κάποιο $\alpha \in \Phi$ τέτοιο ώστε $\beta = \sigma(\alpha)$. Επομένως:

$$(\sigma(\gamma),\beta) = (\sigma(\gamma),\sigma(\alpha)) \neq 0, \ \ \forall \beta \in \Phi \tag{3.2}$$

Δηλαδή το $\sigma(\gamma)$ σχηματίζει μη μηδενικό εσωτερικό γινόμενο με κάθε στοιχείο του Φ.

□

Πρόταση 3.6 *Εάν γ είναι ένα regular στοιχείο του E, τότε*

$$\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma).$$

Απόδειξη. Δείχνουμε τον εγκλεισμό $\subseteq$: Αν β είναι μία ρίζα του Φ και το γ ένα regular στοιχείο του E, τότε μεταξύ τους σχηματίζεται εσωτερικό γινόμενο γνήσια θετικό ή γνήσια αρνητικό, δηλαδή $(\gamma,\beta) > 0$ ή $(\gamma,\beta) < 0$. Αυτό οφείλεται στην ιδιότητα του γ να είναι regular. Επομένως δεν μπορεί να ανήκει σε κανένα υπερεπίπεδο που ορίζεται από ρίζα. Συνεπώς δεν είναι σημείο του κάθετου υπερεπιπέδου στη β. Από την πρώτη ανισότητα αμέσως συμπεραίνουμε ότι η ρίζα β ανήκει στο $\Phi^+(\gamma)$, ενώ από τη δεύτερη ότι η β ανήκει στο $-\Phi^+(\gamma)$. Δηλαδή $\beta \in \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$.

Δείχνουμε τον εγκλεισμό $\supseteq$: Έστω ότι $\beta \in \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$, τότε $\beta \in \Phi^+(\gamma)$ ή $\beta \in -\Phi^+(\gamma)$. Αν $\beta \in \Phi^+(\gamma)$ τότε από τον ορισμό του $\Phi^+(\gamma)$, $\beta \in \Phi$. Αν $\beta \in -\Phi^+(\gamma)$ τότε από τον ορισμό του $-\Phi^+(\gamma)$ πάλι το $\beta \in \Phi$. Δηλαδή σε κάθε περίπτωση το β ανήκει στο Φ.

□

Λήμμα 3.7 *Έστω* E *ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, Φ ένα σύστημα ριζών του και Δ μία βάση του Φ. Εάν το γ είναι ένα στοιχείο του* E *που σχηματίζει θετικό εσωτερικό γινόμενο με κάθε απλή ρίζα, τότε είναι regular διάνυσμα.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι γ ανήκει στο σύνολο $\mathrm{E} - \bigcup \mathrm{P}_\alpha$, με $\alpha \in \Phi$. Ισοδύναμα, ότι το γ δεν περιέχεται σε κανένα υπερεπίπεδο που ορίζουν οι ρίζες του Φ. Δηλαδή δεν είναι ορθογώνιο σε καμία ρίζα. Άρα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση $(\gamma,\beta) \neq 0$, για όλα τα $\beta \in \Phi$.

Επειδή το β είναι ρίζα, σύμφωνα με το (B2) του ορισμού της βάσης, γράφεται ως

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha,$$

όπου οι συντελεστές k_α ανήκουν στο $\mathbb{Z}_0^+$ ή στο $\mathbb{Z}_0^-$ και τουλάχιστον ένας από αυτούς είναι μη-μηδενικός.

Θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο του γ με το β, άρα $(\gamma,\beta)=\sum_{\alpha\in\Delta}k_\alpha(\gamma,\alpha)$. Όμως το γ σχηματίζει θετικό εσωτερικό γινόμενο με κάθε απλή ρίζα, επομένως $(\gamma,\alpha)\neq 0$ και αφού υπάρχει τουλάχιστον μία απλή ρίζα στην οποία αντιστοιχεί μη-μηδενικός συντελεστής, έχουμε $(\gamma,\beta)\neq 0$.

$\square$

Λήμμα 3.8 *Έστω* E *ένας* $\mathbb{R}$*-διανυσματικός χώρος, με εσωτερικό γινόμενο,* Φ *ένα σύστημα ριζών του και* Δ *μία βάση του* Φ*. Εάν* γ *είναι ένα regular διάνυσμα του* E *και σχηματίζει θετικό εσωτερικό γινόμενο με όλες τις απλές ρίζες, τότε ισχύει η ισότητα,* $\Phi^+=\Phi^+(\gamma)$.

Απόδειξη. Δείχνουμε τον εγκλεισμό $\Phi^+\subseteq\Phi^+(\gamma)$. Θεωρούμε ένα τυχαίο στοιχείο x του Φ^+. Τότε, γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του Δ, με όλους τους συντελεστές στο $\mathbb{Z}_0^+$ και τουλάχιστον έναν μη-μηδενικό. Δηλαδή $x=\sum k_\alpha\alpha$, όπου $\alpha\in\Delta$ και $k_\alpha\in\mathbb{Z}_0^+$.

Εφαρμόζουμε στο x εσωτερικό γινόμενο με το γ, οπότε

$$(\gamma,x)=\sum k_\alpha(\gamma,\alpha)>0,$$

διότι $(\gamma,\alpha)>0$ και $k_\alpha\neq 0$, για τουλάχιστον μία απλή ρίζα. Επομένως, για το στοιχείο x του Φ^+ που ανήκει και στο Φ, εφόσον $\Phi^+\subseteq\Phi$, ικανοποιείται η σχέση $(\gamma,x)>0$. Άρα το x είναι στοιχείο του $\Phi^+(\gamma)$. Οπότε $\Phi^+\subseteq\Phi^+(\gamma)$.

Ομοίως δείχνουμε και τον εγκλεισμό $\Phi^-\subseteq-\Phi^+(\gamma)$. Θεωρούμε ένα τυχαίο στοιχείο y του Φ^- και το γράφουμε ως γραμμικό συνδυασμό των απλών ριζών με συντελεστές στο $\mathbb{Z}_0^-$. Τότε, παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με το γ προκύπτει γνήσια αρνητικό αποτέλεσμα. Άρα, επειδή $\Phi^-\subseteq\Phi$, τελικά το y ανήκει στο Φ και αφού σύμφωνα με τα παραπάνω $(y,\gamma)<0$, συμπεραίνουμε ότι το y είναι ρίζα του $-\Phi^+(\gamma)$. Επομένως $\Phi^-\subseteq-\Phi^+(\gamma)$.

Δείχνουμε ότι $\Phi^+=\Phi^+(\gamma)$. Στην αρχή της απόδειξης είδαμε ότι $\Phi^+\subseteq\Phi^+(\gamma)$. Μένει να αποδείξουμε τον εγκλεισμό $\Phi^+(\gamma)\subseteq\Phi^+$. Έστω ότι υπάρχει κάποιο στοιχείο z του $\Phi^+(\gamma)$ που δεν ανήκει στο Φ^+. Τότε υποχρεωτικά το z θα είναι στοιχείο του Φ^-, άρα και του $-\Phi^+(\gamma)$, λόγω της δεύτερης παραγράφου. Δηλαδή το z είναι κοινό στοιχείο των συνόλων $\Phi^+(\gamma)$ και $-\Phi^+(\gamma)$. Όμως αυτά τα δύο είναι ξένα μεταξύ τους. Επομένως δεν υπάρχει ρίζα του $\Phi^+(\gamma)$ που δεν ανήκει στο Φ^+, άρα $\Phi^+(\gamma)\subseteq\Phi^+$. Οπότε $\Phi^+=\Phi^+(\gamma)$.

$\square$

Ορισμός. Έστω γ ένα regular διάνυσμα του E. Εάν το α είναι στοιχείο του συνόλου $\Phi^+(\gamma)$ και αναλύεται σε άθροισμα τουλάχιστον δύο ριζών του $\Phi^+(\gamma)$, τότε ονομάζεται **decomposable** ρίζα,

$$\alpha=\beta_1+\beta_2$$

για κάποια β_1, β_2 στο $\Phi^+(\gamma)$. Διαφορετικά ονομάζεται **indecomposable**.

Θεώρημα 3.9 *Έστω γ ένα regular διάνυσμα του* E. *Τότε το σύνολο $\Delta(\gamma)$ που αποτελείται από όλες τις indecomposable ρίζες του $\Phi^+(\gamma)$, είναι μία βάση του Φ, και κάθε άλλη βάση του είναι αυτής της μορφής.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα.

Βήμα (1): *Κάθε ρίζα του $\Phi^+(\gamma)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $\Delta(\gamma)$ με μη-αρνητικούς ακέραιους ή μηδενικούς συντελεστές.* Ονομάζουμε A το σύνολο των θετικών ριζών που δε γράφονται ως $\mathbb{Z}_0^+$-γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $\Delta(\gamma)$ και θα δείξουμε ότι είναι το κενό.

Υποθέτουμε ότι το A δεν είναι το κενό. Επειδή το A είναι υποσύνολο του Φ που είναι πεπερασμένο, υπάρχει κάποιο στοιχείο του που σχηματίζει το ελάχιστο εσωτερικό γινόμενο με το γ. Δηλαδή για κάποιο $\alpha \in \mathrm{A}, (\gamma, \alpha) \leq (\gamma, \beta)$ για όλα τα $\beta \in \mathrm{A}$. Όμως η α είναι decomposable ρίζα, διότι διαφορετικά δε θα ήταν στοιχείο του A. Άρα γράφεται ως άθροισμα θετικών ριζών,

$$\alpha = \beta_1 + \beta_2$$

Τότε για να ανήκει η α στο A θα πρέπει επιπλέον, τουλάχιστον ένας από τους δύο προσθεταίους, έστω ο β_1, να μην γράφεται ως $\mathbb{Z}_0^+$-γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $\Delta(\gamma)$.

Επομένως, λόγω της γραμμικότητας του εσωτερικού γινομένου, έχουμε

$$(\gamma, \alpha) = (\gamma, \beta_1) + (\gamma, \beta_2),$$

άρα

$$(\gamma, \beta_1) = (\gamma, \alpha) - (\gamma, \beta_2)$$

και επειδή η β_2 είναι στοιχείο του $\Phi^+(\gamma)$ ισχύει $(\gamma, \beta_2) > 0$.

Συνεπώς η ρίζα β_1 έχει με το γ εσωτερικό γινόμενο μικρότερο από αυτό της α με το γ. Αδύνατο, διότι αρχικά υποθέσαμε πως η α σχηματίζει το ελάχιστο εσωτερικό γινόμενο με το γ. Έτσι, το σύνολο A είναι το κενό και κάθε ρίζα του $\Phi^+(\gamma)$ είναι ένας μη-μηδενικός, $\mathbb{Z}^+$-γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $\Delta(\gamma)$.

Βήμα (2): *Αν α, β είναι δύο διαφορετικές ρίζες του $\Delta(\gamma)$, τότε $(\alpha, \beta) \leq 0$.* Θα το δείξουμε με άτοπο. Έστω ότι ισχύει $(\alpha, \beta) > 0$, τότε από το Λήμμα 3.4 το $\alpha - \beta$ είναι ρίζα. Όμως σύμφωνα με την Πρόταση 3.6, το Φ να γράφεται ως $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup \Phi^-(\gamma)$. Συνεπώς το $\alpha - \beta$ ανήκει σε ένα από τα $\Phi^+(\gamma), \Phi^-(\gamma)$, δηλαδή

$$\alpha - \beta \in \Phi^+(\gamma)$$

ή

$$\beta - \alpha \in \Phi^+(\gamma)$$

Αν $\alpha - \beta \in \Phi^+(\gamma)$, τότε η α γράφεται ως $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$, όπου $\beta \in \Delta(\gamma) \subseteq \Phi^+(\gamma)$. Άρα εκφράζεται ως άθροισμα δύο ριζών του $\Phi^+(\gamma)$ οπότε είναι decomposable ρίζα. Αντίφαση, διότι αρχικά υποθέσαμε ότι η α είναι στοιχείο του $\Delta(\gamma)$.

Αν $\beta - \alpha \in \Phi^+(\gamma)$, τότε η β γράφεται ως $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$, όπου $\alpha \in \Delta(\gamma) \subseteq \Phi^+(\gamma)$. Άρα η β είναι decomposable ρίζα του $\Phi^+(\gamma)$. Άτοπο, διότι η β είναι indecomposable, εφόσον από την υπόθεση ανήκει στο σύνολο $\Delta(\gamma)$. Συνεπώς σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε αντίφαση. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $(\alpha, \beta) \leq 0$.

Βήμα (3): *Το $\Delta(\gamma)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.* Από το Βήμα (2) οποιεσδήποτε δύο ρίζες του $\Delta(\gamma)$ έχουν μη-θετικό εσωτερικό γινόμενο άρα η μεταξύ τους γωνία είναι αμβλεία. Οπότε βάσει του Λήμματος 6.1 το σύνολο $\Delta(\gamma)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Βήμα (4): *Το $\Delta(\gamma)$ αποτελεί μία βάση του* Φ. Δείχνουμε το (B1) του ορισμού της βάσης: Δηλαδή ότι το $\Delta(\gamma)$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο και παράγει όλο το χώρο E. Το πρώτο έχει αποδειχθεί στο προηγούμενο βήμα. Μένει να δείξουμε ότι κάθε διάνυσμα του E μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των ριζών του $\Delta(\gamma)$.

Από τον ορισμό του συστήματος ριζών Φ γνωρίζουμε ότι παράγει τον E, έτσι κάθε διάνυσμα γράφεται ως γραμμικός συνδυσμός των ριζών του. Όμως για το regular γ ισχύει ότι $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup \Phi^-(\gamma)$ και αφού ισχύει $\Phi^-(\gamma) = -\Phi^+(\gamma)$, οποιαδήποτε ρίζα εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των ριζών του $\Phi^+(\gamma)$.

Αλλά, από το Βήμα (1) της απόδειξης κάθε ρίζα του $\Phi^+(\gamma)$ είναι ένας $\mathbb{Z}_0^+$-γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $\Delta(\gamma)$. Άρα οποιοδήποτε διάνυσμα του E γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των ριζών του $\Delta(\gamma)$.

Δείχνουμε το (B2) του ορισμού της βάσης: Δηλαδή ότι κάθε στοιχείο του Φ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $\Delta(\gamma)$, με όλους τους συντελεστές στο $\mathbb{Z}_0^+$ ή στο $\mathbb{Z}_0^-$. Αυτό έχει δειχθεί στο τέλος του προηγούμενου βήματος.

Βήμα(5): *Κάθε βάση Δ του Φ είναι της μορφής $\Delta(\gamma)$ για κάποιο regular $\gamma \in$ E.* Από το (B1) του ορισμού του Δ, έχουμε ότι το Δ είναι βάση του E. Επομένως, σύμφωνα με το Λήμμα 6.2 υπάρχει κάποιο διάνυσμα γ, τέτοιο ώστε $(\gamma, \alpha) > 0$ για όλα τα $\alpha \in \Delta$, το οποίο είναι regular βάσει του Λήμματος 3.7. Επομένως, από το Λήμμα 3.8 ισχύει η ισότητα $\Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$.

Δείχνουμε ότι το Δ είναι υποσύνολο του $\Delta(\gamma)$. Δηλαδή εάν α είναι κάποια τυχαία ρίζα της βάσης Δ τότε είναι indecomposable ως προς το $\Phi^+(\gamma)$. Χρησιμοποιώντας την εις άτοπο απαγωγή, υποθέτουμε ότι η $\alpha \in \Delta$ και ότι υπάρχουν β_1, β_2 στο $\Phi^+(\gamma)$ τέτοια ώστε

$$\alpha = \beta_1 + \beta_2$$

Όμως $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+$, επομένως τα β_1, β_2 γράφονται ως: $\beta_1 = \sum_{x \in \Delta} k_x x$, με

$k_x \geq 0$ και $\beta_2 = \sum_{x\in\Delta} \ell_x x$, με $\ell_x \geq 0$, άρα

$$\alpha = \sum_{x\in\Delta} m_x x$$

όπου $m_x = k_x + \ell_x \geq 0$ για όλα τα $x \in \Delta$. Αλλά η $\alpha \in \Delta$ και αυτό σημαίνει ότι όταν εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του Δ, όλοι οι συντελεστές είναι μηδενικοί εκτός από έναν, εκείνον της α που είναι ίσος με 1. Άρα $m_\alpha = k_\alpha + \ell_\alpha = 1$ και επειδή τα k_α, ℓ_α είναι ακέραιοι αριθμοί έχουμε $k_\alpha = 0$ και $\ell_\alpha = 1$ ή $k_\alpha = 1$ και $\ell_\alpha = 0$.

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι $\alpha = \beta_2$, δηλαδή η α είναι indecomposable. Ενώ η δεύτερη περίπτωση δίνει $\alpha = \beta_1$ και παίρνουμε ίδιο αποτέλεσμα. Άρα $\Delta \subseteq \Delta(\gamma)$.

Τέλος, στο Βήμα (4) της απόδειξης δείξαμε ότι το σύνολο $\Delta(\gamma)$ είναι μία βάση του Φ, οπότε αν $\operatorname{rank}(\Phi) = n$ τότε $\operatorname{card}\Delta(\gamma) = n$. Όμως, από την υπόθεση και το Δ είναι βάση του Φ, άρα έχουμε $\operatorname{card}\Delta(\gamma) = \operatorname{card}\Delta = n$ και επειδή $\Delta \subseteq \Delta(\gamma)$ έχουμε ότι $\Delta = \Delta(\gamma)$. Επομένως όλες οι βάσεις είναι της μορφής $\Delta(\gamma)$.

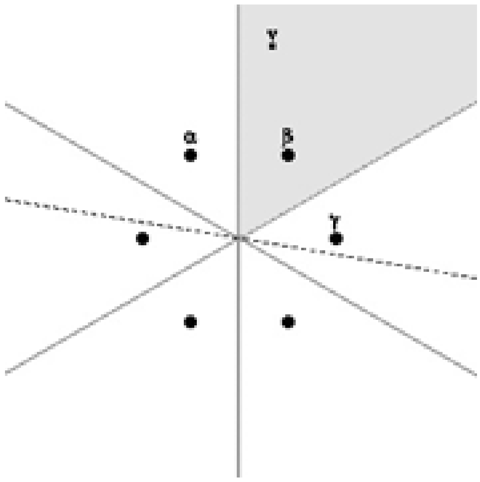
□

Κάθε ρίζα α του Φ ορίζει ένα ορθογώνιο υπερεπίπεδο P_α. Αν θεωρήσουμε όλα τα P_α που σχηματίζονται στο E προκύπτει μία διαμέριση του $\mathrm{E} - \bigcup \mathrm{P}_\alpha$ σε συνεκτικές συνιστώσες, έτσι ώστε κάθε στοιχείο του συνόλου μας να ανήκει σε ακριβώς μία από αυτές. Αυτές οι συνεκτικές συνιστώσες του $\mathrm{E} - \bigcup \mathrm{P}_\alpha$ ονομάζονται **χωρία Weyl του** E.

Τώρα, αν θεωρήσουμε ένα *regular* στοιχείο του E, έστω γ, ανήκει και αυτό σε ακριβώς μία συνεκτική συνιστώσα του $\mathrm{E} - \bigcup \mathrm{P}_\alpha$, αφού από τον ορισμό του δεν μπορεί να είναι στοιχείο κάποιου κάθετου υπερεπίπεδου σε ρίζα. Το χωρίο Weyl στο οποίο ανήκει το τυχαίο *regular* γ συμβολίζεται με $\mathcal{C}(\gamma)$.

Ορισμός. Εάν Δ είναι μία βάση του Φ, ορίζουμε $\mathcal{C}(\Delta)$ να είναι το χωρίο Weyl που περιέχει κάποιο regular στοιχείο γ, τέτοιο ώστε $\Delta = \Delta(\gamma)$. Το $\mathcal{C}(\Delta)$ ονομάζεται **θεμελιώδες χωρίο Weyl ως προς τη βάση** Δ.

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τα Weyl χωρία του A_2 :



Σχήμα 3.1: Τα χωρία Weyl του A_2

Πρόταση 3.10 *Έστω δύο regular διανύσματα του* E, γ *και* γ'. *Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Τα* γ *και* γ' *βρίσκονται στην ίδια πλευρά για κάθε υπερεπίπεδο που ορίζεται από τις ρίζες του* Φ

2. $\mathcal{C}(\gamma) = \mathcal{C}(\gamma')$

3. $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$

4. $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$

Απόδειξη. Δείχνουμε τη συνεπαγωγή $1 \Longrightarrow 2$. Υποθέτουμε ότι τα γ, γ' ανήκουν στην ίδια πλευρά για κάθε υπερεπίπεδο που ορίζουν οι ρίζες του Φ. Άρα ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $E - \bigcup P_\alpha$, οπότε $\mathcal{C}(\gamma) = \mathcal{C}(\gamma')$.

Δείχνουμε τη συνεπαγωγή $2 \Longrightarrow 1$. Εφόσον ισχύει $\mathcal{C}(\gamma) = \mathcal{C}(\gamma')$, τότε για κάθε $\alpha \in \Phi$ έχουμε ότι

$$\operatorname{sgn}\Big((\alpha, \gamma)\Big) = \operatorname{sgn}\Big((\alpha, \gamma')\Big)$$

Επομένως τα γ και γ' βρίσκονται στην ίδια πλευρά για κάθε υπερεπίπεδο που ορίζεται από τις ρίζες του Φ.

Δείχνουμε τη συνεπαγωγή $1 \Longrightarrow 3$. Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι το γ είναι regular άρα από τον ορισμό του δεν είναι ορθογώνιο σε οποιαδήποτε ρίζα. Επομένως σχηματίζει μη μηδενικό εσωτερικό γινόμενο με κάθε στοιχείο του Φ, συνεπώς $(\gamma, x) > 0$ για κάποια $x \in \Phi$ και$(\gamma, x') < 0$ για κάποια $x' \in \Phi$, για διαφορετικά x, x'. Ανάλογα για το regular γ', $(\gamma', y) > 0$ για κάποια $y \in \Phi$ και $(\gamma', y') < 0$ για κάποια $y' \in \Phi$, με $y \neq y'$. Οπότε αφού τα γ, γ' βρίσκονται στην ίδια πλευρά για κάθε υπερεπίπεδο, έχουν για τις ίδιες ρίζες ομόσημο εσωτερικό γινόμενο. Δηλαδή οι θετικές όπως και οι αρνητικές πλευρές τους ταυτίζονται. Άρα $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$, προφανώς ισχύει και $\Phi^-(\gamma) = \Phi^-(\gamma')$.

Δείχνουμε τη συνεπαγωγή $3 \Longrightarrow 1$. Από τον ορισμό των συνόλων συμπεραίνουμε ότι τα γ, γ' βρίσκονται στην ίδια πλευρά για κάθε υπερεπίπεδο που ορίζεται από τις ρίζες.

Δείχνουμε τη συνεπαγωγή $3 \Longrightarrow 4$. Το $\Delta(\gamma)$ εξ' ορισμού αποτελείται από τα indecomposable στοιχεία του $\Phi^+(\gamma)$, άρα $\Delta(\gamma) \subseteq \Phi^+(\gamma)$. Ομοίως για το $\Delta(\gamma')$, $\Delta(\gamma') \subseteq \Phi^+(\gamma')$. Όμως από το 3 ισχύει η ισότητα $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$, άρα τα δύο σύνολα $\Delta(\gamma)$ και $\Delta(\gamma')$ ταυτίζονται.

Δείχνουμε τη συνεπαγωγή $4 \Longrightarrow 3$. Κάθε ρίζα του $\Phi^+(\gamma)$ όπως και του $\Phi^+(\gamma')$ γράφεται ως άθροισμα κάποιων indecomposable ριζών του αντίστοιχου συνόλου. Όμως οι indecomposable ρίζες των $\Phi^+(\gamma)$ και $\Phi^+(\gamma')$ είναι κοινές, οπότε τα σύνολα $\Phi^+(\gamma)$, $\Phi^+(\gamma')$ ισούνται.

$\square$

Πρόταση 3.11 *Υπάρχει κανονική αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση (1-1 και επί) μεταξύ των βάσεων ενός συστήματος ριζών και των χωρίων Weyl.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το γ είναι ένα regular διάνυσμα του E και $\Delta(\gamma)$ η βάση που καθορίζεται από αυτό. Αν το Δ είναι μία βάση του Φ, με $\Delta = \Delta(\gamma)$ τότε $\mathcal{C}(\Delta) = \mathcal{C}(\gamma)$. Έστω λοιπόν η αντιστοίχιση $\Delta \longmapsto \mathcal{C}(\Delta)$. Αρχικά δείχνουμε ότι αυτή η αντιστοίχιση είναι καλά ορισμένη απεικόνιση.

Αποδεικνύουμε ότι μία βάση δεν μπορεί να αντιστοιχίζεται σε δύο ή περισσότερα χωρία Weyl. Το δείχνουμε με άτοπο. Έστω γ, γ' δύο regular στοιχεία του E και $\mathcal{C}(\gamma), \mathcal{C}(\gamma')$ τα αντίστοιχα χωρία Weyl στα οποία ανήκουν. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{C}(\gamma) \neq \mathcal{C}(\gamma')$ και θεωρούμε Δ να είναι η βάση που αντιστοιχίζεται και στα δύο. Εφόσον η βάση είναι μοναδική και δεν καθορίζεται μονοσήμαντα από τα regular διανύσματα ισχύει ότι $\Delta = \Delta(\gamma)$, $\Delta = \Delta(\gamma')$ άρα $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$.

Επομένως από την Πρόταση 3.10 έχουμε $\mathcal{C}(\gamma) = \mathcal{C}(\gamma')$. Άτοπο, αφού αρχικά υποθέσαμε ότι $\mathcal{C}(\gamma) \neq \mathcal{C}(\gamma')$. Συνεπώς για κάθε βάση Δ υπάρχει ακριβώς ένα χωρίο Weyl που είναι η εικόνα της μέσω της παραπάνω αντιστοίχισης. Άρα είναι καλά ορισμένη.

