1. Γραμμικοί τελεστές σέ χώρους μέ ἐσωτερικό γινόμενο

Σ' αὐτό τό κεφάλαιο θεωροῦμε διανυσματικούς χώρους ἐπί τοῦ σώματος K, ὅπου $K = \mathbb{R}$ ἤ $\mathbb{C}$, πεπερασμένης διαστάσεως.

Συζυγεῖς τελεστές. Ἔστω V ἕνας διανυσματικός χῶρος μέ ἐσωτερικό γινόμενο καί T ἕνας γραμμικός τελεστής ἐπί τοῦ V (γραμμική ἀπεικόνιση $T: V \longrightarrow V$)

Πρόταση (F. Riesz) Ὑπάρχει ἕνας γραμμικός τελεστής T^* ἐπί τοῦ V, τέτοιος ὥστε (1.1)

$$(Tx, y) = (x, T^* y) \quad \forall\, x, y \in V. \tag{1.2}$$

Ὁ T^* εἶναι μονοσήμαντα ὁρισμένος.

Ἀπόδειξη. Ὁρίζω τόν T^* ὡς ἑξῆς: Ἀρχικά ἐπιλέγω μιά ὀρθοκανονική βάση $e_1, \ldots, e_n$ τοῦ V. Θέτω

$$T^* y = \sum_{i=1}^{n} \overline{(Te_i, y)}\cdot e_i, \quad \forall\, y \in V$