Δείχνουμε ότι σε κάθε χωρίο Weyl αντιστοιχίζεται ακριβώς μία βάση Δ. Έστω ένα χωρίο Weyl, $\mathcal{C}$ και γ ένα regular στοιχείο του. Τότε ισχύει,

$$\mathcal{C}(\Delta) = \mathcal{C}$$

και $\Delta = \Delta(\gamma)$ είναι η αντίστοιχη βάση. Εάν τώρα θεωρήσουμε ένα άλλο regular διάνυσμα του $\mathcal{C}$, έστω γ', τότε έχουμε ότι $\mathcal{C}(\gamma') = \mathcal{C}(\gamma)$. Επομένως από την

Πρόταση 3.10 παίρνουμε ότι $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$.

$\square$

Πρόταση 3.12 *Έστω Δ μία βάση του Φ. Το $\mathcal{C}(\Delta)$ είναι το ανοιχτό, κυρτό σύνολο που αποτελείται από όλα εκείνα τα στοιχεία x του E τέτοια ώστε:*

$$(x, \alpha) > 0, \text{ για όλες τις απλές ρίζες } \alpha.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη βάση Δ του Φ. Τότε υπάρχει $\gamma \in \mathrm{E}$, regular τέτοιο ώστε $\Delta = \Delta(\gamma)$. Επομένως το $\mathcal{C}(\Delta)$ είναι το χωρίο Weyl που περιέχει το γ. Άρα γράφουμε $\mathcal{C}(\Delta) = \mathcal{C}(\gamma)$. Προφανώς από τον ορισμό των χωρίων Weyl το $\mathcal{C}(\Delta)$ είναι ανοιχτό, κυρτό σύνολο.

Μένει να δείξουμε ότι $\mathcal{C}(\Delta) = \{x \in \mathrm{E} : (x, \alpha) > 0, \forall \alpha \in \Delta\}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.10 το $\mathcal{C}(\Delta)$ είναι το σύνολο

$$\mathcal{C}(\Delta) = \{x \in \mathrm{E} - \cup_{\alpha \in \Phi} \mathrm{P}_\alpha : \mathrm{sgn}(\gamma, \alpha) = \mathrm{sgn}(x, \alpha) \ \forall \alpha \in \Phi\}.$$

Αλλά ισχύει ότι $\Delta = \Delta(\gamma) \subseteq \Phi^+(\gamma)$, και συνεπώς $(\gamma, \alpha) > 0$ για κάθε $\alpha \in \Delta$.

$\square$

Λήμμα 3.13 *Θεωρούμε ένα $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο E, με εσωτερικό γινόμενο και Φ ένα σύστημα ριζών σε αυτόν. Εάν σ είναι ένα στοιχείο της ομάδας Weyl, $\mathcal{W}$ και $\gamma \in \mathrm{E}$ ένα regular διάνυσμα τότε:*

$$\sigma(\mathcal{C}(\gamma)) = \mathcal{C}(\sigma(\gamma))$$

Δηλαδή η ομάδα Weyl απεικονίζει χωρία Weyl σε χωρία Weyl.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα διάνυσμα x στο χωρίο Weyl του $\gamma, \mathcal{C}(\gamma)$. Τότε $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(\gamma)$. Επομένως, σύμφωνα με το Πρόταση 3.10 έχουμε ότι

$$\mathrm{sgn}(x, \alpha) = \mathrm{sgn}(\gamma, \alpha),$$

για όλα τα $\alpha \in \Phi$. Άρα αφού το σ είναι ισομετρία, και συνεπώς διατηρούνται τα μήκη και οι γωνίες μεταξύ των διανυσμάτων, έχουμε

$$\mathrm{sgn}(\sigma(x), \sigma(\alpha)) = \mathrm{sgn}(\sigma(\gamma), \sigma(\alpha))$$

για όλα τα $\sigma(\alpha)$, τα οποία είναι στοιχεία του Φ. Επομένως, το x μέσω της σ, απεικονίζεται στο χωρίο Weyl του $\sigma(\gamma)$.

$\square$

Λήμμα 3.14 *Θεωρούμε ένα $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο E, με εσωτερικό γινόμενο και Φ ένα σύστημα ριζών σε αυτόν. Εάν Δ είναι μία βάση του και σ είναι ένα στοιχείο της ομάδας Weyl, $\mathcal{W}$, τότε η σ απεικονίζει τη Δ στο $\sigma(\Delta)$ που είναι κι αυτό βάση.*

Απόδειξη. Το Δ είναι μία βάση του Φ. Επομένως υπάρχει κάποιο regular $\gamma \in \mathrm{E}$, τέτοιο ώστε $\Delta = \Delta(\gamma)$, όπου το $\Delta(\gamma)$ είναι το σύνολο των indecomposable ριζών του $\Phi^+(\gamma)$. Θεωρούμε ένα στοιχείο του $\Delta(\gamma)$, έστω α. Τότε μέσω της σ απεικονίζεται στο $\sigma(\alpha)$ που ανήκει στο $\sigma(\Delta(\gamma))$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\sigma(\Delta(\gamma)) = \Delta(\sigma(\gamma))$. Για $x \in \mathrm{E}$, θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο $(\sigma(x), \sigma(\alpha))$. Αλλά, αφού η σ είναι ισομετρία αυτό ισούται με (x, α). Όμως το τελευταίο είναι θετικό. Επομένως το $\sigma(\Delta(\gamma))$ αποτελείται από τα διανύσματα που σχηματίζουν θετικό εσωτερικό γινόμενο με τις απλές ρίζες.

□

Λήμμα 3.15 *Έστω Φ ένα σύστημα ριζών και Δ μία βάση του. Εάν το α είναι μία θετική ρίζα αλλά όχι απλή, τότε υπάρχει κάποια απλή ρίζα β τέτοια ώστε το $\alpha - \beta$ να είναι θετική ρίζα.*

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε με είς άτοπο απαγωγή, ότι υπάρχει κάποια ρίζα του Δ που σχηματίζει θετικό εσωτερικό γινόμενο με την α. Έστω ότι για την $\alpha \in \Phi^+$ ικανοποιείται η ανισότητα $(\alpha, \beta) \leq 0, \forall \beta \in \Delta$. Το Δ είναι μία βάση του Φ άρα παράγει όλο το χώρο E. Έτσι κάθε διάνυσμά του γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των απλών ριζών, με τουλάχιστον έναν μη-μηδενικό συντελεστή. Κάτι τέτοιο ισχύει και για τη ρίζα α αφού δεν είναι απλή.

Όμως από το Λήμμα 6.1 έχουμε ότι το σύνολο $\Delta \cup \{\alpha\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο, αφού η α δεν εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του Δ. Οπότε $(\alpha, \beta) > 0$ για κάποιο $\beta \in \Delta$.

Σύμφωνα με το Λήμμα 2.3 το διάνυσμα $\alpha - \beta$ είναι μία ρίζα του Φ. Συνεπώς από το (B2) του ορισμού του συστήματος ριζών το $\alpha - \beta$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του Δ με ομόσημους όλους τους συντελεστές.

Δηλαδή $\alpha - \beta = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$ άρα

$$\alpha = \beta + \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$$

με $k_\gamma \geq 0$ ή $k_\gamma \leq 0$, $\forall \gamma \in \Delta$ και $\beta \in \Delta$.

Άρα η ρίζα α εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης με τουλάχιστον ένα θετικό συντελεστή, εκείνον του β. Οπότε από το (B2) συμπεραίνουμε ότι όλοι οι συντελεστές είναι μη-αρνητικοί, και αφού οι α, β είναι διαφορετικές μεταξύ τους ένα τουλάχιστον από τα k_γ είναι γνήσια θετικό. Συνεπώς $\alpha - \beta = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$, όπου $k_\gamma \geq 0$, $\forall \gamma \in \Delta$. Άρα η $\alpha - \beta$ είναι θετική ρίζα για κάποιο $\beta \in \Delta$.

□

Πόρισμα 3.16 *Κάθε θετική ρίζα β μπορεί να γραφτεί ως διατεταγμένο άθροισμα απλών ριζών, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$, όπου $\alpha_j \in \Delta$ για κάθε $j = \{1, \ldots, k\}$ και τα α_j δεν είναι απαραίτητα διαφορετικά μεταξύ τους, έτσι ώστε το μερικό άθροισμα $\alpha_1 + \ldots + \alpha_i$, να αποτελεί ρίζα.*

Απόδειξη. Κάνουμε επαγωγή ως προς το ύψος.

Αρχικά θεωρούμε μία ρίζα ύψους 1, δηλαδή $\mathrm{ht}(\alpha) = 1$. Τότε αυτή είναι απλή και ισούται με α_m, για κάποιο $m = 1, \ldots, \ell$, και η πρόταση αληθεύει.

Υποθέτουμε ότι για τυχαία ρίζα β με ύψος $< n$, το μερικό άθροισμά της να είναι ρίζα. Οπότε εάν $\beta = \alpha_1 + \ldots + \alpha_s$ τότε το $\alpha_1 + \ldots + \alpha_i$ είναι ρίζα.

Έστω τώρα μία ρίζα γ, ύψους $n, \mathrm{ht}(\gamma) = n$. Τότε η γ δεν είναι απλή ρίζα. Επομένως από το Λήμμα 3.15 έχουμε ότι υπάρχει $\alpha_p \in \Delta$ όπου $p = 1, \ldots, \ell$ τέτοιο ώστε $\gamma = \delta + \alpha_p$ με $\delta \in \Phi^+$. Όμως προφανώς το ύψος είναι γραμμικό, άρα $\mathrm{ht}(\delta) = \mathrm{ht}(\gamma - \alpha_p) = \mathrm{ht}(\gamma) - \mathrm{ht}(\alpha_p) = n - 1 < n$. Άρα σύμφωνα με την υπόθεση, η δ γράφεται ως άθροισμα απλών ριζών με διάταξη ώστε κάθε το μερικό άθροισμα να είναι ρίζα. Οπότε και η ρίζα γ γράφεται με τέτοιο τρόπο.

□

Λήμμα 3.17 *Εάν α είναι μία απλή ρίζα του Φ, τότε η ανάκλαση που ορίζει, απεικονίζει κάθε θετική ρίζα διαφορετική της α, σε κάποια άλλη θετική ρίζα. Με άλλα λόγια η σ_α αφήνει αναλλοίωτο το υποσύνολο $\Phi^+ - \{\alpha\}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μία θετική ρίζα β διαφορετική της α, $\beta \neq \alpha$, τότε γράφεται μοναδικά ως $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$ με $k_\gamma \geq 0$, για όλα τα γ που ανήκουν στη βάση Δ του Φ και αφού η β δεν είναι ίση με τη ρίζα $-\alpha$, διότι τότε η β θα ήταν αρνητική ρίζα, έχουμε ότι η β δεν είναι συγγραμμική της α. Οπότε υπάρχει τουλάχιστον μία απλή ρίζα διαφορετική της α με μη-μηδενικό συντελεστή.

Θεωρούμε την ανάκλαση που ορίζει η α, $\sigma_\alpha : \Phi \longrightarrow \Phi$ και την εφαρμόζουμε στη β άρα $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - <\beta, \alpha> \alpha$. Όμως ο αριθμός $<\beta, \alpha>$ είναι ακέραιος, λόγω του (R4), επομένως $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - r\alpha$, με $r \in \mathbb{Z}$. Άρα

$$\sigma_\alpha(\beta) = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma - r\alpha = \sum_{\gamma \in \Delta} m_\gamma \gamma,$$

όπου $m_\gamma = k_\gamma - r$ όταν $\gamma = \alpha$, ή $m_\gamma = k_\gamma$ διαφορετικά. Δηλαδή το $\sigma_\alpha(\beta)$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός απλών ριζών με τουλάχιστον ένα θετικό συντελεστή, για κάποια ρίζα διαφορετική της α.

Τέλος, από το (R3) του συστήματος ριζών και το (B2) του ορισμού της βάσης, συμπεραίνουμε ότι το $\sigma_\alpha(\beta)$ είναι μία ρίζα του Φ και όλοι οι συντελεστές στην παραπάνω έκφρασή του είναι θετικοί αριθμοί.

Επομένως η $\sigma_\alpha(\beta)$ είναι θετική ρίζα και μάλιστα $\sigma_\alpha(\beta) \neq \alpha$. Διότι αν ίσχυε κάτι τέτοιο, $\sigma_\alpha(\beta) = \alpha$ και $\sigma_\alpha(-\alpha) = \alpha$, όμως η σ_α είναι 1-1 άρα $\beta = -\alpha$, αδύνατο.

Συνεπώς $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi^+ - \{\alpha\}$, δηλαδή οποιαδήποτε θετική ρίζα απεικονίζεται σε κάποια άλλη θετική αλλά όχι στην α.

□

Πόρισμα 3.18 *Έστω* $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\beta \succ 0} \beta$*. Τότε* $\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$*, για όλα τα* $\alpha \in \Delta$*.*

Απόδειξη. Διαμερίζουμε το σύνολο Φ^+ στα υποσύνολα $\Phi' = \Phi^+ - \{\alpha\}$ και $\{\alpha\}$, όπου α είναι μία τυχαία απλή ρίζα. Άρα το δ γράφεται ως: $\delta = \frac{1}{2}\left[\sum_{\beta \in \Phi'} \beta + \alpha\right]$ και εφαρμόζοντας την ανάκλαση που ορίζει η α στο δ έχουμε $\sigma_\alpha(\delta) = \sigma_\alpha\left[\frac{1}{2}\Big(\sum_{\beta \in \Phi'} \beta + \alpha\Big)\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{\beta \in \Phi'} \sigma_\alpha(\beta) + \sigma_\alpha(\alpha)\right]$. Όμως από το Λήμμα 3.17 οι ρίζες του Φ' απεικονίζονται μέσω της σ_α στο σύνολο στο Φ'. Οπότε

$$\sigma_\alpha(\delta) = \frac{1}{2}\left[\sum_{\beta' \in \Phi'} \beta' - \alpha\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{\beta' \in \Phi'} \beta' + \alpha\right] - \alpha = \frac{1}{2}\sum_{\beta' \in \Phi^+} \beta' - \alpha = \frac{1}{2}\sum_{\beta' \succ 0} \beta' - \alpha$$

Αλλά $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\beta' \succ 0} \beta'$, άρα $\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$ για την τυχαία απλή ρίζα α, οπότε ισχύει για όλες τις απλές ρίζες, $\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha, \forall \alpha \in \Delta$.

□

Λήμμα 3.19 *Θεωρούμε ένα σύστημα ριζών* Φ *και μία βάση του* Δ*. Έστω* $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ *στοιχεία του* Δ*, όχι απαραίτητα διαφορετικά μεταξύ τους. Γράφουμε* $\sigma_i = \sigma_{\alpha_i}$*, την ανάκλαση ως προς την απλή ρίζα* α_i*. Αν η σύνθεση* $\sigma_1 \cdots \sigma_{t-1}$ *απεικονίζει την* α_t *σε αρνητική ρίζα, τότε υπάρχει κάποιος δείκτης* s *με* $1 \leq s \leq t$*, τέτοιο ώστε* $\sigma_1 \cdots \sigma_{t-1} = \sigma_1 \cdots \sigma_{s-1}\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1}$*.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη ρίζα β_i, όπου $\beta_i = \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{t-1}$ για $0 \leq i \leq t-2$ και $\beta_i = \alpha_t$ για $i = t-1$. Από την υπόθεση έχουμε ότι η σύνθεση όλων των ανακλάσεων δίδει αρνητική ρίζα, δηλαδή $\beta_0 \prec 0$. Επίσης, όπως ορίσαμε τη β_{t-1} να είναι ίση με α_t, έχουμε αμέσως ότι $\beta_{t-1} \succ 0$, αφού η α_t είναι απλή ρίζα.

Γενικά από τις συνθέσεις παίρνουμε είτε θετικά, είτε αρνητικά αποτελέσματα. Αυτό που δε ξέρουμε είναι με ποιά σειρά εμφανίζονται. Δηλαδή είναι άγνωστο εάν αρχικά έχουμε αρνητικές ρίζες και ότι ακολουθούν οι θετικές. Σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο, τα μόνα που γνωρίζουμε είναι η πρώτη και η τελευταία ρίζα.

Επιλέγουμε τον μικρότερο δείκτη s που δίδει θετική ρίζα, δηλαδή $\beta_s \succ 0$ για κάποιο $1 \leq s \leq t-1$. Έτσι εξασφαλίζουμε ότι το β_{s-1} είναι αρνητικό, όπως και όλα τα προηγούμενά του.

Εφαρμόζουμε τη σ_s στο β_s, $\sigma_s(\beta_s) = \sigma_s(\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1}(\alpha_t))$ και επειδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα μπορούμε να απαλείψουμε τις παρενθέσεις, άρα

$$\sigma_s(\beta_s) = \sigma_s\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1}(\alpha_t) = \beta_{s-1}.$$

Όμως επειδή $s-1 < s$, ισχύει

$$\sigma_s(\beta_s) = \beta_{s-1} \prec 0.$$

Αλλά από το Λήμμα 3.17, εφόσον $\beta_s \succ 0$, παίρνουμε $\sigma_s(\beta_s) = \sigma_{\alpha_s}(\beta_s) \succ 0$ εάν $\beta_s \neq \alpha_s$ και $\sigma_s(\beta_s) = \sigma_s(\alpha_s) = -\alpha_s \prec 0$ εάν $\beta_s = \alpha_s$.

Οπότε, αφού $\sigma_s(\beta_s) = \beta_{s-1} \prec 0$ είμαστε στη δεύτερη περίπτωση. Άρα $\beta_s = \alpha_s$. Ενώ από το Λήμμα 2.1, για $\tau \in \mathrm{GL(E)}$ με $\tau(\Phi) \subseteq \Phi$, ισχύει ότι $\tau\sigma_\alpha\tau^{-1} = \sigma_{\tau(\alpha)}$, για όλα τα α στο Φ. Άρα για $\tau = \sigma_{s+1}\cdots\sigma_{t-1}$, έχουμε $\tau^{-1} = \sigma_{t-1}\cdots\sigma_{s+1}$ και συνεπώς

$$\sigma_{s+1}\cdots\sigma_{t-1}(\sigma_t)\sigma_{t-1}\cdots\sigma_{s+1} = \tau\sigma_{\alpha_t}\tau^{-1} = \sigma_{\tau(\alpha_t)} = \sigma_{\beta_s} = \sigma_{\alpha_s} = \sigma_s$$

Δηλαδή $\tau\sigma_t = \sigma_s\tau$, οπότε $\sigma_{s+1}\cdots\sigma_{t-1}(\sigma_t) = \sigma_s\sigma_{s+1}\cdots\sigma_{t-1}$ και πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με $\sigma_1\cdots\sigma_{s-1}$ έχουμε

$$\sigma_1\cdots\sigma_t = \sigma_1\cdots\sigma_{s-1}\sigma_{s+1}\cdots\sigma_{t-1}.$$

Επομένως, εάν ισχύει η υπόθεση $\sigma_1\cdots\sigma_{t-1}(\alpha_t) \prec 0$, τότε η σύνθεση $\sigma_1\cdots\sigma_t$ μπορεί ισοδύναμα να εκφραστεί από μία σύνθεση με δύο λιγότερες συνθέσεις.

□

Πόρισμα 3.20 *Έστω $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ κάποια στοιχεία της βάσης Δ, όχι απαραίτητα διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε σ ένα στοιχείο της ομάδας Weyl στη μορφή $\sigma = \sigma_1\cdots\sigma_t$, όπου αυτή η γραφή είναι η πιο σύντομη σύνθεση ανακλάσεων ως προς απλές ρίζες που εκφράζει την ισομετρία σ. Τότε $\sigma(\alpha_t) \prec 0$.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι $\sigma(\alpha_t) = \sigma_1\cdots\sigma_t(\alpha_t) = -\sigma_1\cdots\sigma_{t-1}(\alpha_t)$. Όμως σύμφωνα με το Λήμμα 3.19 έχουμε $\sigma_1\cdots\sigma_{t-1}(\alpha_t) \succ 0$, διαφορετικά, δε θα ήταν η συντομότερη έκφραση του σ. Άρα $\sigma(\alpha_t) \prec 0$.

□

Θεώρημα 3.21 *Έστω Δ μία βάση του συστήματος ριζών Φ. Τότε:*

1. *Η ομάδα Weyl, $\mathcal{W}$ δρα μεταβατικά στο σύνολο των χωρίων Weyl. Ειδικότερα, εάν $\gamma \in \mathrm{E}$ είναι regular, τότε υπάρχει κάποιο σ στοιχείο του $\mathcal{W}$ τέτοιο ώστε $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ για κάθε $\alpha \in \Delta$.*

2. *Η ομάδα Weyl δρα απλά μεταβατικά στο σύνολο των βάσεων του Φ :*

   (α΄) Εάν Δ' είναι μία βάση του Φ, υπάρχει κάποιο στοιχείο σ του $\mathcal{W}$ τέτοιο ώστε $\sigma(\Delta') = \Delta$, και

   (β΄) Εάν το σ ανήκει στο $\mathcal{W}$ και $\sigma(\Delta) = \Delta$, τότε $\sigma = \mathrm{id}$.

3. *Κάθε ρίζα του Φ είναι συζυγής με μία απλή ρίζα. Δηλαδή εάν $\alpha \in \Phi$ τότε υπάρχει κάποιο $\sigma \in \mathcal{W}$ τέτοιο ώστε $\sigma(\alpha) \in \Delta$.*

4. *Η ομάδα Weyl παράγεται από τις ανακλάσεις ως προς τις απλές ρίζες. Δηλαδή* $\mathcal{W} = < \sigma_\alpha : \alpha \in \Delta >$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την υποομάδα $\mathcal{W}'$ της $\mathcal{W}$ που παράγεται από τις ανακλάσεις ως προς τις απλές ρίζες. Αρχικά θα αποδείξουμε τα $1, 2, 3$ για την $\mathcal{W}'$ και μετά θα δούμε ότι αυτή ταυτίζεται με τη $\mathcal{W}$.

1. Θεωρούμε ένα στοιχείο δ, να ισούται με $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\beta \succ 0} \beta$. Τότε σύμφωνα με το Πόρισμα 3.18 έχουμε ότι $\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$, για όλα τα $\alpha \in \Delta$. Έστω γ ένα regular διάνυσμα του E. Εφόσον το $\mathcal{W}'$ είναι πεπερασμένο, ως υποομάδα πεπερασμένης ομάδας, υπάρχει κάποιο $\sigma \in \mathcal{W}'$ τέτοιο ώστε το $(\sigma(\gamma), \delta)$ να λαμβάνει μέγιστη τιμή. Οπότε εάν α είναι μία απλή ρίζα, τότε για τη σύνθεση $\sigma_\alpha\sigma \in \mathcal{W}'$ ισχύει ότι
$$(\sigma(\gamma), \delta) \geq (\sigma_\alpha\sigma(\gamma), \delta).$$
Όμως
$$\begin{aligned}(\sigma(\gamma), \delta) \geq (\sigma_\alpha\sigma(\gamma), \delta) &= (\sigma(\gamma), \sigma_\alpha(\delta)) \\ &= (\sigma(\gamma), \delta - \alpha) \\ &= (\sigma(\gamma), \delta) - (\sigma(\gamma), \alpha)\end{aligned}$$
Δηλαδή $(\sigma(\gamma), \delta) \geq (\sigma(\gamma), \delta) - (\sigma(\gamma), \alpha)$, άρα $(\sigma(\gamma), \alpha) \geq 0$. Όμως το γ είναι regular, άρα σχηματίζει μη μηδενικό εσωτερικό γινόμενο με κάθε ρίζα. Συνεπώς και για $\alpha \in \Delta$, έχουμε $(\sigma(\gamma), \alpha) = (\gamma, \sigma^{-1}(\alpha)) \neq 0$. Επομένως $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$, για κάθε $\alpha \in \Delta$. Τότε βάσει της Πρότασης 3.12 το $\sigma(\gamma)$ ανήκει στο χωρίο Weyl $\mathcal{C}(\Delta)$. Άρα η σ απεικονίζει το χωρίο Weyl $\mathcal{C}(\gamma)$ στο $\mathcal{C}(\Delta)$. Επομένως η $\mathcal{W}'$ δρα μεταβατικά στο σύνολο των χωρίων Weyl.

2. (α′) Έστω Δ' μία βάση του Φ. Τότε υπάρχει κάποιο regular διάνυσμα $\gamma \in$ E και από το 1., υπάρχει κάποιο $\sigma \in \mathcal{W}'$, τέτοιο ώστε $\sigma(\gamma) \in \mathcal{C}(\Delta)$. Αλλά τότε $\sigma(\Delta') = \Delta(\sigma(\gamma)) = \Delta$. Επομένως η $\mathcal{W}'$ δρα ματαβατικά στο σύνολο των βάσεων του Φ.

   (β′) Αυτό το σκέλος θα αποδειχθεί τελευταίο με τη βοήθεια του 4.

3. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ρίζα α ανήκει σε μία τουλάχιστον βάση Δ'. Από το 2(α′) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει κάποιο $\sigma \in \mathcal{W}'$ τέτοιο ώστε $\sigma(\alpha) \in \Delta$. Έστω τώρα μία τυχαία ρίζα α στο Φ, τότε για κάθε $\beta \in \Phi - \{+\alpha, -\alpha\}$, τα υπερεπίπεδα $\mathrm{P}_\alpha, \mathrm{P}_\beta$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Επομένως η τομή $\mathrm{P}_\alpha \cap \mathrm{P}_\beta$ είναι υπόχωρος του P_α διάστασης $\ell - 2$.

   Επειδή το $\Phi - \{+\alpha, -\alpha\}$ είναι πεπερασμένο, υπάρχει κάποιο $\gamma \in \mathrm{P}_\alpha$ το οποίο δεν ανήκει σε κανένα από τα P_β, με $\beta \in \Phi - \{+\alpha, -\alpha\}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_\beta = |(x,\beta)| - |(x,\alpha)|$, για $x \in \mathrm{E}$ και $\beta \in \Phi - \{+\alpha, -\alpha\}$. Η f_β είναι συνεχής συνάρτηση, και συνεπώς το σύνολο $\mathrm{A}_\beta = \{x \in \mathrm{E} : f_\beta > 0\}$ είναι ανοιχτό και περιέχει το γ. Συνεπώς και η πεπερασμένη τομή $\mathrm{A} = \bigcap\{\mathrm{A}_\beta : \beta \in \Phi - \{+\alpha, -\alpha\}\}$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του Ε και περιέχει το γ.

Διαλέγουμε ένα στοιχείο γ' στο Α τέτοιο ώστε $(\gamma', \alpha) > 0$. Τότε $|(\gamma', \beta)| > (\gamma', \alpha)$ για κάθε $\beta \in \Phi - \{+\alpha, -\alpha\}$. Έχουμε ότι η ρίζα α ανήκει στο $\Phi^+(\gamma')$. Εάν υπάρχουν $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma')$ για τα οποία $\alpha = \beta_1 + \beta_2$, και εφαρμόσουμε εσωτερικό γινόμενο με το γ' έχουμε

$$(\gamma', \alpha) = (\gamma', \beta_1) + (\gamma', \beta_2).$$

Αδύνατο, αφού $(\gamma', \beta_i) > 0$ και $(\gamma', \beta_i) > (\gamma', \alpha)$, για $i = 1, 2$. Επομένως η α είναι indecomposable στο $\Phi^+(\gamma')$, άρα ανήκει στη βάση $\Delta(\gamma')$.

4. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο της υποομάδας $\mathcal{W}'$ είναι σύνθεση ανακλάσεων ως προς απλές ρίζες. Σύμφωνα με το 3 υπάρχει κάποιο $\sigma \in \mathcal{W}'$, το οποίο είναι σύνθεση ανακλάσεων ως προς απλές ρίζες, τέτοιο ώστε $\sigma(\alpha) \in \Delta$. Αλλά τότε $\sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$, άρα $\sigma(\alpha) = \sigma^{-1}\sigma_{\sigma(\alpha)}\sigma \in \mathcal{W}'$.

Τέλος, δείχνουμε το 2(β΄). Υποθέτουμε ότι $\sigma(\Delta) = \Delta$ και ότι $\sigma \neq \mathrm{id}$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Από το 4, γνωρίζουμε ότι η σ εκφράζεται ως σύνθεση ανακλάσεων ως προς απλές ρίζες. Θεωρούμε μία τέτοια έκφραση με τον περιορισμό ότι εκφράζεται με τον πιο σύντομο τρόπο. Δηλαδή $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_t}$, με $\alpha_i \in \Delta$, για $i = 1, \ldots, t$. Τότε από το Πόρισμα 3.20 συμπεραίνουμε ότι $\sigma_{\alpha_t} \prec 0$. Επομένως $\sigma_{\alpha_t} \notin \Delta$, άτοπο.

□

Ορισμός. Έστω σ ένα στοιχείο της ομάδας Weyl. Ονομάζουμε **reduced** μορφή του σ την πιο σύντομη έκφρασή του ως γινόμενο ανακλάσεων ως προς απλές ρίζες κάποιας βάσης Δ. Οπότε $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_t}$, όπου τα α_i είναι απλές ρίζες και το t είναι το ελάχιστο δυνατό.

Η σ σε αυτή την μορφή είναι το γινόμενο ανακλάσεων ως προς κάποια στοιχεία του Δ, όχι απαραίτητα όλων και ίσως ορισμένες από αυτές να επαναλαμβάνονται. Είναι μία σύνθεση ανακλάσεων που περιέχει λιγότερες ή ίσες ανακλάσεις από οποιαδήποτε άλλη ισοδύναμη έκφραση. Έτσι για κάθε τέτοια μορφή ορίζουμε το μήκος της σ.

Ορισμός. Θεωρούμε ένα στοιχείο σ της ομάδας Weyl στη reduced μορφή $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_t}$, με $\alpha_i \in \Delta$, ορίζουμε το **μήκος** του σ να είναι ο αριθμός που δηλώνει το πλήθος των όρων που απαρτίζουν το γινόμενο και συμβολίζεται με $\ell(\sigma)$. Τότε $\ell(\sigma) = t$. Επίσης, ορίζουμε $\ell(1) = 0$.

Συμβολίζουμε με $\mathrm{n}(\sigma)$ το πλήθος των θετικών ριζών όπου εάν εφαρμοστεί σε αυτές ένα στοιχείο σ της ομάδας Weyl δίδουν αρνητική ρίζα. Δηλαδή

$$\mathrm{n}(\sigma) = \text{πλήθος των } \alpha \in \Phi^+ \text{ με την ιδιότητα: } \sigma(\alpha) \prec 0.$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να προσδιορίσουμε το μήκος ενός στοιχείου σ του $\mathcal{W}$, είναι ο αριθμός $\mathrm{n}(\sigma)$. Αρκεί να αποδείξουμε το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 3.22 *Για όλα τα σ του $\mathcal{W}$, ισχύει $\ell(\sigma) = \mathrm{n}(\sigma)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $\ell : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{Z}_0^+$, όπου $\sigma \longmapsto \ell(\sigma)$. Κάνουμε επαγωγή στο $\ell(\sigma)$.

Έχουμε $\ell(\sigma) = 0$, άρα η σ είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Σε αυτή την περίπτωση όλες οι ρίζες απεικονίζονται μέσω της σ στον εαυτό τους. Δηλαδή οι θετικές σε θετικές και οι αρνητικές σε αρνητικές. Άρα δεν υπάρχουν θετικές ρίζες που να απεικονίζονται σε αρνητικές. Οπότε $\mathrm{n}(\sigma) = \mathrm{n}(1) = 0$. Συνεπώς $\ell(\sigma) = \mathrm{n}(\sigma) = 0$.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι ισχύει $\ell(\tau) = \mathrm{n}(\tau)$ για όλα τα στοιχεία τ του $\mathcal{W}$ που έχουν μικρότερο μήκος από αυτό της σ. Γράφουμε τη σ σε *reduced* μορφή $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_t}$, με $\alpha_i \in \Delta$, για κάποια βάση Δ. Τότε από το Πόρισμα 3.20 συμπεραίνουμε ότι $\sigma(\alpha_t) \prec 0$.

Επίσης, το $\mathrm{n}(\sigma\sigma_{\alpha_t})$ είναι ο αριθμός των θετικών ριζών x που απεικονίζονται σε αρνητική ρίζα, δηλαδή $\sigma(\sigma_{\alpha_t}(x)) \prec 0$. Όμως από το Λήμμα 3.17 η ανάκλαση ως προς την απλή ρίζα α_t αφήνει αναλλοίωτο το σύνολο $\Phi^+ - \{\alpha_t\}$ και όλες οι θετικές ρίζες εκτός από την α_t, απεικονίζονται σε θετικές. Άρα $\mathrm{n}(\sigma\sigma_{\alpha_t)}) = \mathrm{n}(\sigma) - 1$. Από την άλλη έχουμε $\sigma\sigma_{\alpha_t} = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_{t-1}} \sigma_{\alpha_t} \sigma_{\alpha_t} = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_{t-1}}$. Επομένως το μήκος της $\sigma\sigma_{\alpha_t}$ ισούται με $\ell(\sigma\sigma_{\alpha_t}) = \ell(\sigma) - 1 < \ell(\sigma)$ άρα για το $\sigma\sigma_{\alpha_t}$ ισχύει, $\ell(\sigma\sigma_{\alpha_t}) = \mathrm{n}(\sigma\sigma_{\alpha})$. Συνεπώς από την επαγωγική μέθοδο $\ell(\sigma) = \mathrm{n}(\sigma)$, για κάθε $\sigma \in \mathcal{W}$.

□

Λήμμα 3.23 *Έστω $\gamma \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$. Τότε $\sigma(\gamma) \prec \gamma$ για όλα τα $\sigma \in \mathcal{W}$. Αν $\gamma \in \mathcal{C}(\Delta)$, τότε $\sigma(\gamma) = \gamma$ μόνον όταν $\sigma = 1$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το Δ, με $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ να είναι μία βάση του Φ, όπου $n = \mathrm{rank}\Phi$ και το τυχαίο στοιχείο σ της ομάδας Weyl, με τον περιορισμό $\sigma \neq 1$. Το σ ως στοιχείο του $\mathcal{W}$ γράφεται σε reduced έκφραση.

Θεωρούμε τη συνάρτηση των δεικτών $i : \{1, \ldots, t\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$, με $\sigma_{\alpha_{i(j)}} = \sigma_{i(j)}$ και $j \in \{1, \ldots, n\}$, άρα $\sigma = \sigma_{\alpha_{i(1)}} \cdots \sigma_{\alpha_{i(t)}} = \sigma_{i(1)} \cdots \sigma_{i(t)}$, όπου t είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός ώστε η σ να μην ισοδυναμεί με καμία σύνθεση ανακλάσεων μικρότερου μήκους. Επομένως η σ^{-1} ισούται με $\sigma^{-1} = \sigma_{i(t)} \cdots \sigma_{i(1)}$ και είναι σε reduced μορφή, αφου η σ είναι reduced.

Τώρα, θεωρούμε το μερικό γινόμενο των απλών ανακλάσεων της σ^{-1}, δηλαδή $\sigma' = \sigma_{i(t)} \cdots \sigma_{i(s)}$, για κάποιο $s, 1 \leq s \leq t$. Η σ' είναι σε reduced μορφή, διότι διαφορετικά ούτε η σ^{-1} θα ήταν εκφρασμένη σε reduced γραφή. Άρα από το Πόρισμα 3.20 έχουμε ότι $\sigma'(\alpha_{i(s)}) \prec 0$ και αντικαθιστώντας παίρνουμε $\sigma_{i(t)} \cdots \sigma_{i(s+1)}\sigma_{i(s)}(\alpha_{i(s)}) \prec 0$ οπότε $\sigma_{i(t)} \cdots \sigma_{i(s+1)}(-\alpha_{i(s)}) \prec 0$, άρα

$$\sigma_{i(t)} \cdots \sigma_{i(s+1)}(\alpha_{i(s)}) \succ 0.$$

Εφαρμόζουμε τη $(\sigma_{i(s+1)} \cdots \sigma_{i(t)})^{-1}$ στο εσωτερικό γινόμενο

$$(\sigma_{i(s+1)} \cdots \sigma_{i(t)}(\gamma), \alpha_{i(s)})$$

και προκύπτει $\Big((\sigma_{i(s+1)} \cdots \sigma_{i(t)})^{-1}(\sigma_{i(s+1)} \cdots \sigma_{i(t)})(\gamma), (\sigma_{i(s+1)} \cdots \sigma_{i(t)})^{-1}\alpha_{i(s)}\Big)$. Τα δύο εσωτερικά γινόμενα είναι ίσα, αφού τα στοιχεία της ομάδας Weyl διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο. Όμως, όπως δείξαμε παραπάνω το $\sigma_{i(t)} \cdots \sigma_{i(s+1)}(\alpha_{i(s)}) \in \Phi^+$ και αφού το γ ανήκει στην κλειστή θήκη του $\mathcal{C}(\Delta)$ τελικά έχουμε ότι $(\gamma, \sigma_{i(t)} \cdots \sigma_{i(s+1)}\alpha_{i(s)}) \geq 0$.

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα θα δείξουμε την ανισότητα $\sigma(\gamma) \prec \gamma$. Δηλαδή για να πάρουμε το $\sigma(\gamma)$ θα πρέπει να αφαιρέσουμε από το γ ένα άθροισμα απλών ριζών με μη-αρνητικούς συντελεστές.

Εφαρμόζουμε τη σ, με $\sigma = \sigma_{i(1)} \cdots \sigma_{i(t)}$ στο γ και την υπολογίζουμε από τα δεξιά προς τα αριστερά. Στο πρώτο βήμα: το $\sigma_{i(t)}(\gamma)$ ισούται με

$$\sigma_{i(t)}(\gamma) = \gamma - 2(\gamma, \alpha_{i(t)})\alpha_{i(t)}/(\alpha_{i(t)}, \alpha_{i(t)})$$

αλλά ο δεύτερος όρος αυτής της διαφοράς είναι θετικός ή μηδέν, αφού το $\gamma \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ και έτσι $(\gamma, \alpha_{i(t)}) \geq 0$. Οπότε $\sigma_{i(t)}(\gamma) \prec \gamma$.

Σε ένα ενδιάμεσο βήμα της εφαρμογής του σ στο γ : Γράφουμε τη σ ως $\sigma = \sigma_{i(1)} \cdots \sigma_{i(s)}\sigma_{i(s+1)} \cdots \sigma_{i(t)}$ και αν $\sigma_{i(s+1)} \cdots \sigma_{i(t)}(\gamma) = \gamma'$ έχουμε

$$\sigma_{i(s)}(\gamma') = \gamma' - 2(\gamma', \alpha_{i(s)})\alpha_{i(s)}/(\alpha_{i(s)}, \alpha_{i(s)})$$

με το δεύτερο όρο μη αρνητικό, αφού $(\gamma', \alpha_{i(s)}) = (\sigma_{i(s+1)} \cdots \sigma_{i(t)}(\gamma), \alpha_{i(s)}) \geq 0$. Οπότε $\sigma_{i(s)}(\gamma') \prec \gamma'$. Δηλαδή σε κάθε βήμα αφαιρούμε θετικά ή μηδενικά πολλαπλάσια των στοιχείων της βάσης.

Στην περίπτωση που δεν αφαιρούμε κάποια ποσότητα από όλα τα βήματα ισχύει ότι $\sigma(\gamma) = \gamma$. Αυτό συμβαίνει είτε όταν $(\gamma, \alpha_{i(r)}) = 0$, για όλα τα $r, 1 \leq r \leq t$ και τότε το γ ανήκει στο σύνορο της περιοχής $\mathcal{C}(\Delta)$, είτε όταν το $t = 0$, δηλαδή όταν η σ είναι η ταυτοτική απεικόνιση, $\sigma = 1$.

$\square$

Κεφάλαιο 4

Irreducible συστήματα ριζών

Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγουμε την έννοια του irreducible συστήματος ριζών. Τα συστήματα της κατηγορίας αυτής σχετίζονται με το πόσο είναι δυνατή η ανάλυση του συστήματος σε ορθογώνια υποσύνολα. Η επόμενη κίνησή μας είναι να τα ορίσουμε και να δούμε αν αυτού του είδους η διάσπαση μεταφέρεται στις βάσεις, ή ακόμα και σε όλο το χώρο.

Ορισμός. Θεωρούμε ένα σύστημα ριζών Φ. Το Φ ονομάζεται **irreducible** εάν δεν μπορεί να διαμεριστεί σε δύο γνήσια υποσύνολα τέτοια ώστε, κάθε ρίζα του ενός συνόλου να είναι ορθογώνια σε κάθε ρίζα του άλλου.

Δηλαδή, δεν υπάρχουν Φ_1, Φ_2 με $\Phi_i \subsetneq \Phi, i = 1, 2$ τέτοια ώστε $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. Επομένως για κάθε x_1, x_2 που ανήκουν στα Φ_1, Φ_2 αντίστοιχα, ισχύει $(x_1, x_2) = 0$ και $\Phi_1 \cup \Phi_2 = \Phi$.

Σημείωση 4.1 *Από τα συστήματα ριζών που έχουμε εξετάσει μόνο το* $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_1$ ***δε*** *χαρακτηρίζεται ως irreducible. Αυτό μπορούμε εύκολα να το δείξουμε κατασκευάζοντας τα υποσύνολα του* Φ, $\Phi_1 = \{\alpha, -\alpha\}$ *και* $\Phi_2 = \{\beta, -\beta\}$.

Λήμμα 4.2 *Έστω* Δ *μία βάση του* Φ. *Υποθέτουμε ότι η βάση διαμερίζεται σε δύο ορθογώνια, γνήσια υποσύνολά της. Τότε ορίζεται διαμέριση στο* Φ, *σε* Φ_1 *και* Φ_2, *όπου καθένα από τα* Φ_i *βρίσκεται στον υπόχωρο* E_i *του* E *που παράγεται από το* Δ_i, *για* $i = 1, 2$, *και μόνον από αυτό.*
Προφανώς, το παραπάνω γενικεύεται και σε διαμέριση του Δ *με περισσότερα από δύο υποσύνολα.*

Απόδειξη. Το Δ διαμερίζεται σε ορθογώνια υποσύνολα, άρα γράφεται ως $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, με $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$ και $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.21.3 , για κάθε ρίζα του Φ, υπάρχει κάποιο στοιχείο της ομάδας Weyl, έτσι ώστε η εικόνα της ρίζας μέσω αυτού να είναι απλή ρίζα. Όπως διαμερίσαμε το Δ σε Δ_1 και Δ_2 μπορούμε να διασπάσουμε το Φ κάνοντας την εξής διαμέριση: $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, όπου Φ_i είναι είναι το σύνολο των ριζών που έχουν συζυγή ρίζα στο Δ_i.

Θεωρούμε ένα στοιχείο σ της ομάδας Weyl, θα δείξουμε ότι γράφεται ως γινόμενο ανακλάσεων ως προς απλές ρίζες ενός από τα Δ_i. Υποθέτουμε ότι η σ είναι γινόμενο ανακλάσεων ως προς απλές ρίζες του Δ, δηλαδή $\sigma = \sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}\cdots\sigma_{\alpha_k}\cdots\sigma_{\alpha_t}$. Εφαρμόζουμε τη σ σε κάποια απλή ρίζα α του Δ_1, άρα $\sigma(\alpha) = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k\cdots\sigma_t(\alpha)$ με $\sigma_i = \sigma_{\alpha_i}$ και $\alpha_i \in \Delta$. Τότε κάποια από τα α_i ανήκουν στο Δ_1 και κάποια άλλα στο Δ_2.

Βάσει του Λήμματος 6.3 για τις ρίζες των κάθετων συνόλων Δ_1, Δ_2 μπορούμε να θεωρήσουμε την μετάθεση των δεικτών $\varrho : \{1,\ldots,t\} \longrightarrow \{1,\ldots,t\}$, τέτοια ώστε να συσσωρεύονται οι ανακλάσεις ως προς κάποια στοιχεία του Δ_1 αρχικά, ενώ μετά να ακολουθούν οι ανακλάσεις ως προς ρίζες του Δ_2. Άρα

$$\sigma(\alpha) = \sigma_{\varrho(1)}\cdots\sigma_{\varrho(k)}\sigma_{\varrho(k+1)}\cdots\sigma_{\varrho(t)}(\alpha)$$

όπου $\alpha_{\varrho(1)}\ldots\alpha_{\varrho(k)} \in \Delta_1$ και $\alpha_{\varrho(k+1)}\ldots\alpha_{\varrho(t)} \in \Delta_2$, με την ιδιότητα $(\alpha_{\varrho(j)}, \alpha_{\varrho(\ell)}) = 0$ για όλα τα $j = 1,\ldots,k$, $\ell = k+1,\ldots,t$. Αλλά για $k+1 \leq i \leq t$ έχουμε $(\alpha, \alpha_i) = 0$, και συνεπώς $\sigma_{\alpha_i}(\alpha) = \alpha$. Επομένως

$$\sigma(\alpha) = \sigma_{\varrho(1)}\cdots\sigma_{\varrho(k)}(\alpha)$$

Όμως αν αντικαταστήσουμε το $\sigma_{\varrho(k)}(\alpha)$ με τον τύπο της ανάκλασης προκύπτει ένας γραμμικός συνδυασμός των απλών ριζών του Δ_1.

Υπολογίζουμε τις ανακλάσεις από τα δεξιά προς τα αριστερά και κάθε φορά η σ εφαρμόζεται σε κάποιον ακέραιο γραμμικό συνδυασμό. Όμως, αφού είναι γραμμική απεικόνιση το αποτέλεσμα θα είναι πάλι κάποιος γραμμικός συνδυασμός των απλών ριζών του Δ_1. Συνεπώς, οποιαδήποτε απλή ρίζα α του E_1, εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του Δ_1.

$\square$

Πρόταση 4.3 *Έστω Δ μία βάση του Φ. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το Φ είναι irreducible σύστημα ριζών*
2. *Η βάση Δ δε διαμερίζεται σε δύο γνήσια υποσύνολα έτσι ώστε κάθε ρίζα του ενός να είναι ορθογώνια σε κάθε ρίζα του άλλου*

Απόδειξη. Δείχνουμε την κατεύθυνση 2. $\Longrightarrow$ 1. Εάν το Δ δε διαμερίζεται τότε το Φ είναι irreducible, ή ισοδύναμα, εάν το Φ δεν είναι irreducible τότε το Δ διαμερίζεται. Υποθέτουμε ότι το Φ δεν είναι irreducible, οπότε υπάρχουν γνήσια υποσύνολα του Φ, τα Φ_1, Φ_2 τέτοια ώστε: $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ με την ιδιότητα $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$.

Θεωρούμε ότι η βάση Δ περιέχεται εξ' ολοκλήρου σε κάποιο από τα υποσύνολα του Φ, έστω ότι $\Delta \subseteq \Phi_1$. Όμως, επειδή $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$ τελικά παίρνουμε $(\Delta, \Phi_2) = 0$ και αφού το Δ παράγει το χώρο E, ισχύει $(\mathrm{E}, \Phi_2) = 0$. Συνεπώς τα διανύσματα του Φ_2 είναι κάθετα σε όλα τα διανύσματα του χώρου.

Αυτή την ιδιότητα την έχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα, άρα $\Phi_2 \subseteq \{0\}$. Όμως το Φ_2 δεν περιέχει το μηδενικό διάνυσμα, λόγω του (R1) στον ορισμό του Φ, οπότε $\Phi_2 = \varnothing$. Επομένως $\Phi = \Phi_1$ και το Φ δε διαμερίζεται.

Αντίφαση, διότι αρχικά δεχθήκαμε ότι το Φ διαμερίζεται από τα Φ_1 και Φ_2. Άρα, η αρχική υπόθεση ότι το Δ περιέχεται ολόκληρο στο Φ_1 είναι λανθασμένη και συνεπώς διαμερίζεται σε υποσύνολα.

Δείχνουμε την κατεύθυνση 1. $\Longrightarrow$ 2. Υποθέτουμε ότι το Φ είναι irreducible και θα δείξουμε ότι το Δ δε διαμερίζεται. Δηλαδή ότι εάν το Δ γράφεται ως $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ με $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$ και $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$ τότε ένα από τα Δ_1, Δ_2 είναι το κενό. Η διάσπαση του Δ οδηγεί στη ανάλυση του Φ με $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, όπου Φ_i είναι το σύνολο των ριζών που έχουν συζυγή ρίζα στο Δ_i. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.2, το Φ_i βρίσκεται στον υπόχωρο E_i του E που παράγεται από το Δ_i με $i = 1, 2$ και μόνον από αυτό.

Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία του Φ_i γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του Δ_i. Επομένως, εάν $\alpha \in \Phi_1$ και $\beta \in \Phi_2$, τότε $(\alpha, \beta) = 0$, αφού $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$. Αλλά το Φ είναι irreducible σύστημα ριζών, άρα αναγκαστικά ένα από τα Φ_1, Φ_2 πρέπει να είναι το κενό σύνολο, $\Phi_1 = \varnothing$ ή $\Phi_2 = \varnothing$. Οπότε $\Delta_1 = \varnothing$ ή $\Delta_2 = \varnothing$ και επειδή $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ με $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$, έχουμε $\Delta = \Delta_1$ ή $\Delta = \Delta_2$, έτσι το Δ δε διαμερίζεται.

$\square$

Λήμμα 4.4 *Έστω Φ ένα irreducible σύστημα ριζών. Αν Δ είναι μία βάση του Φ, τότε στην μερική διάταξη $\prec$ που ορίζει, υπάρχει μοναδική μέγιστη ρίζα β. Συγκεκριμένα, αν η β είναι η μέγιστη, τότε $\mathrm{ht}\alpha < \mathrm{ht}\beta$ με $\alpha \neq \beta$. Επίσης, η μέγιστη ρίζα σχηματίζει με όλες τις απλές ρίζες μη-αρνητικό εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή $(\beta, \alpha) \geq 0$, για όλα τα $\alpha \in \Delta$. Ενώ, όταν εκφράζεται ως $\mathbb{Z}$-γραμμικός συνδυασμός των απλών ριζών όλοι οι συντελεστές είναι γνήσια θετικοί.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη βάση Δ του $\Phi, \Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$, όπου $\mathrm{rank}\Phi = \ell$. Έστω β μία μέγιστη ρίζα της μερικής διάταξης $\prec$. Αρχικά θα δείξουμε πως οι συντελεστές στο γραμμικό συνδυασμό των απλών ριζών που αντιστοιχεί στο β είναι γνήσια θετικοί.

Σύμφωνα με το (B2) του ορισμού της βάσης του Φ, το β γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των απλών ριζών του Δ με ομόσημους όλους τους συντελεστές. Όμως από τον τρόπο που ορίζεται η διάταξη έχουμε $\beta \succ 0$, οπότε αν $\beta = \sum k_{\alpha_i} \alpha_i$, τότε $k_{\alpha_i} \geq 0$.

Διαμερίζουμε το Δ σε δύο υποσύνολα Δ_1 και Δ_2, με

$$\Delta_1 = \{\alpha_i \in \Delta |\, k_{\alpha_i} > 0\}$$

και

$$\Delta_2 = \{\alpha_i \in \Delta |\, k_{\alpha_i} = 0\}$$

Υποθέτουμε ότι το Δ_2 είναι μη-κενό σύνολο. Από το Λήμμα 3.4 ισχύει ότι κάθε ζεύγος απλών ριζών στο Δ, σχηματίζει μη-θετικό εσωτερικό γινόμενο και επειδή το Δ_2 είναι μη-κενό, $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0, \alpha_i \in \Delta_2, \alpha_j \in \Delta$.

Αλλά το Φ είναι irreducible, άρα υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο Δ_2, έστω η α_k για κάποιο $k \in \{1, \ldots, \ell\}$ που δεν είναι ορθογώνια σε τουλάχιστον μία ρίζα του Δ_1. Άρα $(\alpha_k, \beta) = \sum_{\alpha_i \in \Delta_1} (\alpha_k, \alpha_i)$, όμως επειδή το εσωτερικό γινόμενο των στοιχείων των Δ_1 και Δ_2 είναι γενικά μη-θετικό και τουλάχιστον για μία ρίζα του Δ_1 σχηματίζεται γνήσια αρνητικό εσωτερικό γινόμενο με το α_k, τελικά το άθροισμα θα διατηρείται μη-μηδενικό. Άρα $(\alpha_k, \beta) < 0$.

Έτσι από το Λήμμα 2.3 το $\alpha_k + \beta$ αποτελεί ρίζα και μάλιστα $\alpha_k + \beta > \beta$, εφόσον η απλή ρίζα α_k γράφεται ως $\alpha_k + \beta - \beta$.

Δηλαδή ως προς τη διάταξη $\prec$, προέκυψε ρίζα μεγαλύτερη της β που υποθέσαμε ότι είναι μέγιστη. Οπότε καταλήγουμε σε άτοπο και έτσι συμπεραίνουμε ότι το σύνολο Δ_2 είναι κενό. Άρα $k_{\alpha_i} > 0$ για όλα τα α_i στο Δ.

Επομένως $(\alpha_i, \beta) \geq 0$, $\forall \alpha_i \in \Delta$. Επίσης η περίπτωση που το β είναι ορθογώνιο σε όλα τα στοιχεία του Δ απορρίπτεται, λόγω του (B1) του ορισμού της βάσης Δ. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα από τα α_i, έστω α_m με $m \in \{1, \ldots, \ell\}$, για το οποίο ισχύει $(\alpha_m, \beta) > 0$. Τέλος αποδεικνύουμε την μοναδικότητα της μέγιστης ρίζας.

Τη δείχνουμε με άτοπο. Αρχικά υποθέτουμε ότι υπάρχει και μία δεύτερη μέγιστη ρίζα β' διαφορετική της β. Τότε σύμφωνα με τα προηγούμενα, υπάρχει κάποιο $\alpha_k \in \Delta$ για το οποίο $(\alpha_k, \beta) > 0$ και

$$\beta = \sum_{\alpha_i \in \Delta_1} k_{\alpha_i} \alpha_i$$

με $k_{\alpha_i} > 0$. Ομοίως και για τη β', υπάρχει κάποιο $\alpha_j \in \Delta$ για το οποίο ισχύει $(\alpha_j, \beta') > 0$ και

$$\beta' = \sum_{\alpha_i \in \Delta_1} n_{\alpha_i} \alpha_i$$

με $n_{\alpha_i} > 0$. Προφανώς για κάποιο i, $k_{\alpha_i} \neq n_{\alpha_i}$ ώστε να έχουμε $\beta \neq \beta'$.

Παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο της β' με τη β, οπότε

$$(\beta, \beta') = \sum_{\alpha_i \in \Delta} n_{\alpha_i} (\alpha_i, \beta)$$

με $(\alpha_i, \beta) \geq 0$, και αφού υπάρχει τουλάχιστον ένα $\alpha_k \in \Delta$ για το οποίο ισχύει $(\alpha_k, \beta) > 0$ έχουμε $(\beta, \beta') > 0$.

Επομένως από το Λήμμα 2.3 η διαφορά $\beta' - \beta$ είναι ρίζα ως προς τη βάση Δ. Άρα από το (R2) του συστήματος ριζών Φ και το $\beta - \beta'$ είναι ρίζα. Έτσι αναγκαστικά το ένα ανήκει στο Φ^+ και το άλλο στο Φ^-.

Δηλαδή, λόγω του (B1) του ορισμού του Δ, είτε το $\beta - \beta'$ είτε το $\beta' - \beta$ γράφεται ως άθροισμα θετικών πολλαπλασίων απλών ριζών. Συνεπώς $\beta' \succ \beta$ ή $\beta \prec \beta'$. Και οι δύο ανισότητες δίδουν το ίδιο αποτέλεσμα, διότι βρίσκουμε ρίζα μεγαλύτερη της μέγιστης. Επομένως η αρχική υπόθεση ότι υπάρχουν περισσότερες από μία μέγιστη ρίζα είναι λανθασμένη. Άρα $\beta = \beta'$.

$\square$

Λήμμα 4.5 *Έστω* E *ένας* $\mathbb{R}$*-διανυσματικός χώρος και* Φ *ένα irreducible σύστημα ριζών του. Τότε, η Weyl ομάδα του* Φ *δρα irreducibly στο* E*. Επίσης εάν* α *είναι μία ρίζα, τότε η* $\mathcal{W}$*-τροχιά του* α *παράγει όλο το χώρο* E*.*

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν μη-μηδενικό υπόχωρο του E, αναλλοίωτο από το $\mathcal{W}$, έστω E'. Δηλαδή για τον E' ισχύει ότι $\sigma(\mathrm{E}') = \mathrm{E}'$ αφού η σ είναι ισομορφισμός και ο χώρος είναι πεπερασμένης διάστασης.

Θεωρούμε το ορθογώνιο συμπλήρωμα του E', έστω E''. Αυτό παραμένει αναλλοίωτο κάτω από τη Weyl ομάδα. Διότι, εάν α είναι ένα στοιχείο του E'', τότε $(x, \alpha) = 0$ για κάθε $x \in \mathrm{E}''$. Όμως επειδή το σ είναι ισομετρία έχουμε ότι $(\sigma(x), \sigma(\alpha)) = 0$. Επομένως το διάνυσμα $\sigma(\alpha)$ είναι ορθογώνιο σε όλα τα διανύσματα του $\sigma(\mathrm{E}')$. Αλλά επειδή $\sigma(\mathrm{E}') = \mathrm{E}'$ τότε το $\sigma(\alpha)$ είναι ορθογώνιο σε κάθε διάνυσμα του E'. Συνεπώς $\sigma(\alpha) \in \mathrm{E}''$, και έτσι το E'' είναι αναλλοίωτο από το σ.

Άρα από το Λήμμα 6.5 είτε $\alpha \in \mathrm{E}'$, είτε $\mathrm{E}' \subsetneq \mathrm{P}_\alpha$. Εάν $\mathrm{E}' \subsetneq \mathrm{P}_\alpha$, τότε η ρίζα α είναι ορθογώνια στο E' και επομένως $\alpha \in \mathrm{E}''$. Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι κάθε ρίζα του Φ'' θα ανήκει είτε στο E', είτε στο E''.

Θέτουμε $\Phi' = \Phi \cap \mathrm{E}'$ και $\Phi'' = \Phi \cap \mathrm{E}''$. Τότε $\Phi' \cup \Phi'' = \Phi$, και $(\Phi', \Phi'') = 0$. Όμως το Φ είναι irreducible, άρα ένα από τα Φ', Φ'' είναι το κενό σύνολο. Υποθέτουμε ότι $\Phi'' = \Phi$. Τότε $\Phi \subsetneq \mathrm{E}''$ και εφόσον το Φ παράγει το E, έχουμε ότι $\mathrm{E}'' = \mathrm{E}$ και $\mathrm{E}' = \{0\}$. Όμως αρχικά υποθέσαμε ότι $\mathrm{E}' \neq \{0\}$, άρα $\Phi \subsetneq \mathrm{E}'$. Επομένως αφού το Φ παράγει το E, συμπεραίνουμε ότι ένα από τα $\mathrm{E}', \mathrm{E}''$ θα είναι ίσο με το E, και το άλλο με το $\{0\}$. Επομένως οι μοναδικοί υπόχωροι που είναι αναλλοίωτοι από το $\mathcal{W}$ είναι το E και το $\{0\}$, και το $\mathcal{W}$ δρα irreducibly.

$\square$

Λήμμα 4.6 *Εάν το* Φ *είναι ένα irreducible σύστημα ριζών, τότε*

1. *οι ρίζες του έχουν το πολύ δύο διαφορετικά μήκη και*

2. *οι ρίζες του ίδιου μήκους είναι συζυγείς κάτω από το* $\mathcal{W}$

Απόδειξη.

1. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.5, όλος ο χώρος E παράγεται από την τροχιά του $\mathcal{W}$. Δηλαδή από όλα τα σ_α για κάποιο $\alpha \in \Phi$. Επομένως δεν είναι δυνατόν όλα τα σ_α να είναι ορθογώνια σε μία οποιαδήποτε ρίζα β. Άρα εάν

$(\alpha, \beta) \neq 0$, από τον Πίνακα ⓟ, για δύο μη συγγραμμικές ρίζες οι πιθανοί λόγοι των τετραγώνων των μηκών είναι $1, 2, 3, 1/2, 1/3$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τρία διαφορετικά μήκη στις ρίζες του Φ. Έστω α, β, γ με $\| \beta \|^2 / \| \alpha \|^2 = 2$ και $\| \gamma \|^2 / \| \beta \|^2 = 3$. Τότε προκύπτει $\| \gamma \|^2 / \| \alpha \|^2 = 6$ που δε συμπεριλαμβάνεται στις πιθανές τιμές. Οπότε μπορούμε να έχουμε το πολύ δύο διαφορετικά μήκη.

2. Υποθέτουμε ότι οι ρίζες α και β έχουν το ίδιο μήκος. Τότε από τον Πίνακα ⓟ έχουμε

$$<\alpha,\, \beta> = <\beta,\, \alpha> = +1 \quad \text{ή} \quad -1.$$

- Εάν $<\alpha,\, \beta> = +1$ τότε προφανώς $<\beta,\, \alpha> = +1$, οπότε

$$\begin{aligned}
(\sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\alpha)(\beta) &= \sigma_\alpha \sigma_\beta(\sigma_\alpha(\beta)) \\
&= \sigma_\alpha \sigma_\beta(\beta - <\beta,\, \alpha> \alpha) \\
&= \sigma_\alpha \sigma_\beta(\beta - \alpha) \\
&= \sigma_\alpha(\sigma_\beta(\beta) - \sigma_\beta(\alpha)) \\
&= \sigma_\alpha(-\beta - \alpha + <\alpha,\, \beta> \beta) \\
&= \sigma_\alpha(-\beta - \alpha + \beta) \\
&= \sigma_\alpha(-\alpha) \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

  Άρα οι α και β είναι συζυγείς κάτω από το $\mathcal{W}$.

- Εάν $<\alpha,\, \beta> = -1$ τότε προφανώς $<\beta,\, \alpha> = -1$. Οπότε $<\alpha,\, -\beta> = 1$ και $<-\beta,\, \alpha> = 1$. Από το προηγούμενο, $\sigma_\alpha \sigma_{-\beta} \sigma_\alpha(-\beta) = \alpha$ και επειδή $\sigma_\alpha(-\beta) \neq \beta$ ή $-\beta$ έχουμε

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\alpha(-\beta) = \alpha \quad \text{άρα} \quad \sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\alpha(\beta) = -\alpha$$

  Δηλαδή $\sigma_\beta \sigma_\alpha(\beta) = \alpha$ και έτσι οι α, β είναι συζυγείς κάτω από το $\mathcal{W}$.

$\square$

Στην περίπτωση που το σύστημα ριζών είναι irreducible και μεταξύ των ριζών υπάρχουν δύο διαφορετικά μεγέθη στα μήκη τους, τότε μιλάμε για **μακριές** και **κοντές** ρίζες. Ενώ, όταν όλες οι ρίζες έχουν το ίδιο μήκος, λέμε ότι όλες είναι μακριές.

Λήμμα 4.7 *Έστω Φ ένα irreducible σύστημα ριζών με δύο διαφορετικά μήκη στις ρίζες. Αν β είναι η μέγιστη ρίζα ως προς τη διάταξη $\prec$, τότε είναι μακριά.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι οποιαδήποτε ρίζα α ικανοποιεί την

$$(\beta, \beta) \geq (\alpha, \alpha).$$

Θεωρούμε τη βάση Δ του Φ που ορίζει την μερική διάταξη $\prec$, με $\Delta = \{x_1, x_2, \ldots, x_\ell\}$ και $\operatorname{rank}(\Phi) = \ell$.

Παίρνουμε τη συζυγή εικόνα του α στο $\overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ και την ονομάζουμε α', τότε εφόσον η β είναι η μέγιστη ρίζα ως προς την $\prec$, ισχύει $\beta \succ \alpha'$. Άρα από το ορισμό της διάταξης, η διαφορά $\beta - \alpha'$, είτε ισούται με το μηδενικό διάνυσμα, είτε είναι άθροισμα θετικών ριζών.

Προφανώς αν ισχύει η πρώτη εκδοχή, έχουμε $(\beta, \beta) = (\alpha', \alpha')$. Διαφορετικά, εάν το $\beta - \alpha'$ είναι άθροισμα θετικών ριζών τότε γράφεται στην μορφή

$$\beta - \alpha' = z_1 + \ldots + z_n \quad \text{με} \quad z_i \succ 0.$$

Άρα $z_i = \sum_{x_j \in \Delta} (k_{x_j})_i x_j$, όπου $(k_{x_j})_i \geq 0$ και $j = 1, \ldots, \ell, i = 1, \ldots, n$. Επομένως το $\beta - \alpha'$ είναι γραμμικός συνδυασμός των απλών ριζών με μη-αρνητικούς συντελεστές, οπότε $\beta - \alpha' \succ 0$.

Εάν πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο του $\beta - \alpha'$ με τα σημεία του $\overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ έχουμε μη-αρνητικό αποτέλεσμα, άρα και για $\beta \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ ισχύει $(\beta, \beta - \alpha') \geq 0$, οπότε $(\beta, \beta) \geq (\beta, \alpha')$. Επίσης για $\alpha' \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ έχουμε $(\beta, \alpha') \geq (\alpha', \alpha')$, άρα $(\beta, \beta) \geq (\alpha', \alpha')$.

$\square$

Κεφάλαιο 5

Ταξινόμηση

Σε αυτό το κεφάλαιο συνδέουμε τα συστήματα ριζών με μαθηματικά εργαλεία, πιο εύχρηστα και οικεία από αφηρημένες έννοιες. Αντιστοιχίζουμε σε καθένα από αυτά έναν πίνακα. Όπως θα δούμε παρακάτω όταν δύο συστήματα εκφράζονται από τον ίδιο πίνακα τότε είναι ισόμορφα. Έπειτα με τη βοήθεια αυτών των καθόλου τυχαίων πινάκων εισάγουμε κάποια γραφήματα που με τη χρήση τους, εκτός την περιγραφή του συστήματος που μπορούμε να κάνουμε, όπως με τους πίνακες, τα χρησιμοποιούμε και στη ταξινόμηση.

5.1 Ο πίνακας Cartan του Φ

Ορισμός. Έστω Φ ένα σύστημα ριζών τάξης ℓ. Θεωρούμε μία διατεταγμένη βάση απλών ριζών, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$. Ο πίνακας με στοιχεία $(<\alpha_i, \alpha_j>)$ ονομάζεται **πίνακας Cartan του** Φ και τα στοιχεία του λέγονται στοιχεία Cartan.

Για παράδειγμα οι πίνακες Cartan συστημάτων τάξης 2 που έχουμε ήδη δει είναι:
για το $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_1$: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, για το A_2 : $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, για το B_2 : $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ και για το G_2 : $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Αναλυτικά βλέπουμε την περίπτωση του B_2. Συμβολίζουμε το ζητούμενο πίνακα με X και x_{ij}, για $i, j = 1, 2$, τα στοιχεία του. Θεωρούμε τη διατεταγμένη βάση $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, και από τον τύπο της πράξης $<,>$ έχουμε $x_{11} = <\alpha_1, \alpha_1> = 2$, $x_{22} = <\alpha_2, \alpha_2> = 2$. Για τα υπόλοιπα στοιχεία συμβουλευόμαστε τον πίνακα (π) και την Παρατήρηση 3.2 οπότε παίρνουμε $x_{12} = <\alpha_1, \alpha_2> = -2$ και $x_{21} = <\alpha_2, \alpha_1> = -1$. Έτσι προκύπτει ο παραπάνω πίνακας.

Παρατήρηση 5.1 *Στο παράδειγμα βλέπουμε ότι εάν η διάταξη της βάσης ήταν διαφορετική προκύπτει ο ανάστροφος πίνακας. Όμως από το Θεώρημα 3.21 η* *ομάδα Weyl δρα μεταβατικά στις διαφορετικές βάσεις του Φ. Δηλαδή υπάρχει κάποια $\sigma \in \mathcal{W}$ τέτοια ώστε $\sigma(\Delta') = \Delta$ για Δ', Δ βάσεις του Φ με $\Delta' \neq \Delta$. Άρα ο πίνακας Cartan ενός συστήματος ριζών δεν εξαρτάται από την επιλογή της βάσης.*

Πρόταση 5.2 *Θεωρούμε δύο ευκλείδειους χώρους E και E', με συστήματα ριζών τάξης ℓ, Φ και Φ' αντίστοιχα. Σε καθένα από αυτά θεωρούμε μία διατεταγμένη βάση, $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ και $\Delta' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_\ell\}$. Υποθέτουμε ότι $< \alpha_i, \alpha_j > = < \alpha'_i, \alpha'_j >$, για $1 \leq i, j \leq \ell$, τότε η απεικόνιση $\alpha_i \longmapsto \alpha'_i$ μεταξύ των απλών ριζών των δύο βάσεων επεκτείνεται μοναδικά σε έναν ισομορφισμό $\phi : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}'$ απεικονίζοντας το Φ στο Φ', ικανοποιώντας τη σχέση $< \phi(\alpha), \phi(\beta) > = < \alpha, \beta >$, για όλα τα α, β στο Φ. Οπότε, ο πίνακας Cartan του Φ προσδιορίζει το Φ κατά προσέγγιση ισομορφισμού.*

Απόδειξη. Οι χώροι E και E' είναι της ίδιας διάστασης, άρα είναι ισόμορφοι. Όμως επειδή τα στοιχεία της βάσης προσδιορίζονται μοναδικά, ο ισομορφισμός $\phi : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}'$ είναι μοναδικός. Θεωρούμε α, β στο Δ, τότε

$$\begin{aligned}
\sigma_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta)) &= \sigma_{\alpha'}(\beta') \\
&= \beta' - <\beta', \alpha'> \alpha' \\
&= \phi(\beta) - <\beta, \alpha> \phi(\alpha) \\
&= \phi(\beta - <\beta, \alpha> \alpha) \\
&= \phi(\sigma_\alpha(\beta))
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.21 η ομάδα Weyl ενός συστήματος ριζών παράγεται από απλές ανακλάσεις. Επομένως, εάν το σ ανήκει στο $\mathcal{W}$, τότε γράφεται ως $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_k}$, για κάποιο $k \geq 1$. Οπότε το $\phi\sigma\phi^{-1}$ ισούται με

$$\begin{aligned}
\phi\sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_k}\phi^{-1} &= \phi\sigma_{\alpha_1}\phi^{-1}\phi\sigma_{\alpha_2}\phi^{-1} \cdots \phi\sigma_{\alpha_k}\phi^{-1} \\
&= \sigma_{\phi(\alpha_1)} \cdots \sigma_{\phi(\alpha_k)}
\end{aligned}$$

όπου $\phi(\alpha_i) \in \Delta'$.

Άρα το $\phi\sigma\phi^{-1}$ γράφεται ως γινόμενο απλών ανακλάσεων του Δ', επομένως ανήκει στο $\mathcal{W}'$ και έτσι ορίζεται απεικόνιση $\mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}' : \sigma \longmapsto \phi\sigma\phi^{-1}$.

Η απεικόνιση αυτή είναι επί του $\mathcal{W}'$, φανερό είναι ότι για κάθε $\phi\sigma\phi^{-1}$ υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο στο $\mathcal{W}$. Επίσης, εάν $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{W}$ με $\phi\sigma_1\phi^{-1} = \phi\sigma_2\phi^{-1}$, τότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με ϕ^{-1} στα αριστερά και με ϕ στα δεξιά έχουμε $\sigma_1 = \sigma_2$, δηλαδή η απεικόνιση είναι 1-1. Άρα οι ομάδες Weyl είναι ισόμορφες και το σ_α απεικονίζεται, σύμφωνα με το Λήμμα 2.1, στο $\sigma_{\phi(\alpha)}$ με $\alpha \in \Delta$.

Αλλά από το Θεώρημα 3.21 κάθε ρίζα β του Φ είναι η συζυγής εικόνα κάποιας απλής ρίζας. Δηλαδή υπάρχει στοιχείο α στο Δ, τέτοιο ώστε το β να γράφεται ως $\beta = \sigma(\alpha)$, για κάποιο σ στο $\mathcal{W}$. Οπότε

$$\phi(\beta) = \phi(\sigma(\alpha)) = \phi\sigma(\phi^{-1}\phi(\alpha)) = \phi\sigma\phi^{-1}(\phi(\alpha))$$

όπου $\phi(\beta) \in \Phi', \phi(\alpha) \in \Delta'$ και $\phi\sigma\phi^{-1} \in \mathcal{W}'$. Επομένως το Φ απεικονίζεται στο Φ' μέσω της ϕ που όπως δείξαμε παραπάνω είναι 1-1 και αφού τα σύνολα Φ και Φ' είνα πεπερασμένα, η ϕ είναι αμφιμονοσήμαντη.

□

Με την προηγούμενη πρόταση φαίνεται ότι ένα σύστημα ριζών προσδιορίζεται πλήρως από τον πίνακα Cartan. Παρακάτω βλέπουμε πως από έναν τέτοιο πίνακα μπορούμε να κατασκευάσουμε το αντίστοιχο σύστημα ριζών. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε εάν κατασκευάσουμε όλα τα strings όλων των απλών ριζών. Θα δουλέψουμε μόνο με τα strings ως προς τις θετικές ρίζες.

Ξεκινάμε με τις ρίζες ύψους 1, δηλαδή τις απλές. Δείχνουμε τη διαδικασία για τις απλές ρίζες α_i και α_j. Δηλαδή θα προσδιορίσουμε το α_i-string ως προς α_j. Θεωρούμε τους μέγιστους φυσικούς r, q για τους οποίους έχουμε $\alpha_j - r\alpha_i \in \Phi$ και $\alpha_j + q\alpha_i \in \Phi$. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.4 το διάνυσμα $\alpha_i - \alpha_j$ δεν είναι ρίζα. Επίσης από το Λήμμα 2.5 το string δε διασπάται από κάποιο διάνυσμα που δεν είναι ρίζα, άρα έχουμε $r = 0$. Επομένως, αντικαθιστώντας στον τύπο
$<\alpha_j, \alpha_i>= r - q$ την τιμή του r και την ποσότητα $<\alpha_j, \alpha_i>$ που έχουμε από τον πίνακα Cartan, βρίσκουμε την τιμή του q.

Επίσης, όπως μας πληροφορεί ο Πίνακας ⓟ το μήκος του string δεν υπερβαίνει τις 4 ρίζες. Άρα $q < 4$, και οι ρίζες του είναι της μορφής

$$\begin{array}{ccc} \alpha_j & & \\ \alpha_j & + & \alpha_i \\ \alpha_j & + & 2\alpha_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_j & + & q\alpha_i \end{array}$$

Αυτή τη διαδικασία τη συνεχίζουμε για όλα τα διατεταγμένα ζεύγη απλών ριζών που μπορούμε να σχηματίσουμε. Δηλαδή, αν βρούμε τα strings όλων των απλών ριζών ως προς όλες τις απλές ρίζες σίγουρα θα έχουμε όλες τις απλές ρίζες του συστήματος ριζών.

Τώρα, κατασκευάζουμε το string όλων των απλών ριζών που περνά από ρίζες ύψους 2. Υποθέτουμε ότι η α είναι ύψους 2, τότε αυτή γράφεται στην μορφή $\alpha = \alpha_n + \alpha_m$ για κάποιες απλές ρίζες α_n, α_m. Ψάχνουμε το string της απλής ρίζας α_k που περνά από την α. Διακρίνουμε περιπτώσεις για το δείκτη k :

- εάν $k = n$ ή $k = m$, τότε η διαφορά $\alpha - \alpha_k = \alpha_n$ ή $\alpha - \alpha_k = \alpha_m$ εάν είναι ρίζα θα είναι απλή. Συνεπώς εδώ έχουμε το $r = 1$. Επίσης, λόγω της γραμμικότητας του $<,>$ ως προς την πρώτη μεταβλητή, έχουμε

  $$<\alpha_n, \alpha_k> + <\alpha_m, \alpha_k> = r - q.$$

  Άρα αντικαθιστώντας σε αυτή την ισότητα υπολογίζουμε το q. Δηλαδή οι ρίζες του string για τις οποίες έχουμε τον περιορισμό $q < 4$, είναι της παρακάτω μορφής

  $$\begin{array}{ccc} \alpha & - & \alpha_k \\ \alpha & & \\ \alpha & + & \alpha_k \\ \alpha & + & 2\alpha_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha & + & q\alpha_k \end{array}$$

- εάν $k \neq n$ και $k \neq m$, τότε η διαφορά $\alpha - \alpha_k$ βάσει του ορισμού της βάσης δεν είναι ρίζα και όπως αναφέραμε παραπάνω το string δε διασπάται από κάποιο διάνυσμα. Άρα υποχρεωτικά έχουμε $r = 0$. Επομένως αντικαθιστώντας στον τύπο

  $$<\alpha_n, \alpha_k> + <\alpha_m, \alpha_k> = r - q$$

  τις γνωστές ποσότητες βρίσκουμε το q, το οποίο είναι < 4. Έτσι οι ρίζες σε αυτό το string είναι οι

  $$\begin{array}{ccc} \alpha & & \\ \alpha & + & \alpha_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha & + & q\alpha_k \end{array}$$

Συνεπώς εάν ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία, κατασκευάζοντας τα strings όλων των απλών ριζών, που περνούν από όλες τις ρίζες ύψους 2, θα έχουμε βρει τις ρίζες του συστήματος ύψους 2.

Συνεχίζουμε όμοια και στα υπόλοιπα βήματα. Συνοπτικά έχουμε ότι, εάν η α_p είναι μία απλή ρίζα και η α_t μία ρίζα ύψους ℓ που γράφεται ως

$$\alpha_t = \alpha_{s_1} + \ldots + \alpha_{s_\ell}$$

τότε έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

- Εάν το q είναι κάποιο από τα $s_1, \ldots, s_\ell$ τότε η διαφορά $\alpha_t - \alpha_p$ εάν είναι ρίζα, είναι ύψους $\ell - 1$. Όμως αυτή τη ρίζα την έχουμε βρει στο ακριβώς προηγούμενο βήμα. Έτσι σε αυτή την περίπτωση δεν παίρνουμε κάτι καινούργιο.
- Εάν το q είναι διαφορετικό από τα $s_1, \ldots, s_\ell$ το $\alpha_q - \alpha_p$ δεν είναι ρίζα και έτσι κάνουμε ένα βήμα παραπάνω βρίσκοντας ρίζες ύψους $\ell + 1$.

Η κατασκευή τελειώνει όταν συναντήσουμε εκείνη τη ρίζα που έχει την ιδιότητα να δίδει $q = 0$, σε όποιο string κι αν ανήκει. Η μοναδικότητα της μέγιστης ρίζας οφείλεται στο Λήμμα 4.4.

Συμπερασματικά, εάν κατασκευάσουμε τα strings όλων των απλών ριζών ως προς όλες τις θετικές ρίζες θα πάρουμε το Φ^+. Προφανώς μετά μπορούμε να πάρουμε όλο το σύστημα ριζών.

5.2 Το γράφημα Coxeter και το διάγραμμα Dynkin

Ορισμός. Έστω Φ ένα σύστημα ριζών τάξης ℓ και α, β δύο διαφορετικές θετικές ρίζες του. Από την Παρατήρηση 2.2 έχουμε ότι $<\alpha, \beta><\beta, \alpha> = 0, 1, 2, 3$. Ορίζουμε το **γράφημα Coxeter** του Φ να είναι ένα γράφημα που αποτελείται από ℓ κορυφές, ενώ η i-οστή κορυφή συνδέεται με την j-οστή με $<\alpha_i, \alpha_j><\alpha_j, \alpha_i>$ ακμές.

Παρακάτω βλέπουμε τα γραφήματα των συστημάτων που έχουμε δει έως τώρα:

Σχήμα 5.1: $A_1 \times A_1$

Σχήμα 5.2: A_2

Σχήμα 5.3: B_2

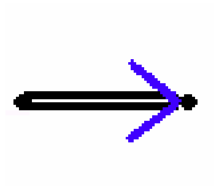
Σχήμα 5.4: G_2

Συγκεκριμένα, για το B_2 έχουμε ότι είναι τάξης 2, έτσι συμπεραίνουμε ότι το γράφημα αποτελείται από δύο κορυφές. Επίσης, από τον Πίνακα ⓟ το γινόμενο των δύο διαφορετικών $<\, ,\, >$ που ορίζονται είναι ίσο με 2, άρα οι δύο κορυφές συνδέονται με διπλή ακμή.

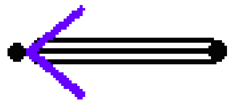
Αυτά τα γραφήματα είναι πολύ γενικά. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα συστήματα ριζών που περιέχουν ρίζες διαφορετικού μήκους. Για αυτές τις περιπτώσεις ορίζουμε τα διαγράμματα Dynkin.

Ορισμός. Το διάγραμμα Dynkin ενός συστήματος ριζών είναι ένα γράφημα που διαφοροποιείται από το Coxeter μόνον όταν τα μήκη των απλών ριζών δεν είναι όλα ίσα. Όταν λοιπόν παρουσιάζεται αυτή η διαφορά προσθέτουμε στο γράφημα ένα βέλος που κατευθύνεται από την μακριά στην κοντή ρίζα.

Για παράδειγμα, τα διαγράμματα Dynkin των B_2 και G_2 είναι τα ακόλουθα:



Σχήμα 5.5: B_2



Σχήμα 5.6: G_2

Παρατήρηση 5.3 *Βλέπουμε ότι από τα παραπάνω γραφήματα μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για το ίδιο το σύστημα ριζών, άρα και για τον πίνακα Cartan του. Δηλαδή από το πλήθος των κορυφών βρίσκουμε τη διάσταση του* Φ, *συνεπώς και τη διάσταση του πίνακα, από το πλήθος των ακμών και τη σχέση των μηκών τους έχουμε την ποσότητα* $<\alpha_i, \alpha_j>$ *για* $i \neq j$.

Για να προσδιορίσουμε πλήρως τον πίνακα μένει να υπολογίσουμε τα διαγώνια στοιχεία, δηλαδή τους αριθμούς $<\alpha_i, \alpha_i>$ *για κάθε* $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. *Όλη η διαγώνιος είναι πάντα ίση με* 2, *αφού* $<\alpha_i, \alpha_i> = 2(\alpha_i, \alpha_i)/(\alpha_i, \alpha_i) = 2$.

Δείχνουμε αναλυτικά πως προκύπτει ο πίνακας Cartan του B_2 με δεδομένο το διάγραμμα Dynkin. Το διάγραμμα αποτελείται από 2 κορυφές, τις ονομάζουμε α_1 και α_2 ενώ υποθέτουμε ότι το βέλος κατευθύνεται από την α_1 στην α_2. Συνεπώς η τάξη του Φ είναι 2.

Επίσης οι α_1, α_2 συνδέονται με διπλή ακμή, άρα $<\alpha_1, \alpha_2> = 2$. Όμως οι α_1 και α_2 είναι απλές ρίζες, άρα σύμφωνα με την Πρατήρηση 3.2 και τον πίνακα π έχουμε είτε $<\alpha_1, \alpha_2> = -1$ και $<\alpha_2, \alpha_1> = -2$, είτε $<\alpha_1, \alpha_2> = -2$ και $<\alpha_2, \alpha_1> = -1$.

Εάν ισχύει η πρώτη περίπτωση συνδυάζοντας τις δύο ισότητες καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το μήκος της ρίζας α_2 είναι μικρότερο από αυτό της α_1, κάτι που δεν ισχύει. Επομένως, ισχύει η δεύτερη περίπτωση και σύμφωνα με την Παρατήρηση 5.3 η διαγώνιος είναι ίση με 2, οπότε ο πίνακας Cartan του B_2 είναι ο:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5.3 Irreducible συνιστώσες

Σύμφωνα με τον ορισμό του irreducible συστήματος ριζών, εάν το Φ έχει αυτό το χαρακτηρισμό τότε δεν μπορεί να διαμεριστεί σε δύο γνήσια υποσύνολα, ορθογώνια μεταξύ τους. Αλλά, όπως είδαμε προηγουμένως, σε κάθε σύστημα ριζών αντιστοιχίζεται ακριβώς ένα γράφημα Coxeter, οπότε όταν το Φ δε διαμερίζεται το αντίστοιχο διάγραμμα είναι συνεκτικό και αντιστρόφως.

Αν γενικεύσουμε την παραπάνω κατάσταση συμπεραίνουμε ότι εάν ένα σύστημα αποτελείται από συνεκτικές συνιστώσες τότε και το γράφημα Coxeter έχει τον ίδιο αριθμό συνεκτικών υπογραφημάτων.

Έστω Δ μία βάση του Φ που διαμερίζεται σε υποσύνολα, ορθογώνια μεταξύ τους, δηλαδή $\Delta = \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_t$. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.2 το Φ διαμερίζεται σε ορθογώνια υποσύνολα και μάλιστα οι υπόχωροι του E που παράγονται από τα υποσύνολα του Δ είναι ορθογώνιοι. Επίσης, ανά δύο η τομή τους είναι το μηδενικό διάνυσμα, οπότε το E γράφεται ως $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_t$.

Επομένως το σύστημα ριζών αναλύεται μοναδικά ως ένωση irreducible υποσυστημάτων Φ_i τέτοια ώστε το E να εκφράζεται ως το ορθογώνιο ευθύ άθροισμα $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_t$.

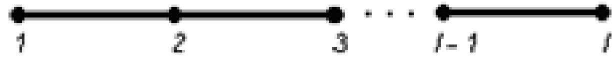
5.4 Ταξινόμηση

Προηγουμένως είδαμε ότι ένα irreducible σύστημα ριζών μπορεί να περιγραφεί και μέσω του αντίστοιχου συνεκτικού γραφήματος Coxeter. Οπότε για την ταξινόμηση των συστημάτων αρκεί να εργαστούμε με αυτά τα γραφήματα. Βοηθητικά ορίζουμε το ακόλουθο σύνολο.

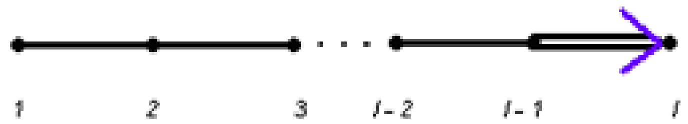
Ορισμός. Θεωρούμε έναν ευκλείδειο χώρο E και $\mathcal{U} = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ ένα σύνολο n γραμμικά ανεξάρτητων μοναδιαίων διανυσμάτων τα οποία ικανοποιούν τα ακόλουθα:
(A1) $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq 0$ για κάθε $i \neq j$
(A2) $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2 = 0, 1, 2,$ ή 3 για κάθε $i \neq j$.
Ένα τέτοιο σύνολο το ονομάζουμε **admissible**.

Το $\mathcal{U}$ αποτελεί βάση ενός συστήματος ριζών με διαιρεμένα τα στοιχεία του με το μήκος τους.

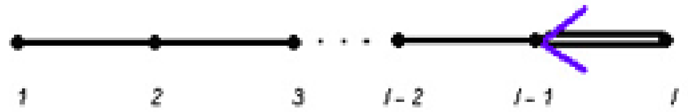
Θεώρημα 5.4 *Εάν το Φ είναι ένα irreducible σύστημα ριζών τάξεως ℓ, τότε το διάγραμμα Dynkin που αντιστοιχεί σε αυτό είναι ένα από τα παρακάτω:*



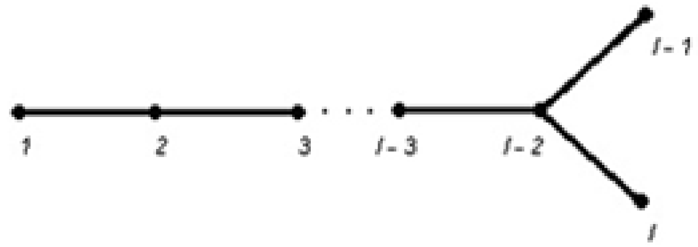
Σχήμα 5.7: $\mathrm{A}_\ell (\ell \geq 1)$



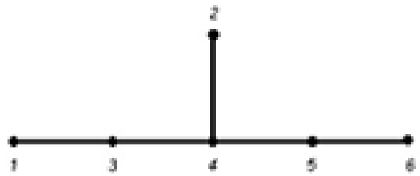
Σχήμα 5.8: $B_\ell (\ell \geq 2)$



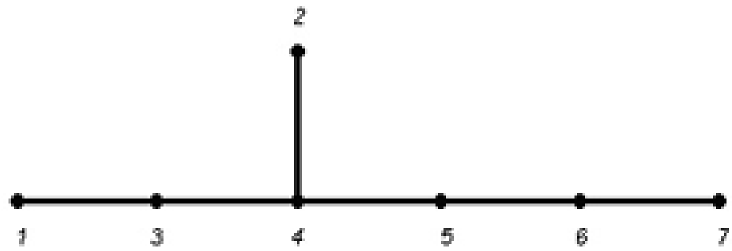
Σχήμα 5.9: $C_\ell (\ell \geq 3)$



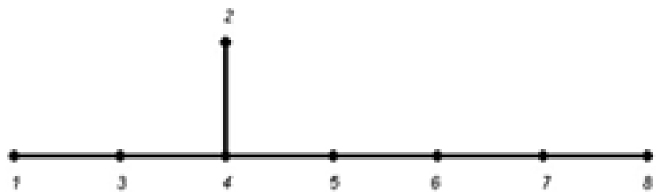
Σχήμα 5.10: $D_\ell (\ell \geq 4)$



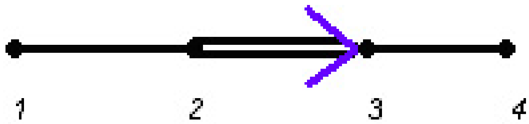
Σχήμα 5.11: E_6



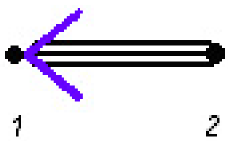
Σχήμα 5.12: E_7



Σχήμα 5.13: E_8



Σχήμα 5.14: F_4



Σχήμα 5.15: G_2

Ισοδύναμα καθένα από αυτά μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε σε έναν από τους ακόλουθους πίνακες Cartan. Αφού, από τον ορισμό των πινάκων και των διαγραμμάτων αυτών προκύπτει το ένα από το άλλο.

$$\mathrm{A}_\ell : \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B}_\ell : \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -2 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{C}_\ell : \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{D}_\ell : \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & & -1 & 2 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{E}_6 : \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{E}_7 : \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{E}_8 : \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{F}_4 : \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{G}_2 : \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Σημείωση 5.5 *(1). Τα προηγούμενα είναι γραφήματα Coxeter, αλλά για εκείνα τα συστήματα ριζών με διαφορετικά μήκη, μπορούμε εύκολα με τη βοήθεια του πίνακα (π) να καταλήξουμε στα διαγράμματα Dynkin.*
(2). Οι συμβολισμοί $\mathrm{A}_\ell, \mathrm{B}_\ell, \mathrm{C}_\ell, \mathrm{D}_\ell, \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8, \mathrm{F}_4$ *και* G_2 *σε αυτό το σημείο δηλώνουν απλά τις οικογένειες των γραφημάτων. Αργότερα θα δούμε ότι αντιστοιχούν στα ήδη γνωστά συστήματα ριζών που μελετήσαμε σε προηγούμενα κεφάλαια.*

Απόδειξη. Σκοπός μας είναι να ταξινομήσουμε τα συστήματα ριζών. Ισοδύναμα, να ταξινομήσουμε τα γραφήματα Coxeter. Για αυτό το λόγο αγνοούμε τα μήκη των απλών ριζών, θεωρούμε ότι όλες είναι ίσες και υποθέτουμε ότι το μήκος είναι 1.

Παρατηρώντας τα γραφήματα, βλέπουμε ότι, από ένα σύστημα ριζών μπορούμε να ορίσουμε ένα admissible σύνολο $\mathcal{U}$, θέτοντας $\varepsilon_i = \alpha_i / \parallel \alpha_i \parallel$, εφόσον γεωμετρικά τα (A1) και (A2) του ορισμού εμφανίζονται. Στο σύνολο $\mathcal{U}$ αντιστοιχίζουμε ένα γράφημα Γ.

Το Γ περιέχει τόσες κορυφές όσες είναι οι απλές ρίζες, ενώ το πλήθος των ακμών μεταξύ δύο τυχαίων κορυφών του, δίδεται από τον αριθμό $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2$, για

$i \neq j$. Έτσι, συνδέουμε κάθε συνεκτικό γράφημα με ένα admissible σύνολο διανυσμάτων. Η απόδειξη θα γίνει σταδιακά.

Βήμα (1): *Εάν εξαιρέσουμε κάποια από τα διανύσματα ε_i του συνόλου $\mathcal{U}$, το σύνολο που απομένει είναι και αυτό admissible, του οποίου το γράφημα προκύπτει από το αρχικό απαλείφοντας τις αντίστοιχες κορυφές ε_i και όλες τις συνυπάρχουσες ακμές.*

Ονομάζουμε $\mathcal{U}'$ το σύνολο που προέκυψε μετά την εξαίρεση κάποιων διανυσμάτων. Δηλαδή $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \setminus \{\varepsilon_k, k = 1, \ldots, n\}$. Πρέπει να δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες (A1) και (A2) και επιπλέον ότι τα διανύσματα του νέου συνόλου είναι μοναδιαία και γραμμικά ανεξάρτητα. Το $\mathcal{U}$ είναι admissible, άρα εξ' ορισμού είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Όμως αν εξαιρέσουμε κάποιο πλήθος διανυσμάτων παραμένει γραμμικά ανεξάρτητο. Επίσης, τα μήκη των διανυσμάτων που απέμειναν δεν μεταβάλλονται άρα παραμένουν μοναδιαία.

Τέλος, από τον ορισμό του admissible συνόλου $\mathcal{U}$, ικανοποιούνται τα (A1) και (A2) και αφού αυτές οι ιδιότητες ισχύουν για κάθε ζευγάρι διαφορετικών διανυσμάτων θα ισχύουν και για όλα τα ζευγάρια του $\mathcal{U}'$. Μετά από όλα αυτά το $\mathcal{U}'$ είναι ένα admissible σύνολο διανυσμάτων.

Βήμα (2): *Το πλήθος των ζευγών των κορυφών που συνδέονται με ακμή στο Γ είναι γνήσια μικρότερο του n.*

Θέτουμε

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$$

Προφανώς $\varepsilon \neq 0$, αφού τα ε_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως έχουμε $(\varepsilon, \varepsilon) > 0$. Επιπλέον,

$$(\varepsilon, \varepsilon) = (\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i, \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n} \parallel \varepsilon_i \parallel^2 + 2 \sum_{i<j} (\varepsilon_i, \varepsilon_j)$$

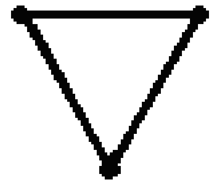
αλλά επειδή τα ε_i είναι μοναδιαία διανύσματα τελικά για το εσωτερικό γινόμενο παίρνουμε

$$(\varepsilon, \varepsilon) = n + 2 \sum_{i<j} (\varepsilon_i, \varepsilon_j).$$

Αναζητάμε τον πλήθος των ζευγών (i, j), για τα οποία $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0$. Από το (A1) και τον ακριβώς προηγούμενο περιορισμό για το εσωτερικό γινόμενο, έχουμε $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) < 0$. Επίσης από το (A2) το πλήθος των ακμών μεταξύ δύο κορυφών δίδεται από τον τύπο $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2 = 0, 1, 2, 3$. Άρα $2(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = -1, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}$, οπότε $2(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq -1$.

Υποθέτουμε ότι ο αριθμός που ψάχνουμε είναι ο k. Για αυτά τα ζεύγη κορυφών ικανοποιείται η ανισότητα $2(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq -1$. Επομένως $\sum_{i<j} 2(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq k$, συνεπώς $0 < (\varepsilon, \varepsilon) \leq n - k$ άρα $k \leq n - 1$.

Βήμα (3): *Το γράφημα* Γ *που αντιστοιχεί στο admissible σύνολο* $\mathcal{U}$ *δεν περιέχει κύκλους.*



Σχήμα 5.16: κύκλος

Θα το δείξουμε με άτοπο. Υποθέτουμε ότι το Γ περιέχει κάποιον κύκλο, έστω Γ'. Σύμφωνα με το βήμα (1) υπάρχει admissible υποσύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{U}$ στο οποίο αντιστοιχεί. Έστω ότι αυτό είναι το $\mathcal{U}'$. Όμως το γράφημα Γ' αποτελείται από ακμές ίσες σε πλήθος με τον αριθμό των κορυφών, κάτι που έρχεται σε αντίφαση με το βήμα (2).

Βήμα (4): *Από οποιαδήποτε κορυφή του* Γ *δεν είναι δυνατό να ξεκινούν περισσότερες από τρείς ακμές.*

Έστω ε ένα στοιχείο του $\mathcal{U}$ και $\eta_1, \ldots, \eta_k$ οι κορυφές που συνδέονται με αυτό. Προφανώς αφού τα η_i, για $i = 1, \ldots, k$, είναι διαφορετικά του ε έχουμε $(\varepsilon, \eta_i) < 0, \forall i = 1, \ldots, k$. Επίσης, σύμφωνα με το βήμα (3) δύο η δεν είναι δυνατό να ενώνονται διότι τότε δημιουργείται κύκλος στο Γ, επομένως $(\eta_i, \eta_j) = 0$ για $i \neq j$. Δηλαδή το σύνολο $\{\eta_1, \ldots, \eta_k\}$ παράγει έναν υπόχωρο του E και είναι μία ορθοκανονική βάση του.

Αλλά, εφόσον το ε δεν ανήκει στον υπόχωρο αυτό, υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα η_0, ορθογώνιο προς τα $\eta_1, \ldots, \eta_k$, και τέτοιο ώστε $\varepsilon = \sum_{i=0}^{k} (\varepsilon, \eta_i)\eta_i$, με $(\varepsilon, \eta_0) \neq 0$. Άρα,

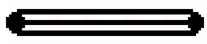
$$
\begin{aligned}
1 = (\varepsilon, \varepsilon) &= \Big(\sum_{i=0}^{k} (\varepsilon, \eta_i)\eta_i, \sum_{i=0}^{k} (\varepsilon, \eta_i)\eta_i\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{k} (\varepsilon, \eta_i)^2
\end{aligned}
$$

δηλαδή $\sum_{i=0}^{k} (\varepsilon, \eta_i)^2 = 1$ οπότε $\sum_{i=1}^{k} (\varepsilon, \eta_i)^2 + (\varepsilon, \eta_0)^2 = 1$. Όμως $(\varepsilon, \eta_0) \neq 0$, άρα $\sum_{i=1}^{k}(\varepsilon,\eta_i)^2 < 1$. Επομένως

$$\sum_{i=1}^{k} 4(\varepsilon,\eta_i)^2 < 4,$$

αλλά η ποσότητα $4(\varepsilon,\eta_i)^2$ δηλώνει το πλήθος των ακμών μεταξύ του ε και του η_i, για όλα τα i.

Βήμα (5): *Το μοναδικό συνεκτικό γράφημα* Γ *του admissible* $\mathcal{U}$ *που περιέχει τριπλή ακμή είναι αυτό του* G_2.



Σχήμα 5.17: G_2

Στην περίπτωση όπου το γράφημα περιέχει τριπλή ακμή μεταξύ δύο κορυφών και χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς του βήματος (4), έχουμε $4(\varepsilon,\eta_j)^2 = 3$ για κάποιο $j = 1,\ldots,k$. Όμως, από το βήμα (4), η ανισότητα $\sum_{i=1}^{k} 4(\varepsilon,\eta_i)^2 < 4$ απαιτεί η κορυφή ε να μη συνδέεται με καμία άλλη κορυφή. Επομένως το μοναδικό γράφημα με αυτή την ιδιότητα είναι το G_2.

Βήμα (6): *Έστω* $\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k\} \subseteq \mathcal{U}$ *με υπογράφημα:*

Σχήμα 5.18: απλό γράφημα

Εάν $\mathcal{U}' = (\mathcal{U} - \{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k\}) \cup \{\varepsilon\}$, *όπου* $\varepsilon = \sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i$, *τότε το* $\mathcal{U}'$ *είναι admissible σύνολο.*

Δείχνουμε ότι τα διανύσματα του $\mathcal{U}'$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, μοναδιαία και ότι ικανοποιούν τα (A1) και (A2) του ορισμού. Αρχικά δείχνουμε ότι το $\mathcal{U}'$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{U} = \{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$, τότε αν θέσουμε $e_i = \varepsilon_{k+i}$, το $\mathcal{U}'$ γράφεται στην μορφή $\mathcal{U}' = \{e_1,\ldots,e_{n-k}\} \cup \{\varepsilon\}$.

Επομένως, εάν υπάρχουν συντελεστές c_i στο $\mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε

$$c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_{n-k}e_{n-k} + c_0\varepsilon = 0$$

για να πάρουμε το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι όλοι είναι μηδενικοί. Αντικαθιστώντας με την τιμή ε έχουμε,

$$c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_{n-k}e_{n-k} + c_0\varepsilon_1 + c_0\varepsilon_2 + \ldots + c_0\varepsilon_k = 0.$$

Όμως τα e_i, για $i = 1, \ldots, n-k$ και τα ε_j, για $j = 1, \ldots, k$ είναι τα στοιχεία του $\mathcal{U}$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αφού είναι admissible σύνολο. Άρα τα $c_i = 0$, για όλα τα $i = 1, \ldots, n-k$ και $c_0 = 0$. Συνεπώς το $\mathcal{U}'$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

Τώρα, θα δείξουμε ότι το $\mathcal{U}'$ αποτελείται από μοναδιαία διανύσματα. Επειδή το γράφημα των ε_i για όλα τα $i = 1, \ldots, k$ είναι απλό, κάθε κορυφή συνδέεται μέσω απλής ακμής μόνο με την επόμενη κορυφή, άρα $2(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) = -1$ για κάθε $i = 1, \ldots, k-1$ και $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ εάν $j > i+1$. Οπότε $(\varepsilon, \varepsilon) = k + 2\sum_{i<j}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$, όπως προκύπτει από το βήμα (2), μόνο που αντί για n διανύσματα τώρα έχουμε k. Άρα

$$(\varepsilon, \varepsilon) = k + \sum_{i<j} 2(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = k + (k-1)(-1) = 1.$$

Επομένως το ε είναι μοναδιαίο διάνυσμα και αφού και τα ε_i για όλα τα $i = 1, \ldots, k$ είναι μοναδιαία, ως στοιχεία του $\mathcal{U}$, τότε το $\mathcal{U}'$ αποτελείται από μοναδιαία διανύσματα.

Συνεχίζουμε επαληθεύοντας το (A1). Έστω η μία τυχαία κορυφή στο σύνολο $\mathcal{U} - \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$. Τότε είτε θα έχει μηδενικό εσωτερικό γινόμενο με την ε, δηλαδή η η δε συνδέεται με καμία από τις κορυφές ε_i, για $i = 1, \ldots, k$ είτε συνδέεται με κάποιες από αυτές.

Το τελευταίο προκύπτει από τη γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου, και μάλιστα η η δεν ενώνεται με περισσότερες από μία κορυφή, διότι διαφορετικά θα σχηματιζόταν κύκλος, αδύνατο λόγω του βήματος (3).

Οπότε $(\eta, \varepsilon) = 0$ ή $(\eta, \varepsilon) = (\eta, \varepsilon_\ell)$ για κάποιο $\ell = 1, \ldots, k$. Αλλά τα η, ε_ℓ, είναι στοιχεία του admissible $\mathcal{U}$, άρα $(\eta, \varepsilon) \leq 0$. Μένει να δούμε εάν ισχύει το (A1) για τα στοιχεία του $\mathcal{U} - \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$. Έχουμε $\mathcal{U} - \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\} \subseteq \mathcal{U}$ και το $\mathcal{U}$ όπως έχουμε ήδη αναφέρει είναι admissible, άρα ικανοποιείται το (A1) στο $\mathcal{U} - \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$.

Τέλος, θα δείξουμε το (A2). Για το τυχαίο η της προηγούμενης παραγράφου έχουμε $(\eta, \varepsilon) = 0$ ή $(\eta, \varepsilon) = (\eta, \varepsilon_\ell)$ για κάποιο $\ell = 1, \ldots, k$, αλλά για τα η, ε_i στο $\mathcal{U}$ ισχύει ότι $4(\eta, \varepsilon_\ell)^2 = 0, 1, 2, 3$, άρα $4(\eta, \varepsilon)^2 = 0, 1, 2, 3$.

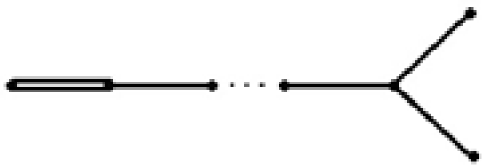
Επίσης, αν θεωρήσουμε δύο διαφορετικά στοιχεία του $\mathcal{U} - \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$, έστω ε_i και ε_j με $i, j \neq 1, \ldots, k$, ανήκουν και στο $\mathcal{U}$, του οποίου τα στοιχεία ικανοποιούν τη

$$4(\varepsilon_p, \varepsilon_q)^2 = 0, 1, 2, 3$$

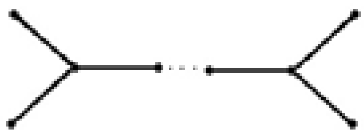
για όλα τα p, q, άρα και για τα i, j. Οπότε όλα τα στοιχεία του $\mathcal{U}'$ επαληθεύουν την ιδιότητα (A2).

Βήμα (7): *Το γράφημα που αντιστοιχεί σε ένα σύνολο $\mathcal{U}$, έστω Γ, δεν περιέχει κανένα υπογράφημα της μορφής:*

Σχήμα 5.19: (α')



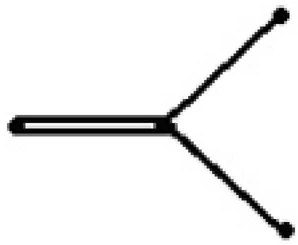
Σχήμα 5.20: (β')



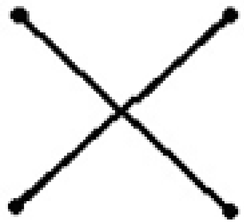
Σχήμα 5.21: (γ')

Υποθέτουμε ότι κάποιο από τα παραπάνω περιέχεται στο Γ. Τότε από το βήμα (1) το γράφημα θα αντιστοιχεί σε κάποιο admissible σύνολο. Όμως σύμφωνα με το έκτο βήμα, αφού και τα τρία γραφήματα περιέχουν απλό υπογράφημα εάν θεωρήσουμε το σύνολο χωρίς τις κορυφές που συμμετέχουν στο υπογράφημα, και συμπεριλάβουμε ακόμη την κορυφή που γράφεται ως άθροισμα των κορυφών του απλού τότε αυτό είναι admissible. Δηλαδή βάσει του βήματος (6) τα γραφήματα των παρακάτω τύπων είναι admissible.

Σχήμα 5.22: τύπου (1)



Σχήμα 5.23: τύπου (2)

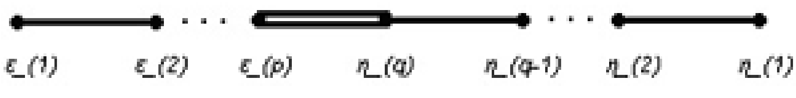


Σχήμα 5.24: τύπου (3)

Όμως σε κάθε περίπτωση υπάρχει κορυφή από την οποία ξεκινούν τέσσερις ακμές, αντίφαση λόγω του βήματος (4). Άρα δεν υπάρχει γράφημα Γ που να έχει ως υπογράφημα κάποιο από τα παραπάνω γραφήματα.

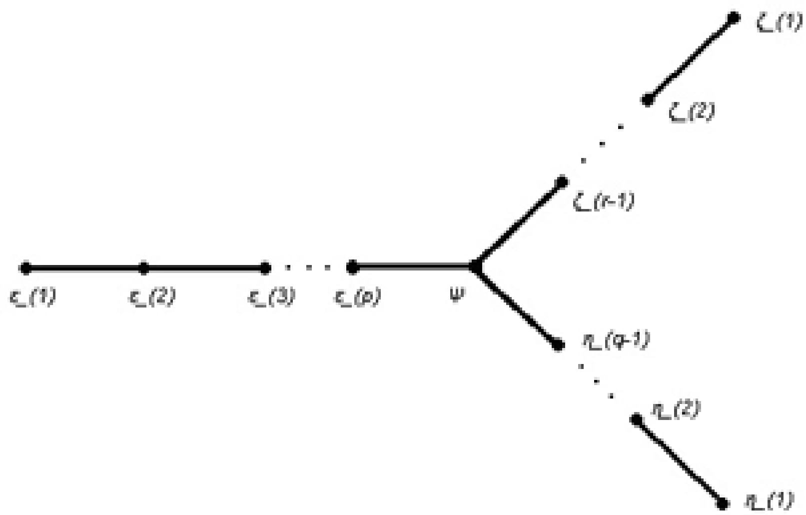
Βήμα (8): *Μία από τις παρακάτω μορφές είναι το συνεκτικό γράφημα* Γ, *ενός admissible συνόλου* $\mathcal{U}$.

Σχήμα 5.25: (α)



Σχήμα 5.26: (β)

Σχήμα 5.27: (γ)

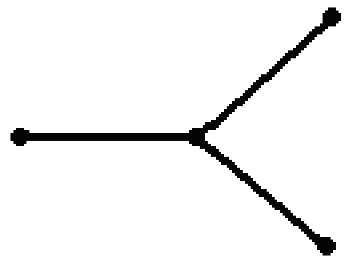


Σχήμα 5.28: (δ)

Πρώτα από όλα εάν το γράφημα περιέχει τριπλή ακμή και είναι συνεκτικό τότε από το βήμα (5) είναι αναγκαστικά το γράφημα (γ). Τώρα θα δείξουμε ότι ένα γράφημα δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μία διπλή ακμή.

Έστω ένα συνεκτικό γράφημα που περιέχει δύο διπλές ακμές. Τότε περιέχει υπογράφημα της μορφής (α'). Όμως αυτό είναι αδύνατο λόγω του βήματος (7). Άρα σε συνεκτικό γράφημα το πλήθος των διπλών ακμών, εφόσον υπάρχουν, είναι ένα.

Επιπλέον, εάν το Γ έχει διπλή ακμή δεν μπορεί να περιέχει κόμβο,αφού πάλι θα περιέχει υπογράφημα της μορφής (β'). Άρα όταν ένα γράφημα έχει διπλή ακμή, τότε έχει την μορφή του (β), διότι από το βήμα (3) δε σχηματίζονται κύκλοι.



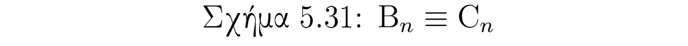
Σχήμα 5.29: Κόμβος

Τέλος, αν ένα γράφημα έχει μόνο απλές ακμές, δε γίνεται να περιέχει δύο κόμβους, λόγω του βήματος (7). Επίσης δε θα αποτελείται από κύκλους και αυτό οφείλεται στο βήμα (3). Συνεπώς, το μόνο πιθανό γράφημα που ικανοποιεί τους περιορισμούς μας είναι το (δ).

Βήμα (9): *Το μοναδικό συνεκτικό γράφημα* Γ, *της δεύτερης οικογένειας του βήματος (8), είναι το* F_4

Σχήμα 5.30: F_4

ή το $\mathrm{B_n}$ *που ταυτίζεται με το* $\mathrm{C_n}$ *εφόσον αγνοούμε τον προσανατολισμό*



Σχήμα 5.31: $\mathrm{B}_n \equiv \mathrm{C}_n$

Με τους ίδιους συμβολισμούς όπως στα προηγούμενα βήματα, θέτουμε

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{p} i\varepsilon_i \quad \text{και} \quad \eta = \sum_{i=1}^{q} i\eta_i.$$

Από την μορφή του γραφήματος (β) κάθε κορυφή ενώνεται μόνο με την επόμενή της, άρα
$$2(\varepsilon_i,\varepsilon_{i+1})=2(\eta_j,\eta_{j+1})=-1,$$
για κάθε $i\in\{1,\ldots,p\}$ και για κάθε $j\in\{1,\ldots,q\}$ επίσης,
$$(\varepsilon_j,\varepsilon_k)=0$$
για όλα τα $j,k\in\{1,\ldots,p\}$ με $k\neq j+1$ και
$$(\eta_j,\eta_k)=0$$
για όλα τα $j,k\in\{1,\ldots,q\}$ με $k\neq j+1$.

Οπότε $(\varepsilon,\varepsilon)=(\sum_{i=1}^{p}i\varepsilon_i,\sum_{i=1}^{p}i\varepsilon_i)$. Αλλά όλα τα εσωτερικά γινόμενα που περιέχουν μη διαδοχικά ε είναι μηδενικά, γιατί οι αντίστοιχες κορυφές του γραφήματος δεν ενώνονται. Επίσης, επειδή το εσωτερικό γινόμενο είναι αντιμεταθετικό, εφόσον βρισκόμαστε πάνω από το $\mathbb{R}$, όλα τα εσωτερικά γινόμενα εκτός από τα p της μορφής $(i\varepsilon_i,i\varepsilon_i)$ εμφανίζονται δύο φορές. Άρα, αφού αυτά τα γινόμενα αποτελούνται από όρους με διαδοχικούς δείκτες, αναγκαστικά το ένα ε θα έχει άρτιο δείκτη ενώ το άλλο περιττό.

Εάν $i+1=2m$ με $m\in\mathbb{Z}^*$, τότε
$$\begin{aligned}(i\varepsilon_i,(i+1)\varepsilon_{i+1}) &= 2m(i\varepsilon_i,\varepsilon_{2m})\\ &= m(2(\varepsilon_i,\varepsilon_{2m})+\ldots+2(\varepsilon_i,\varepsilon_{2m}))\end{aligned}$$
με i προσθεταίους. Αντικαθιστώντας το $2m$ με $i+1$ και έπειτα την ποσότητα $2(\varepsilon_i,\varepsilon_{i+1})$ με -1, παίρνουμε $(i\varepsilon_i,(i+1)\varepsilon_{i+1})=-mi=-i(i+1)/2$.

Άρα
$$\begin{aligned}(\varepsilon,\varepsilon) &= \sum_{i=1}^{p}(i\varepsilon_i,i\varepsilon_i)+2\sum_{i=1}^{p-1}(i\varepsilon_i,(i+1)\varepsilon_{i+1})\\ &= \sum_{i=1}^{p}i^2-(\sum_{i=1}^{p}i^2+i)+p^2+p\\ &= p^2+p-\sum_{i=1}^{p}i\\ &= p(p+1)/2.\end{aligned}$$

Ανάλογη διαδικασία ακολουθούμε για τον υπολογισμό του (η,η), οπότε
$$(\eta,\eta)=q(q+1)/2.$$

Επιπλέον $(\varepsilon,\eta)=(\sum_{i=1}^{p}i\varepsilon_i,\sum_{i=1}^{q}i\eta_i)$. Επειδή όμως οι κορυφές ε συνδέονται μόνο με τις ε και οι η με τις η, εκτός από την περίπτωση της ε_p με την η_q που ενώνονται με διπλή ακμή, όλα τα εσωτερικά γινόμενα είναι 0. Οπότε $(\varepsilon, \eta) = p\,q(\varepsilon_p, \eta_q)$, άρα

$$(\varepsilon, \eta)^2 = p^2 q^2 (\varepsilon_p, \eta_q)^2 = p^2 q^2/2.$$

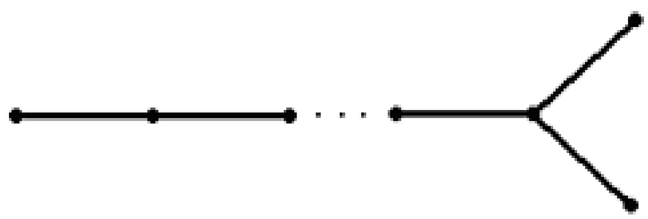
Παρακάτω δείχνουμε ότι τα διανύσματα ε και η είναι γραμμικά ανεξάρτητα ώστε να πάρουμε κάποια πληροφορία εάν χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Schwartz, [2] (§3.2 σελ.171).

Έστω ότι υπάρχουν πραγματικοί συντελεστές τέτοιοι ώστε, $c_1\varepsilon + c_2\eta = 0$ αντικαθιστούμε τα διανύσματα με το άθροισμα που ισούται το καθένα και τελικά προκύπτει ένας μηδενικός γραμμικός συνδυασμός των ε_i και των η_i.

Όμως αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα όλοι οι συντελεστές είναι μηδενικοί. Έτσι μηδενίζονται και τα c_1, c_2. Συνεπώς η ανισότητα Schwartz δίδει, $(\varepsilon, \eta)^2 < (\varepsilon, \varepsilon)(\eta, \eta)$ και αντικαθιστώντας έχουμε $(p-1)(q-1) < 2$. Με αυτόν τον περιορισμό και το γεγονός ότι το γινόμενο $(p-1)(q-1)$ είναι φυσικός, ως γινόμενο φυσικών, καταλήγουμε στις εξής δύο περιπτώσεις:

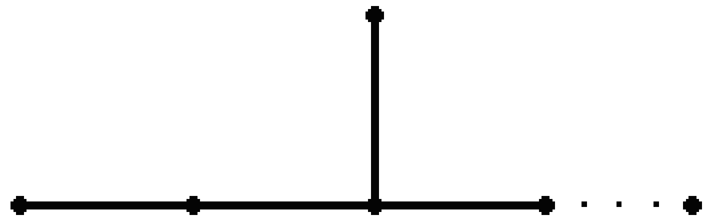
- $(p-1)(q-1) = 1$ άρα $p = q = 2$ και παίρνουμε το F_4,
- $(p-1)(q-1) = 0$, τότε είτε $p = 1$ και q οτιδήποτε, είτε $q = 1$ και p οτιδήποτε, οπότε παίρνουμε το $\mathrm{B_n}$ για $n \geq 2$.

Βήμα (10): *Το μοναδικό συνεκτικό γράφημα της τέταρτης οικογένειας, στο βήμα (8), είναι το γράφημα* $\mathrm{D_n}$



Σχήμα 5.32: D_n

ή το $\mathrm{E_n}$ $(n = 6, 7, 8)$.



Σχήμα 5.33: $\mathrm{E}_n (n = 6, 7, 8)$

Και σε αυτό το βήμα χρησιμοποιούμε τους ίδιους συμβολισμούς με παραπάνω. Θέτουμε

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{p-1} i\varepsilon_i, \quad \eta = \sum_{i=1}^{q-1} i\eta_i, \quad \zeta = \sum_{i=1}^{r-1} i\zeta_i$$

Προφανώς τα ε, η, ζ είναι ανά δύο ορθογώνια, αφού οι κορυφές $\varepsilon_i, \eta_i, \zeta_i$, για όλα τα i σε κάθε περίπτωση, δε συνδέονται μέσω ακμής. Άρα $(\varepsilon_i, \eta_j) = (\varepsilon_i, \zeta_k) = (\eta_j, \zeta_k) = 0$ για όλους τους συνδυασμούς των δεικτών.

Επίσης, τα τρία αυτά διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, λόγω της ορθογωνιότητας. Επομένως, αν ονομάσουμε V το χώρο που παράγει η ορθογώνια βάση $\{\varepsilon, \eta, \zeta\}$, τότε το ψ του γραφήματος δεν ανήκει σε αυτόν. Έτσι αναλύεται σε δύο ορθογώνια μέρη. Στο ψ_1 που είναι η ορθογώνια προβολή του ψ στο ορθογώνιο συμπλήρωμα του V, και στο ψ_2 που είναι η ορθογώνια προβολή στο V. Άρα γράφεται ως

$$\psi = \psi_1 + \psi_2.$$

Αλλά το ψ_2 εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης, οπότε

$$\psi = \psi_1 + x_1\varepsilon + x_2\eta + x_3\zeta$$

και αν $\psi_0, \varepsilon', \eta', \zeta'$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα που αντιστοιχούν στα $\psi_1, \varepsilon, \eta, \zeta$, τότε το ψ γράφεται ως

$$\psi = y_0\psi_0 + y_1\varepsilon' + y_2\eta' + y_3\zeta',$$

για κάποιους πραγματικούς y_0, y_1, y_2, y_3. Συνεπώς τα $\psi_0, \varepsilon', \eta', \zeta'$ αποτελούν διανύσματα μίας ορθοκανονικής βάσης, άρα οι συντελεστές είναι οι

$$y_0 = (\psi, \psi_0), \quad y_1 = (\psi, \varepsilon'), \quad y_2 = (\psi, \eta'), \quad y_3 = (\psi, \zeta').$$

Υπολογίζουμε το τετράγωνο του μέτρου του ψ,

$$(\psi, \psi) = y_0(\psi, \psi_0) + y_1(\psi, \varepsilon') + y_2(\psi, \eta') + y_3(\psi, \zeta'),$$

όμως από τον ορισμό του admissible $(\psi, \psi) = 1$. Άρα σύμφωνα με όσα αναφέραμε παραπάνω έχουμε $(\psi, \psi_0)^2 + (\psi, \varepsilon')^2 + (\psi, \eta')^2 + (\psi, \zeta')^2 = 1$, δηλαδή $(\psi, \psi_0)^2 + \cos^2 \vartheta_1 + \cos^2 \vartheta_2 + \cos^2 \vartheta_3 = 1$, όπου $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ είναι οι γωνίες που σχηματίζει το ψ με τα ε, η, ζ αντίστοιχα. Αλλά $(\psi, \psi_0)^2 > 0$, διότι αν ήταν ίσο με μηδέν, το ψ θα ήταν ορθογώνιο στο ψ_0. Άρα θα έπρεπε να ανήκει στο V, αντίφαση. Οπότε

$$\cos^2 \vartheta_1 + \cos^2 \vartheta_2 + \cos^2 \vartheta_3 < 1.$$

Επίσης, αν στους υπολογισμούς που έγιναν στο βήμα (9), μειώσουμε κατά ένα το άνω άκρο του αθροίσματος σε καθένα από τα ε, η και ζ παίρνουμε

$$(\varepsilon, \varepsilon) = p(p-1)/2,\ (\eta, \eta) = q(q-1)/2 \quad \text{και} \quad (\zeta, \zeta) = r(r-1)/2.$$

Ακόμη,

$$(\psi, \varepsilon) = (\psi, \sum_{i=1}^{p-1} i\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{p-1} i(\varepsilon_i, \psi)$$

Όμως η κορυφή ψ συνδέεται μέσω ακμής μόνο με την ε_{p-1}. Άρα $(\varepsilon_i, \psi) = 0$, για όλα τα $i = 1, \ldots, p-2$, και $4(\varepsilon_{p-1}, \psi)^2 = 1$, οπότε $(\varepsilon_{p-1}, \psi) = -1/2$. Επομένως $(\psi, \varepsilon) = -(p-1)/2$, όμοια υπολογίζουμε ότι $(\psi, \zeta) = -(r-1)/2$ και $(\psi, \eta) = -(q-1)/2$.

Από τον τύπο του εσωτερικού γινομένου έχουμε,

$$\begin{aligned} \cos^2 \vartheta_1 &= (\psi, \varepsilon)^2 / \parallel \psi \parallel^2 \parallel \varepsilon \parallel^2 \\ &= (1 - 1/p)/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \vartheta_2 &= (\psi, \zeta)^2 / \parallel \psi \parallel^2 \parallel \zeta \parallel^2 \\ &= (1 - 1/r)/2 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \cos^2 \vartheta_3 &= (\psi, \eta)^2 / \parallel \psi \parallel^2 \parallel \eta \parallel^2 \\ &= (1 - 1/q)/2 \end{aligned}$$

άρα αντικαθιστώντας στην ανισότητα με τα τετράγωνα των συνημιτόνων, παίρνουμε

$$1/p + 1/r + 1/q > 1 \tag{5.1}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p \geq q \geq r \geq 2$. Διότι αν κάποιο από τα p, q και r ισούται με 1 τότε επιστρέφουμε στο γράφημα A_ℓ.

Συνεπώς $1/p + 1/r + 1/q > 1$ και $1/p \leq 1/q \leq 1/r \leq 1/2$, άρα $1/3 < 1/r \leq 1/2$ και αφού το r είναι φυσικός αριθμός, παίρνουμε $r = 2$.

Αντικαθιστάμε στην ανισότητα (5.1) την τιμή του r και έχουμε $1/p + 1/q > 1/2$. Αλλά $2/q \geq 1/p + 1/q > 1/2$, δηλαδή $2/q > 1/2$, άρα $q < 4$. Όμως επειδή $q \geq 2$ παίρνουμε $q = 2$ ή $q = 3$.

Επομένως για τα γραφήματα έχουμε,

- $r = 2, q = 2$ και $p =$ οτιδήποτε και
- $r = 2, q = 3$ και η τιμή του p δίδεται από την ανισότητα $1/p > 1/6$. Δηλαδή $p < 6$, που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τα r, q στην ανισότητα $1/p + 1/r + 1/q > 1$. Όμως επειδή $p \geq q = 3$, οι δυνατές επιλογές για το p είναι 3 ή 4 ή 5.

Έτσι τα αντίστοιχα διαγράμματα είναι τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned}
(p,q,r) = (p,2,2) &= \mathrm{D_{p+2}} = \mathrm{D_n}\ (n \geq 4) \\
(p,q,r) = (3,3,2) &= \mathrm{E}_6 \\
(p,q,r) = (4,3,2) &= \mathrm{E}_7 \\
(p,q,r) = (5,3,2) &= \mathrm{E}_8
\end{aligned}$$

□

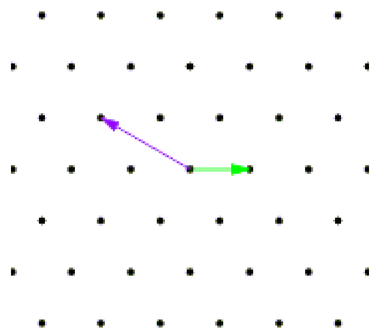
Παρατήρηση 5.6 *Με το προηγούμενο θεώρημα και την τακτική της απόδειξης, αποκλείουμε από τα συστήματα ριζών, όλα εκείνα που το γράφημά τους δεν ανήκει στο σύνολο των άπειρων οικογενειών* $A_\ell - \mathrm{D}_\ell$ *και των πεπερασμένων οικογενειών* $\mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8, \mathrm{F}_4$ *και* G_2.

5.5 Κατασκευή συστημάτων ριζών

Στην προηγούμενη παράγραφο ορίσαμε όλα τα πιθανά διαγράμματα Dynkin. Αυτό που απομένει να βρούμε είναι τα συστήματα ριζών στα οποία αντιστοιχούν αυτά τα γραφήματα. Συνολικά έχουμε τις οικογένειες συστημάτων $\mathrm{A}_\ell, \mathrm{B}_\ell, \mathrm{C}_\ell, \mathrm{D}_\ell$, $\mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8, \mathrm{F}_4$ και G_2 όπου η ονομασία προέρχεται από την αντιστοιχία των διαγραμμάτων με τα συστήματα ριζών. Θα κάνουμε την κατασκευή για δύο από αυτά.

Ορισμός. Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ με εσωτερικό γινόμενο και $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ μία ορθοκανονική του βάση. Το σύνολο όλων των $\mathbb{Z}$-γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων αυτής της βάσης αποτελεί ένα **lattice** που συμβολίζουμε με I.

Για παράδειγμα εάν ο χώρος μας είναι διάστασης 2, τότεη κάθε διάνυσμα του χώρου αυτού θα έχει ως πέρας κάποιο από τα σημεία του πλέγματος.



Σχήμα 5.34: Lattice

Παρακάτω θα θεωρούμε το E να είναι ο χώρος $\mathbb{R}^n$ ή κάποιος υπόχωρός του με το εσωτερικό γινόμενο του μεγάλου χώρου. Ύστερα δίνουμε κάποια παραδείγματα για την κατασκευή των πινάκων Cartan που αντιστοιχούν στα συστήματα ριζών.

A_ℓ *για* $\ell \geq 1$:

Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^{\ell+1}$ και $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\ell+1}\}$ μία ορθοκανονική βάση του. Έστω E το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου που παράγεται από το διάνυσμα $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{\ell+1}$. Συμβολίζουμε με I' την τομή των συνόλων I και E, $\mathrm{I}' = \mathrm{I} \cap \mathrm{E}$. Δηλαδή κάθε διάνυσμα του I' γράφεται ως $\mathbb{Z}$-γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης του χώρου $\mathbb{R}^{\ell+1}$ και είναι ορθογώνιο στο χώρο που παράγει το διάνυσμα $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{\ell+1}$.

Ονομάζουμε Φ το σύνολο όλων των διανυσμάτων του I' με μήκος $\sqrt{2}$. Οπότε εάν $x \in \Phi$ και $x = \sum_{i=1}^{\ell+1} k_{\varepsilon_i}\varepsilon_i$, τότε η καθετότητα των $x, \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{\ell+1}$ δίδει μηδενικό άθροισμα συντελεστών, $\sum k_{\varepsilon_i} = 0$ και επειδή το x έχει μήκος $\sqrt{2}$, έχουμε $\sum k_{\varepsilon_i}^2 = 2$. Αλλά οι συντελεστές k_{ε_i} είναι ακέραιοι και έχουν άθροισμα ίσο με μηδέν, άρα υπάρχουν τουλάχιστον δύο μη-μηδενικοί και μάλιστα είναι ίσοι με 1 και -1. Έτσι η μορφή των στοιχείων του Φ είναι $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, με $i \neq j$, και είναι σε πλήθος $(\ell+1)^2 - (\ell+1)$. Εύκολα, λόγω της γραμμικότητας του εσωτερικού γινομένου, επαληθεύουμε ότι $(\varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i - \varepsilon_j) = 2$.

Θεωρούμε το υποσύνολο Δ του Φ, με $\Delta = \{\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{\ell+1}, i = 1, \ldots, \ell\}$. Τότε κάθε διάνυσμα του Φ, $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ γράφεται ως

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j = (\varepsilon_1 - \varepsilon_{i+1}) + (\varepsilon_{i+1}, \varepsilon_{i+2}) + \ldots + (\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j) \quad \text{όταν} \quad i < j,$$

και με συντελεστές -1 όταν $i > j$. Έτσι κάθε στοιχείο του Φ, $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του Δ, με όλους τους συντελεστές θετικούς στην πρώτη περίπτωση, και αρνητικούς στη δεύτερη. Επίσης το Δ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Διότι, εάν $c_1\alpha_1 + \ldots + c_\ell\alpha_\ell = 0$ με πραγματικούς συντελεστές $c_i, i = 1, \ldots, \ell$, τότε αντικαθιστώντας τα α_i παίρνουμε

$$c_1\varepsilon_1 + (c_2 - c_1)\varepsilon_2 + \ldots + (c_\ell - c_{\ell-1})\varepsilon_\ell = 0.$$

Αλλά τα ε_i για κάθε $i = 1, \ldots, \ell$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως $c_i = 0$ για όλα τα $i = 1, \ldots, \ell$. Οπότε τα α_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, άρα περιέχονται σε μία βάση του χώρου E. Όμως, επειδή $\dim \mathrm{E} = \ell$, τελικά το Δ είναι βάση του E, δηλαδή τον παράγει.

Τώρα δείχνουμε ότι το σύνολο Φ είναι ένα σύστημα ριζών στον E. Πρώτα από όλα, από τον ορισμό του, περιέχει διαφορές πεπερασμένου πλήθους διανυσμάτων, άρα είναι πεπερασμένο. Όπως δείξαμε παραπάνω το υποσύνολο Δ του Φ, είναι βάση του E, άρα το Φ παράγει τον E. Τέλος, από τον τρόπο που ορίσαμε το Φ δεν περιέχει το μηδενικό διάνυσμα. Έτσι ικανοποιείται το (R1) του ορισμού του συστήματος ριζών.

Θεωρούμε ένα διάνυσμα α του Φ και την ανάκλαση σ_α που ορίζει. Εφαρμόζουμε τη σ_α σε ένα τυχαίο διάνυσμα x του Φ. Τα α, x ως στοιχεία του Φ, γράφονται στην μορφή $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ με $i \neq j$ και $x = \varepsilon_k - \varepsilon_m$ με $k \neq m$. Έτσι

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(x) &= \sigma_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}(\varepsilon_k - \varepsilon_m) \\ &= (\varepsilon_k - \varepsilon_m) - (\varepsilon_k - \varepsilon_m, \varepsilon_i - \varepsilon_j)(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε χωριστά το $(\varepsilon_k - \varepsilon_m, \varepsilon_i - \varepsilon_j)$. Λόγω γραμμικότητας έχουμε

$$(\varepsilon_k - \varepsilon_m, \varepsilon_i - \varepsilon_j) = \delta_{ki} - \delta_{kj} - \delta_{mi} + \delta_{mj},$$

όπου δ_{ab} είναι το δέλτα του Kronecker. Παίρνουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις για τις τιμές των δεικτών με τους περιορισμούς $i \neq j$ και $k \neq m$.
Έτσι

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(x) &= (\varepsilon_k - \varepsilon_m) - (\pm 1)(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \\ &= (\varepsilon_k - \varepsilon_m) \pm (\varepsilon_i - \varepsilon_j) \end{aligned}$$

Άρα,

- αν $k = i$ τότε $j \neq m$ και $\sigma_\alpha(x) = \varepsilon_j - \varepsilon_m \in \Phi$
- αν $m = j$ τότε $k \neq i$ και $\sigma_\alpha(x) = \varepsilon_k - \varepsilon_i \in \Phi$
- αν $k = j$ τότε $i \neq m$ και $\sigma_\alpha(x) = \varepsilon_i - \varepsilon_m \in \Phi$
- αν $m = i$ τότε $k \neq j$ και $\sigma_\alpha(x) = \varepsilon_k - \varepsilon_j \in \Phi$.

Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση η εικόνα είναι στοιχείο του Φ, άρα $\sigma_\alpha(\Phi) \subseteq \Phi$ και έτσι ικανοποιείται το (R3).

Εφαρμόζουμε τη σ_α στο α, οπότε

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha(\alpha) &= \sigma_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)\\
&= (\varepsilon_i-\varepsilon_j)-2(\varepsilon_i-\varepsilon_j)\\
&= -(\varepsilon_i-\varepsilon_j)\\
&= -\alpha.
\end{aligned}$$

Αλλά επειδή όλα τα διανύσματα του Φ έχουν μήκος $\sqrt{2}$, το $-\alpha$ είναι το μοναδικό συγγραμμικό διάνυσμα του α. Επομένως ικανοποιείται το αξίωμα (R2).

Μένει να δείξουμε ότι για οποιοδήποτε ζεύγος διανυσμάτων α, β του Φ η ποσότητα$<\beta,\, \alpha>$είναι ακέραιος αριθμός. Τα α, β ως στοιχεία του Φ εκφράζονται ως $\alpha = \varepsilon_p - \varepsilon_q$, για $p \neq q$ και $\beta = \varepsilon_r - \varepsilon_t$, για $r \neq t$, με $(\alpha,\alpha) = (\beta,\beta) = 2$. Άρα

$$\begin{aligned}
<\beta,\, \alpha> &= 2(\beta,\alpha)/(\alpha,\alpha)\\
&= (\varepsilon_r-\varepsilon_t, \varepsilon_p-\varepsilon_q)\\
&= \delta_{rp}-\delta_{tp}-\delta_{rq}+\delta_{tq}
\end{aligned}$$

Εάν θεωρήσουμε τις τέσσερις δυνατές περιπτώσεις για τους δείκτες, παίρνουμε για την ποσότητα$<\beta,\, \alpha>$τις τιμές $+1$ και -1. Οπότε ικανοποιείται το αξίωμα (R4) και έτσι το σύνολο Φ είναι σύστημα ριζών στο E. Μάλιστα το Δ είναι μία βάση του Φ. Προηγουμένως δείξαμε ότι αυτό το σύνολο είναι μία βάση του E και κάθε διάνυσμα του Φ, $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του Δ με ομόσημους όλους τους συντελεστές.

Αφού, λοιπόν επαληθεύσαμε ότι το σύνολο Φ που θεωρήσαμε είναι σύστημα ριζών κατασκευάζουμε τον αντίστοιχο πίνακα Cartan. Τα στοιχεία στις θέσεις ij, δίνονται από το$<\alpha_i,\, \alpha_j>$όπου $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta$ για όλα τα $i, j \in \{1, \ldots, \ell\}$.

- Όταν $j = i$, έχουμε$<\alpha_i,\, \alpha_i> = 2(\alpha_i,\alpha_i)/(\alpha_i,\alpha_i) = 2$
- Όταν $j = i+1$, έχουμε $(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+2}) = -1$, άρα $<\alpha_i,\, \alpha_{i+1}> = 2(\alpha_i,\alpha_{i+1})/(\alpha_{i+1},\alpha_{i+1}) = -1$
- Όταν $j \neq i-1, i, i+1$, έχουμε

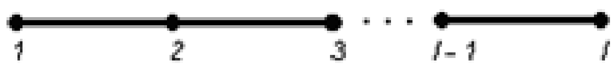
$$\begin{aligned}
(\alpha_i,\alpha_j) &= (\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}, \varepsilon_j-\varepsilon_{j+1})\\
&= (\varepsilon_i,\varepsilon_j)-(\varepsilon_i,\varepsilon_{j+1})-(\varepsilon_{i+1},\varepsilon_j)+(\varepsilon_{i+1},\varepsilon_{j+1})\\
&= 0
\end{aligned}$$

άρα$<\alpha_i,\, \alpha_j> = 0$.

Οπότε ο πίνακας Cartan είναι μεγέθους $\ell \times \ell$, έχει στη διαγώνιο την τιμή 2, στις δύο γειτονικές διαγωνίους την τιμή -1 και σε όλες τις υπόλοιπες θέσεις 0. Δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

και έτσι παίρνουμε το διάγραμμα Dynkin



Σχήμα 5.35: A_ℓ

B_ℓ *για* $\ell \geq 2$:

Έστω $E = \mathbb{R}^\ell$ και $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\ell\}$ μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^\ell$. Θεωρούμε το Φ να είναι το υποσύνολο του I που αποτελείται από όλα τα διανύσματα που έχουν μήκος 1 ή $\sqrt{2}$, δηλαδή $\Phi = \{\alpha \in I | \, (\alpha, \alpha) = 1, 2\}$. Τότε το Φ γράφεται ως

$$\Phi = \{+\varepsilon_i, -\varepsilon_i, \varepsilon_i - \varepsilon_j, -(\varepsilon_i - \varepsilon_j), \varepsilon_i + \varepsilon_j, -(\varepsilon_i + \varepsilon_j), i < j\}.$$

Τα οποία σε πλήθος είναι $4(\ell^2 - \ell)/2 + 2\ell$, δηλαδή $2\ell^2$.

Εύκολα επαληθεύουμε ότι τα μήκη είναι 1 και $\sqrt{2}$. Συγκεκριμένα

$$(\pm\varepsilon_i, \pm\varepsilon_i) = 1 \quad \text{και} \quad (\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j), \pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)) = 2,$$

με όλους τους συνδυασμούς προσήμου.

Θεωρούμε το υποσύνολο του Φ,

$$\Delta = \{\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \, \alpha_\ell = \varepsilon_\ell \, , i = 1, \ldots, \ell - 1\}.$$

Τότε, εφόσον το $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\ell\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο και τα διανύσματα του Δ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επίσης, αφού $\dim E = \ell$, τα α_i για όλα τα $i = 1, \ldots, \ell$ αποτελούν μία βάση του E.

Υποθέτουμε ότι $i < j$ οπότε

$$\begin{aligned} \varepsilon_i - \varepsilon_j &= (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) + (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+2}) + \ldots + (\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j) \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) \end{aligned}$$

και

$$\varepsilon_i + \varepsilon_j \;=\; 2\varepsilon_\ell + \sum_{k=i}^{j-1}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) + 2\sum_{k=j}^{\ell-1}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}).$$

Ενώ όταν $i > j$, έχουμε το διάνυσμα $-(\varepsilon_i - \varepsilon_j)$, με

$$-(\varepsilon_i - \varepsilon_j) = -\sum_{k=i}^{j-1}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})$$

και το

$$-(\varepsilon_i + \varepsilon_j) = -2\varepsilon_\ell - \sum_{k=i}^{j-1}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) - 2\sum_{k=j}^{\ell-1}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}).$$

Επομένως τα $\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)$, με $i \neq j$, εκφράζονται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του Δ με όλους τους ακέραιους συντελεστές μη-αρνητικούς ή όλους μη-θετικούς.

Δείχνουμε ότι το Φ είναι σύστημα ριζών. Το σύνολο αυτό είναι πεπερασμένο, αφού από τον τρόπο που το ορίσαμε, αποτελείται από πεπερασμένου πλήθους διαφορές διανυσμάτων και επιπλέον ένα ακόμα διάνυσμα. Επίσης, πάλι από τη υπόθεση, δεν είναι δυνατό να ανήκει σε αυτό το μηδενικό διάνυσμα, αφού $i \neq j$. Όπως δείξαμε προηγούμενως το Δ παράγει τον Ε και αφού είναι υποσύνολο του Φ, τότε και το μεγάλο σύνολο παράγει το χώρο Ε. Συνεπώς ικανοποιείται το (R1).

Για να ελέγξουμε ότι ισχύει το αξίωμα (R3), αρκεί να θεωρήσουμε ένα τυχαίο διάνυσμα του Φ^+, έστω α, και να δείξουμε ότι η άνακλαση που ορίζει θα απεικονίζει τα διανύσματα του Φ^+ ξανά στο Φ^+. Σε αυτή την περίπτωση στο σύνολο Φ^+ ανήκουν εκείνα τα διανύσματα του Φ που έχουν μη-αρνητικούς συντελεστές στη γραφή τους.

Διακρίνουμε περιπτώσεις για το α. Εάν είναι της μορφής ε_i ή $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, με $i \neq j$. Θεωρούμε ένα τυχαίο διάνυσμα $\beta \in \Phi^+$. Ενδεικτικά, δίνουμε έναν από τους πολλούς συνδυασμούς που έχουμε για τις μορφές των α, β. Έτσι λοιπόν υποθέτουμε ότι υπάρχουν $r, m, n \in \{1, \ldots, \ell\}$ με $m \neq n$ τέτοια ώστε $\alpha = \varepsilon_r$ και $\beta = \varepsilon_m - \varepsilon_n$. Τότε αν εφαρμόσουμε τη σ_α στο β παίρνουμε,

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(\beta) &= \beta - 2(\beta, \alpha)\alpha \\ &= \varepsilon_m - \varepsilon_n - 2(\varepsilon_m - \varepsilon_n, \varepsilon_r)\varepsilon_r \\ &= \varepsilon_m - \varepsilon_n - 2\delta_{mr}\varepsilon_r + \delta_{nr}\varepsilon_r \end{aligned}$$

Άρα

- αν $m = r$ τότε $n \neq r$, άρα $\sigma_\alpha(\beta) = \varepsilon_n - \varepsilon_m \in \Phi^+$

- αν $m \neq r$ και $n = r$, τότε $\sigma_\alpha(\beta) = \varepsilon_m \in \Phi^+$
- αν $m \neq r$ και $n \neq r$, τότε $\sigma_\alpha(\beta) = \varepsilon_m - \varepsilon_n \in \Phi^+$.

Συνεχίζοντας με τις υπόλοιπες περιπτώσεις τελικά βλέπουμε ότι ικανοποιείται το αξίωμα (R3). Το ίδιο ισχύει και για το (R2), υπολογίζοντας όλες τις ανακλάσεις των πιθανών διανυσμάτων (εκφράσεων) και μετά από πράξεις, συμπεραίνουμε ότι το μοναδικό συγγραμμικό διάνυσμα του α είναι το αντίθετό του. Όπως και το (R4), ικανοποιείται για κάθε ζεύγος διανυσμάτων στο Φ. Πάλι, λόγω των πολλών περιπτώσεων που έχουμε, δείχνουμε μία από αυτές. Όταν $\alpha = \varepsilon_i$ και $\beta = \varepsilon_m - \varepsilon_n$ για $m \neq n$. Τότε

$$\begin{aligned} <\beta,\, \alpha> &= 2(\beta, \alpha) \\ &= 2(\varepsilon_m - \varepsilon_n, \varepsilon_i) \\ &= 2\,\delta_{mi} - 2\,\delta_{ni} \end{aligned}$$

- Αν $m = i$ τότε $n \neq i$, άρα $<\beta,\, \alpha> = 2 \in \mathbb{Z}$
- Αν $m \neq i$ και $n = i$, τότε $<\beta,\, \alpha> = -2 \in \mathbb{Z}$
- Αν $m \neq i$ και $n \neq i$, τότε $<\beta,\, \alpha> = 0 \in \mathbb{Z}$

Άρα το Φ είναι σύστημα ριζών στο E και το Δ στη μορφή που δίδεται είναι μία βάση του. Όπως έχουμε δείξει το Δ είναι βάση του χώρου E, επίσης κάθε διάνυσμα του Φ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του Δ, με ομόσημους όλους τους συντελεστές, άρα το Δ αποτελεί μία βάση του Φ.

Κατασκευάζουμε τον αντίστοιχο πίνακα Cartan υπολογίζοντας τα στοιχεία του $<\alpha_i,\, \alpha_j>$, για όλα τα $i, j \in \{1, \ldots, \ell\}$.
Έχουμε

- αν $i = j$, τότε $<\alpha_i,\, \alpha_i> = 2(\alpha_i, \alpha_i)/(\alpha_i, \alpha_i) = 2$
- αν $i \neq \ell - 1$, τότε έχουμε $(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+2}) = -1$, άρα $<\alpha_i,\, \alpha_{i+1}> = 2(\alpha_i, \alpha_{i+1})/(\alpha_{i+1}, \alpha_{i+1}) = -1$
- αν $i = \ell - 1$, τότε έχουμε $(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = (\alpha_{\ell-1}, \alpha_\ell) = (\varepsilon_{\ell-1}, \varepsilon_\ell) - (\varepsilon_\ell, \varepsilon_\ell) = -1$, οπότε $<\alpha_{\ell-1},\, \alpha_\ell> = 2(\alpha_{\ell-1}, \alpha_\ell)/(\alpha_\ell, \alpha_\ell) = -2$
- αν $i \neq j-1, j, j+1$, τότε για τις ρίζες έχουμε τις παρακάτω εκδοχές:
  Όταν $i = 1, \ldots, \ell - 1$ έχουμε $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$, διαφορετικά $\alpha_i = \varepsilon_\ell$.
  Ενώ όταν $j = 1, \ldots, \ell - 1$ έχουμε $\alpha_j = \varepsilon_\ell$, διαφορετικά $\alpha_j = \varepsilon_\ell$.

  i. Εφόσον θέλουμε $i \neq j$, δηλαδή οι ρίζες α_i, α_j να είναι διαφορετικές μεταξύ τους, η περίπτωση $\alpha_i = \alpha_j = \varepsilon_\ell$ απορρίπτεται.

ii. Εάν $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ και $\alpha_j = \varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}$ με $i \neq j \in \{1, \dots, \ell - 1\}$, τότε $(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ji} - \delta_{j(i+1)} - \delta_{(j+1)i} + \delta_{(j+1)(i+1)} = 0$. Επομένως $<\alpha_i,\, \alpha_j>= 0$.

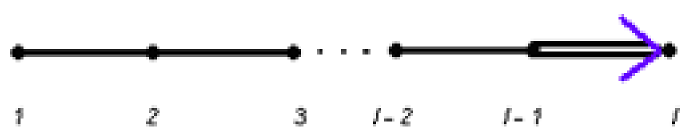
iii. Εάν $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ με $i = 1, \dots, \ell - 1$ και $\alpha_j = \varepsilon_\ell$, τότε $(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{\ell i} - \delta_{\ell(i+1)}$. Προφανώς $i \neq \ell$, άρα $\delta_{\ell i} = 0$ και έτσι $(\alpha_i, \alpha_j) = -\delta_{\ell(i+1)}$. Εάν $i = \ell - 1$ τότε $(\alpha_i, \alpha_j) = (\alpha_{\ell-1}, \alpha_\ell)$ και αναγόμαστε σε προηγούμενη περίπτωση. Επίσης, εάν $i \neq \ell - 1$ τότε έχουμε $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$. Άρα $<\alpha_i,\, \alpha_j>= 0$.

iv. Εάν $\alpha_i = \varepsilon_\ell$ και $\alpha_j = \varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}$, με $j = 1, \dots, \ell - 1$, τότε από την ακριβώς προηγούμενη περίπτωση $<\alpha_i,\, \alpha_j>= 0$.

Οπότε ο πίνακας είναι μεγέθους $\ell \times \ell$, αφού dimE $= \ell$. Έχει στη διαγώνιο την τιμή 2, στις δύο γειτονικές διαγωνίους την τιμή -1 με εξαίρεση τη θέση $<\alpha_{\ell-1},\, \alpha_\ell>$ που έχει -2 και σε όλες τις άλλες 0.
Δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & \ddots & 2 & -2 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Και το σύστημα ριζών αναπαριστάται από το διάγραμμα Dynkin:



Σχήμα 5.36: B_ℓ

Σημείωση 5.7 *Κατασκευάζουμε το* B_2. *Έστω* $\mathrm{E} = \mathbb{R}^\ell$ *και* $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ *μία ορθοκανονική βάση του. Σε αυτή την περίπτωση το* Φ *ισούται με*

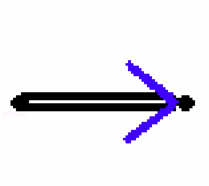
$$\Phi = \{\varepsilon_1, -\varepsilon_1, \varepsilon_2, -\varepsilon_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_2, -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \varepsilon_1 + \varepsilon_2, -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\}$$

και $\Delta = \{\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = \varepsilon_2\}$. *Τότε* $<\alpha_i,\, \alpha_i>= 2$, *όπου* $i = 1, 2$, *και* $(\alpha_1, \alpha_2) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3) = \delta_{12} - \delta_{13} - \delta_{22} + \delta_{23} = -1$, *άρα* $<\alpha_1,\, \alpha_2>= -1$

και $<\alpha_2, \alpha_1>= -2$. *Επομένως ο πίνακας Cartan είναι ο*

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Το μόνο που απομένει ώστε να προσδιοριστεί πλήρως το σύστημα ριζών, είναι να βρούμε τις γωνίες μεταξύ των ριζών. Υπολογίσαμε ότι $(\alpha_1, \alpha_2) = -1$, *και από τον τύπο του εσωτερικού γινομένου έχουμε* $\cos\vartheta_1 = -\sqrt{2}/2$, *άρα* $\vartheta_1 = 3\pi/4$, *όπου* ϑ_1 *είναι η γωνία των* α_1, α_2. *Ονομάζουμε και τις υπόλοιπες ρίζες του* Φ^+ *που θα χρησιμοποιήσουμε για την κατασκευή,* $\beta = \varepsilon_1, \gamma = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. *Οπότε* $(\beta, \alpha_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$, *άρα* $\cos\vartheta_2 = 0$, *άρα* $\vartheta_2 = \pi/2$, *όπου* ϑ_2 *είναι η γωνία που σχηματίζουν τα* β, α_2. *Τέλος,* $(\gamma, \alpha_1) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 0$, *επομένως εάν συμβολίσουμε με* ϑ_3 *τη γωνία των* γ, α_1, *έχουμε* $\cos\vartheta_3 = 0$, *άρα* $\vartheta_3 = \pi/2$. *Συνεπώς το* B_2 *παριστάνεται από το ακόλουθο σχήμα:*



Σχήμα 5.37: B_2

C_ℓ *για* $\ell \geq 3$:

Εδώ ορίζουμε το σύνολο Φ να ισούται με

$$\{+2\varepsilon_i, -2\varepsilon_i, \varepsilon_i - \varepsilon_j, -(\varepsilon_i - \varepsilon_j), \varepsilon_i + \varepsilon_j, -(\varepsilon_i + \varepsilon_j), \text{ με } i \neq j\}.$$

Όμοια με το B_ℓ αποδεικνύεται ότι το Φ είναι σύστημα ριζών και ότι το σύνολο $\Delta = \{\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \alpha_\ell = \varepsilon_\ell\,, i = 1, \ldots, \ell - 1\}$ είναι μία βάση του.

Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο ότι η τάξη του C_ℓ είναι γνήσια μεγαλύτερη του 2. Στην περίπτωση του C_2, έχουμε

$$\Phi = \{+2\varepsilon_1, -2\varepsilon_1, +2\varepsilon_2, -2\varepsilon_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_2, -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \varepsilon_1 + \varepsilon_2\}$$

και

$$\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2\}.$$

Τα μήκη των ριζών είναι 2 και $\sqrt{2}$. Συγκεκριμένα $(\pm 2\varepsilon_i, \pm 2\varepsilon_i) = 4$ και

$$(\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j), \pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)) = 2,$$

το τελευταίο με όλους τους συνδυασμούς προσήμου.

Η βάση αυτού του συστήματος ταυτίζεται με εκείνη του B_2. Άρα, αφού ο πίνακας Cartan κατασκαυάζεται μέσω των απλών ριζών, οι πίνακες αυτών των δύο συστημάτων ριζών ταυτίζονται. Έτσι, σύμφωνα με την Πρόταση 5.2 ορίζεται ισομορφισμός μεταξύ των B_2 και C_2, $\phi : B_2 \longrightarrow C_2$. Ο πίνακάς τους είναι ο

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Όμως, αυτά τα δύο συστήματα ριζών εκτός από ισομορφικά είναι και δυϊκά.

Παρατηρούμε ότι το πλήθος των κοντών, όπως και των μακριών ριζών στα δύο συστήματα είναι το ίδιο. Μπορούμε από το ένα να οδηγηθούμε στο άλλο. Σε έναν ευκλείδειο χώρο E θεωρούμε το γραμμικό μετασχηματισμό της αντιστροφής ως προς τον κύκλο ακτίνας r. Δηλαδή

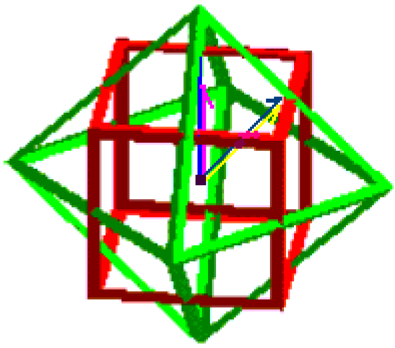
$$\mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$$

με τύπο

$$\alpha \longmapsto \alpha^* = \frac{r^2}{\parallel \alpha \parallel^2} \cdot \alpha$$

Για να προκύψει από το B_2 το C_2 κάνουμε αντιστροφή ως προς τον κύκλο ακτίνας $\sqrt{2}$. Έτσι οι ρίζες του B_2 στη μορφή $\pm\varepsilon_i$ πολλαπλασιάζονται με ± 2, με αντιστοιχία στα πρόσημα. Δηλαδή, μετά από αυτόν το μετασχηματισμό είναι της μορφής $\pm 2\varepsilon_i$. Ενώ οι ρίζες $\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)$ παραμένουν σταθερές, αφού πολλαπλασιάζονται με το 1.

Επομένως οι κοντές ρίζες του B_2, μετασχηματίζονται σε μακριές του C_2 και οι μακριές του B_2 τώρα πια είναι οι κοντές του C_2.



Σχήμα 5.38: Το B_2 είναι το δυϊκό σύστημα ριζών του C_2

Συνεχίζοντας με τις κατασκευές των υπολοίπων καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των διαγραμμάτων Dynkin και των irreducible συστημάτων ριζών. Αφού η αντιστοίχιση είναι καλά ορισμένη, λόγω της Πρότασης (5.2), και επιπλέον από την κατασκευή, για κάθε οικογένεια συστημάτων ριζών υπάρχει ακριβώς ένα διάγραμμα Dynkin.

Κεφάλαιο 6

Παράρτημα

6.1 Διανυσματικός χώρος

Βοηθητικά, αποδεικνύουμε κάποια βασικά λήμματα σε διανυσματικούς χώρους, πάνω από το σώμα των πραγματικών αριθμών.

Λήμμα 6.1 *Έστω* E *ένας* $\mathbb{R}$*-διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Κάθε σύνολο διανυσμάτων που περιέχονται σε έναν ανοιχτό ημιχώρο του* E, *και σχηματίζουν ανά δύο αμβλείες γωνίες, είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο E με εσωτερικό γινόμενο, ορισμένο πάνω απο το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι για τα διανύσματα του συνόλου, έστω A, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i = 0$$

όπου $n = \operatorname{card} \mathrm{A}$. Αφού οι συντελεστές ανήκουν στο $\mathbb{R}$ κάποιοι από αυτούς είναι θετικοί ή μηδέν και κάποιοι άλλοι είναι αρνητικοί.

Έτσι, διαμερίζουμε το σύνολο των δεικτών σε δύο υποσύνολα. Στο σύνολο των δεικτών που αντιστοιχούν σε θετικούς ή μηδενικούς συντελεστές και σε εκείνο του οποίου οι δείκτες αντιστοιχούν σε αρνητικούς συντελεστές. Τα συμβολίζουμε I και I′ αντίστοιχα. Άρα, ο γραμμικός συνδυασμός παίρνει την εξής μορφή:

$$\sum_{i \in \mathrm{I}} r_i x_i - \sum_{j \in \mathrm{I}'} s_j y_j = 0$$

όπου y_j, x_i είναι τα διανύσματα με αρνητικό συντελεστή και θετικό ή μηδενικό συντελεστή αντίστοιχα και $r_i \geq 0, s_j > 0$. Άρα

$$\sum_{i \in \mathrm{I}} r_i x_i = \sum_{j \in \mathrm{I}'} s_j y_j.$$

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $r_i = 0$ για όλα τα $i \in \mathrm{I}$ και ότι το I' είναι το κενό σύνολο. Θέτουμε

$$\varepsilon = \sum_{i\in \mathrm{I}} r_i x_i \ \left(= \sum_{j\in \mathrm{I}'} s_j y_j\right).$$

Τότε από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου έχουμε ότι $(\varepsilon, \varepsilon) \geq 0$. Επίσης ισχύει

$$(\varepsilon, \varepsilon) \ = \ \left(\sum_{i\in \mathrm{I}} r_i x_i, \sum_{j\in \mathrm{I}'} s_j y_j\right) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \sum_{j\in \mathrm{I}'} r_i s_j \, (x_i, y_j).$$

Όμως τα x_i, y_j για όλους τους διαφορετικούς δείκτες σχηματίζουν αμβλεία γωνία, άρα έχουν αρνητικό εσωτερικό γινόμενο, $(x_i, y_j) \leq 0$ και $r_i s_j \geq 0$. Οπότε $(\varepsilon, \varepsilon) \leq 0$ και τελικά παίρνουμε $(\varepsilon, \varepsilon) = 0$. Συνεπώς $\varepsilon = \vec{0}$.

Επιπλέον, θεωρούμε το κάθετο διάνυσμα στο σύνορο του ανοιχτού ημιχώρου και το ονομάζουμε γ. Το γ έχει την ιδιότητα να σχηματίζει με κάθε διάνυσμα του A ομόσημο εσωτερικό γινόμενο. Όταν το γ είναι στην ίδια πλευρά με τα διανύσματα του A τότε έχουν γνήσια θετικό εσωτερικό γινόμενο, ενώ όταν βρίσκονται σε διαφορετική πλευρά έχουν γνήσια αρνητικό. Εφαρμόζουμε στο γ εσωτερικό γινόμενο με το ε

$$(\gamma, \varepsilon) = \sum_{i\in \mathrm{I}} r_i (\gamma, x_i).$$

Το ε είναι το μηδενικό διάνυσμα, άρα $(\gamma, \varepsilon) = 0$. Επομένως, αφού τα (γ, x_i) είναι όλα θετικά ή όλα αρνητικά, έχουμε υποχρεωτικά το $r_i = 0$, για όλα τα $i \in \mathrm{I}$. Τώρα, θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο του γ με την άλλη τιμή του ε

$$(\gamma, \varepsilon) = \sum_{j\in \mathrm{I}'} s_j (\gamma, y_j).$$

Αλλά $(\gamma, y_j) > 0$ ή < 0 και $s_j > 0$, άρα δεν είναι δυνατό να ικανοποιείται η παραπάνω ισότητα σε συνδυασμό με τη $(\gamma, \varepsilon) = 0$. Οπότε δεν υπάρχουν αρνητικοί δείκτες στον γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων του A που ισούνται με 0, δηλαδή το I' είναι το κενό. Επομένως το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

$\square$

Λήμμα 6.2 *Έστω* E *ένας* $\mathbb{R}$*-διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και* Δ *μία βάση του,* $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$*. Τότε η τομή των θετικών ανοιχτών ημιχώρων που ορίζουν τα στοιχεία του* Δ *είναι μη κενή.*

Απόδειξη. Έστω α_j ένα στοιχείο της βάσης Δ, για κάποιο $j \in \{1, \ldots, n\}$. Ονομάζουμε E' τον υπόχωρο που παράγεται από τα στοιχεία της βάσης εκτός του α_j. Εάν δ_j είναι η προβολή του α_j στο ορθογώνιο συμπλήρωμα του E', τότε έχουμε ότι $\mathrm{E} = \mathbb{R}\delta_j \oplus \mathrm{E}'$, όπου $\mathbb{R}\delta_j$ είναι η ευθεία που παράγεται από το δ_j. Έτσι, κάθε διάνυσμα x του E, εκφράζεται ως

$$x = k\delta_j + \sum \ell_i \alpha_i$$

με $i = 1, \ldots, n, i \neq j$ και $k, \ell_i \in \mathbb{R}$.

Παίρνουμε στοιχείο γ του E να ισούται με $\gamma = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n$, τότε αν εφαρμόσουμε με όλα τα διανύσματα του Δ εσωτερικό γινόμενο, σε κάθε περίπτωση υπάρχει ακριβώς ένας μη-μηδενικός όρος, ο (δ_j, α_j). Συγκεκριμένα είναι θετικός, αφού η γωνία που σχηματίζουν τα δ_j, α_j είναι οξεία, ενώ όλα τα υπόλοιπα εσωτερικά γινόμενα είναι μηδενικά, επειδή τα αντίστοιχα διανύσματα ανήκουν σε ορθογώνια συμπληρώματα.

Επομένως, βρήκαμε ένα διάνυσμα του E που έχει γνήσια θετικό εσωτερικό γινόμενο με όλα τα διανύσματα του Δ. Άρα η τομή των θετικών ημιχώρων είναι μη κενή.

□

6.2 Ανακλάσεις

Θεωρούμε έναν διανυσματικό χώρο E, πεπερασμένης διάστασης, πάνω από το σώμα των πραγματικών αριθμών. Εφοδιάζουμε τον E με τη θετικά ορισμένη, διγραμμική πράξη του εσωτερικού γινομένου $(\ ,\ )$,

$$(\ ,\ ) : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Για κάθε διάνυσμα α του E, μπορούμε να ορίσουμε τον μετασχηματισμό της ανάκλασης, με υπερεπίπεδο ανάκλασης P_α. Το P_α είναι ο υπόχωρος του E που αποτελείται από τα ορθογώνια διανύσματα του α.

$$\mathrm{P}_\alpha = \{\beta \in \mathrm{E} \mid (\beta, \alpha) = 0\}$$

με

$$\dim(\mathrm{P}_\alpha) = \dim(\mathrm{E}) - 1.$$

Δηλαδή θεωρούμε την απεικόνιση $\sigma_\alpha : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$, όπου $\beta \longmapsto \sigma_\alpha(\beta)$ με τύπο

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \tag{6.1}$$

για κάθε $\beta \in \mathrm{E}$ και αν συμβολίσουμε με $<\,,\,>$ την ποσότητα $2(\beta,\alpha)/(\alpha,\alpha)$, έχουμε

$$\boxed{\sigma_\alpha(\beta) = \beta - <\beta,\alpha>\alpha} \tag{6.2}$$

Προφανώς το $<\,,\,>$ είναι γραμμικό ως προς την πρώτη μεταβλητή, λόγω της γραμμικότητας του εσωτερικού γινομένου. Ενώ για τη δεύτερη μεταβλητή δεν ισχύει κάτι τέτοιο, αφού αλλάζει ο παρανομαστής. Επίσης, από τον τύπο (6.1) βλέπουμε ότι η σ_α, για οποιοδήποτε διάνυσμα α του E, είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός.

Έστω $\sigma_\alpha : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$, η ανάκλαση που ορίζει το στοιχείο α, του διανυσματικού χώρου E πάνω απο το $\mathbb{R}$, με εσωτερικό γινόμενο. Για να δείξουμε ότι η σ_α είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, αρκεί να αποδειχθεί ότι διατηρείται το εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή αν θεωρήσουμε $\beta,\gamma \in \mathrm{E}$ τότε πρέπει να ισχύει:

$$(\beta,\gamma) = (\sigma_\alpha(\beta),\sigma_\alpha(\gamma)) \text{ για κάθε } \beta,\gamma \in \mathrm{E}.$$

Από τον τύπο της ανάκλασης έχουμε:

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - <\beta,\,\alpha>\alpha \text{ και } \sigma_\alpha(\gamma) = \gamma - <\gamma,\,\alpha>\alpha$$

Άρα

$$(\sigma_\alpha(\beta),\sigma_\alpha(\gamma)) =$$
$$(\beta - <\beta,\,\alpha>\alpha, \gamma - <\gamma,\,\alpha>\alpha) =$$
$$(\beta,\gamma) - <\beta,\,\alpha>(\alpha,\gamma) - <\gamma,\,\alpha>(\beta,\alpha) + <\beta,\,\alpha><\gamma,\,\alpha>(\alpha,\alpha) =$$
$$(\beta,\gamma) - 2\cdot\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}(\alpha,\gamma) - 2\cdot\frac{(\gamma,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}(\beta,\alpha) + 2\cdot\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\cdot 2\frac{(\gamma,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}(\alpha,\alpha) = (\beta,\gamma).$$

Η σ_α δρα ταυτοτικά στα σημεία του υπερεπιπέδου P_α. Ας θεωρήσουμε ένα στοιχείο γ του υπερεπιπέδου P_α, τότε το γ ικανοποιεί τη σχέση $(\gamma,\alpha) = 0$. Οπότε αντικαθιστώντας στη (6.1) παίρνουμε $\sigma_\alpha(\gamma) = \gamma$.

Τέλος, δείχνουμε ότι το ορθογώνιο διάνυσμα α στο P_α, απεικονίζεται μέσω της σ_α στο αντίθετό του, $-\alpha$. Πολύ εύκολα στον τύπο (6.1) βάζουμε στη θέση του β το α και αμέσως παίρνουμε $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$.

Λήμμα 6.3 *Έστω* E, *ένας* $\mathbb{R}$*-διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν* α,β *είναι δύο ορθογώνια διανύσματα του* E, *τότε οι ανακλάσεις που ορίζουν αντιμετατίθονται. Δηλαδή ισχύει* $\sigma_\alpha\sigma_\beta(x) = \sigma_\beta\sigma_\alpha(x)$, *για όλα τα* x *στο* E.

Απόδειξη. Υπολογίζουμε τις ποσότητες $\sigma_\alpha\sigma_\beta(x), \sigma_\beta\sigma_\alpha(x)$, για κάποιο τυχαίο $x \in \mathrm{E}$. Για την πρώτη έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha\sigma_\beta(x) &= \sigma_\alpha(x - <x, \beta>\beta) \\
&= x - <x, \alpha>\alpha - <x, \beta>(\beta - <\beta, \alpha>\alpha) \\
&= x - <x, \alpha>\alpha - <x, \beta>\beta.
\end{aligned}$$

Ομοίως για τη δεύτερη έχουμε: $\sigma_\beta\sigma_\alpha(x) = x - <x, \beta>\beta - <x, \alpha>\alpha$. Άρα $\sigma_\alpha\sigma_\beta(x) = \sigma_\beta\sigma_\alpha(x)$ και επειδή η επιλογή του x ήταν τυχαία η ισότητα αληθεύει για κάθε διάνυσμα στο Ε.

□

Λήμμα 6.4 *Έστω Φ ένα πεπερασμένο σύνολο που παράγει το χώρο Ε. Υποθέτουμε ότι όλες οι ανακλάσεις σ_x που ορίζουν τα στοιχεία του Φ αφήνουν το Φ αναλλοίωτο. Αν η $\sigma \in \mathrm{GL(E)}$ αφήνει το Φ αναλλοίωτο, διατηρεί σταθερά τα σημεία κάποιου υπερεπιπέδου Ρ του Ε, και στέλνει κάποιο στοιχείο του Φ, έστω α, στο αρνητικό του, τότε $\sigma = \sigma_\alpha$ (και $\mathrm{P} = \mathrm{P}_\alpha$) .*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $\tau : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}, \tau = \sigma\sigma_\alpha$. Από την υπόθεση έχουμε ότι οι σ, σ_α αφήνουν το σύνολο Φ αναλλοίωτο. Όμως, επειδή το Φ είναι πεπερασμένο έχουμε $\sigma(\Phi) = \sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$.

Επομένως, $\tau(\Phi) = \sigma\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$ και $\tau(\alpha) = \sigma\sigma_\alpha(\alpha) = \alpha$. Αν ℓ είναι η διάσταση του Ε τότε $\mathrm{E} = \mathrm{P} \oplus \mathbb{R}\alpha$, αφού $\dim\mathrm{E} = \dim\mathrm{P} + \dim\mathbb{R}\alpha = \ell$ και $\mathrm{P} \cap \mathbb{R}\alpha = \{0\}$, [3] (§2.3 σελ.32). Διότι η μοναδική περίπτωση που τα Ρ και $\mathbb{R}\alpha$ έχουν μη-μηδενική τομή είναι όταν η ευθεία $\mathbb{R}\alpha$ περιέχεται στο υπερεπίπεδο, αλλά τότε επειδή η σ διατηρεί σταθερά τα σημεία του Ρ περιμένουμε και στο α να δρα ταυτοτικά, κάτι που δεν ισχύει.

Θεωρούμε την επαγόμενη απεικόνιση

$$\tilde{\tau} : \mathrm{E}/\mathbb{R}\alpha \longrightarrow \mathrm{E}/\mathbb{R}\alpha, u + \mathbb{R}\alpha \longmapsto \tau(u) + \mathbb{R}\alpha,$$

για $u \in \mathrm{E}$. Η $\tilde{\tau}$ είναι καλά ορισμένη, αρκεί να δείξουμε ότι δύο διαφορετικά στοιχεία της ίδιας κλάσης ισοδυναμίας απεικονίζονται μέσω της $\tilde{\tau}$ στο ίδιο υποσύνολο του $\mathrm{E}/\mathbb{R}\alpha$. Έστω $v, w \in u + \mathbb{R}\alpha$, τότε $v = u + k\alpha$ και $w = u + l\alpha$ άρα $v - w = (k - l)\alpha \in \mathbb{R}\alpha$, όπου $k, l \in \mathbb{R}$. Για την τ έχουμε ότι δρα ταυτοτικά στο σύνολο $\mathbb{R}\alpha$, αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι είναι γραμμική απεικόνιση και διατηρεί σταθερό το στοιχείο α.

Μένει να δείξουμε ότι το ίδιο ισχύει για τη δράση της $\tilde{\tau}$ στο πηλίκο $\mathrm{E}/\mathbb{R}\alpha$. Δηλαδή ότι ικανοποιείται η ισότητα $\tilde{\tau}(u+\mathbb{R}\alpha) = u+\mathbb{R}\alpha$, ισοδύναμα ότι $\tau(u)-u \in \mathbb{R}\alpha$ ή $\sigma^{-1}(\tau(u) - u) \in \mathbb{R}\alpha$, αφού $\sigma^{-1}(\alpha) = -\alpha$ και έτσι $\sigma^{-1}(\mathbb{R}\alpha) = \mathbb{R}\alpha$.

Επειδή ο χώρος γράφεται ως το ευθύ άθροισμα των Ρ και $\mathbb{R}\alpha$ για το $u \in \mathrm{E}$ υπάρχουν $u' \in \mathrm{P}$ και $m \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $u = u' + m\alpha$. Και επειδή $\sigma(u') = u' - n\alpha$, για κάποιο $n \in Z$, έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(\tau(u)-u) &= \sigma_\alpha(u'+m\alpha)-\sigma^{-1}(u'+m\alpha) \\ &= u'+n\alpha-m\alpha-u'-m\alpha \\ &= n\alpha \end{aligned}$$

το οποίο ανήκει στο $\mathbb{R}\alpha$. Άρα η τ δρα ταυτοτικά σε όλο το χώρο E.

Συνεπώς η μοναδική ιδιοτιμή της τ είναι το 1 με αλγεβρική πολλαπλότητα ίση με τη διάσταση του E. Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμό της είναι το $(T-1)^\ell$ και αφού έχει ως ρίζα την τ διαιρείται από το ελάχιστο πολυώνυμο [4] (§4.1 σελ.26).

Επιπλέον έχουμε ότι το Φ είναι πεπερασμένο σύνολο, δηλαδή υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός r με $r \geq \operatorname{card}\Phi$, έτσι ώστε $\tau^r = 1$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $T^r - 1$ που έχει και αυτό ως ρίζα τον τελεστή τ, άρα διαιρείται από το ελάχιστο πολυώνυμο. Επομένως το ελάχιστο πολυώνυμο θα ανήκει στο σύνολο των διαιρετών του μέγιστου κοινού διαιρέτη των παραπάνω πολυωνύμων.

Όμως μ.κ.δ.$((T-1)^\ell, T^r-1) = T-1$ που είναι πρώτου βαθμού, άρα το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το $T-1$ και αφού η τ μηδενίζει το ελάχιστο πολυώνυμο έχουμε $\tau = 1$. Δηλαδή $\sigma = \sigma_\alpha$, άρα και τα αντίστοιχα υπερεπίπεδα P και P_α ταυτίζονται.

□

Λήμμα 6.5 *Θεωρούμε ένα $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο E, με εσωτερικό γινόμενο. Ονομάζουμε E$'$ έναν υπόχωρό του E και υποθέτουμε ότι η ανάκλαση σ_α που ορίζει το τυχαίο διάνυσμα α αφήνει τον E$'$ αναλλοίωτο. Τότε, είτε $\alpha \in \mathrm{E}'$ είτε $\mathrm{E}' \subseteq \mathrm{P}_\alpha$.*

Απόδειξη. Έστω οι λογικές προτάσεις p, q, με p να είναι: το α είναι στοιχείο του E$'$ και η q: το E$'$ είναι υποσύνολο του P_α. Η διάζευξη των p, q, είναι αληθής όταν τουλάχιστον μία από αυτές είναι αληθής.[5] (Κεφ.4, σελ.50.)

Υποθέτουμε ότι η q είναι ψευδής, δηλαδή υπάρχει κάποιο στοιχείο β του E$'$ που δεν ανήκει στο P_α. Εφαρμόζουμε την ανάκλαση σ_α στο διάνυσμα β και έχουμε $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - <\beta, \alpha> \alpha$. Τότε επειδή για το β ισχύει ότι $(\alpha, \beta) \neq 0$, και $<\beta, \alpha> \neq 0$, άρα το σ_α γράφεται ως

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \ell\alpha,$$

όπου $\ell = <\beta, \alpha> \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Δηλαδή $\alpha = (\,\beta - \sigma_\alpha(\beta)\,)/\ell$.

Όμως από την υπόθεση, η σ_α αφήνει αναλλοίωτο τον E$'$ άρα $\sigma_\alpha(\beta) \in \mathrm{E}'$ και αφού $\beta \in \mathrm{E}'$ από την τελευταία ισότητα το α ανήκει στον E$'$. Επομένως η πρόταση p είναι αληθής, άρα η διάζευξη των p και q είναι αληθής.

□

6.3 Δράση ομάδας

Θεωρούμε μία ομάδα G και ένα σύνολο X. Λέμε ότι η G **δρα** στο σύνολο X, εάν υπάρχει μία απεικόνιση $*$,

$$* : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}, (g, x) \longmapsto g * x = gx = y \in \mathrm{X}$$

με τις εξής ιδότητες:

- $ex = x$, για κάθε x στο X,
- $(g_1 g_2)(x) = g_1(g_2 x)$, για κάθε $x \in \mathrm{X}$ και για κάθε $(g_1, g_2) \in \mathrm{G}^2$,

όπου e είναι το ουδέτερο στοιχείο της G, [6] (Κεφ.II §9).

Δηλαδή είναι ένας «πολλαπλασιασμός» ενός στοιχείου g του G επί ένα στοιχείο x του X με τιμή κάποιο στοιχείο στο X. Για παράδειγμα, εάν X είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και $\mathrm{S_X}$ η ομάδα των μεταθέσεών του, τότε η $\mathrm{S_X}$ δρα στο X. Αφού αν θεωρήσουμε την απεικόνιση

$$\mathrm{S_X} \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}$$

με

$$(\sigma, \alpha) \longmapsto \sigma(\alpha)$$

ικανοποιούνται οι προηγούμενες ιδιότητες, $\mathrm{id}(\alpha) = \alpha$ για κάθε α στο X, και η ισότητα με αυτή τη σειρά των δύο γινομένων.

Παρατήρηση 6.6 *Υποθέτουμε ότι η ομάδα G δρα στο σύνολο X. Τότε εάν*

$$f_g : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} : x \longmapsto g * x = gx,$$

για $g \in \mathrm{G}$, προφανώς η f_g είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση. Άρα σε κάθε στοιχείο g της ομάδας G αντιστοιχεί ένας μετασχηματισμός του συνόλου X.

Μια ειδική περίπτωση είναι όταν η ομάδα G δρα στον εαυτό της, μέσω του μετασχηματισμού που απεικονίζει κάθε στοιχείο h στο συζυγές του μέσω του g,

$$f_g : h \longmapsto ghg^{-1}$$

Τη δράση αυτή την ονομάζουμε **συζυγή** και την αντίστοιχη απεικόνιση τη συμβολίζουμε με $\mathrm{ad}g : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$, $\mathrm{ad} : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$ με $(g, h) \longmapsto ghg^{-1} = (\mathrm{ad}g)h$. Η $\mathrm{ad}g$ ικανοποιεί τις ιδιότητες της δράσης. Έχουμε

$$ehe^{-1} = h$$

και

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(g_1g_2)h &= (g_1g_2)h(g_1g_2)^{-1} \\ &= (g_1g_2)h(g_2^{-1}g_1^{-1}) \\ &= g_1(g_2hg_2^{-1})g_1^{-1} \\ &= \mathrm{ad}g_1(\mathrm{ad}g_2)h \end{aligned}$$

Ορισμός. Υπό τη δράση της ομάδας G ορίζουμε στο X την ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας:
Για όλα τα x_1, x_2 στο X γράφουμε $x_1 \approx x_2$ εάν και μόνον εάν υπάρχει στοιχείο της G τέτοιο ώστε $gx_1 = x_2$.

Οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας είναι οι τροχιές στο X. Οπότε εάν το x είναι ένα στοιχείο του X, η **τροχιά** του, [6] (Κεφ.II §9), είναι το σύνολο

$$\boxed{\mathrm{G}x = \{gx \,|\, g \in \mathrm{G}\}}$$

Τέλος δίνουμε κάποιους ορισμούς που αφορούν τη δράση μίας μεταθετικής ομάδας.

Ορισμός. Όπως αναφέραμε προηγουμένως η ομάδα των μεταθέσεων ενός συνόλου X δρα στο σύνολο αυτό,

$$\mathrm{S_X} \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}, \quad (\sigma, \alpha) \longmapsto \sigma(\alpha)$$

Όταν για διαφορετικά α_1, α_2 υπάρχει σ έτσι ώστε:

$$\sigma(\alpha_1) = \alpha_2$$

τότε λέμε ότι η ομάδα δρα **μεταβατικά** στο X, [7] (Κεφ.3 σελ.50).
Όταν η σ είναι μοναδική η παραπάνω δράση ονομάζεται **απλά μεταβατική**, [8] (Κεφ.3 §3).

Βιβλιογραφία

[1] W. Fulton και J. Harris: Representation Theory: a first course, Springer−Verlag, New York • Berlin • Heidelberg • London • Paris • Tokyo • Hong Kong • Barcelona • Budapest, 1991.

[2] G. Strang: Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές
Απόδοση στα ελληνικά: Π.Πάμφιλος
Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 5η έκδοση, Ηράκλειο 2001.

[3] Γ. Ακρίβης: Γραμμική Άλγεβρα, (πανεπιστημιακές παραδόσεις) Ιωάννινα 2003.

[4] Γ. Συλλιγάρδος: Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ, 2005 (σημειώσεις).

[5] Χ. Κουρουνιώτης: Θεμέλια των Μαθηματικών, 2002−2003 (σημειώσεις).

[6] Κ.Λάκκης: Άλγεβρα, εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

[7] J.J.Rotman: The theory of groups. An Introduction. Boston 1965 (σημειώσεις).

[8] M. Suzuki: Group Theory I,
Springer−Verlag, Berlin • Heidelberg • New York, 1982.

[9] J. Humphreys: Introduction to Lie Algebras and Representation Theory,
Second Printing, Springer−Verlag, New York • Heidelberg • Berlin, 1972.

Μερικά από τα σχήματα είναι από τις ακόλουθες σελίδες του διαδυκτίου:

- http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Root-system-A1 × A1.png
- http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Root-system-A2-v1.png
- http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Root-system-B2.png

- http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Root-system-G2.png
- http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Weyl-chambers.png

Η εργασία αυτή είναι βασισμένη στο βιβλίο του James E.Humphreys:

Introduction to Lie Algebras and Representation Theory,
Second Printing, Springer−Verlag, New York • Heidelberg • Berlin, 1972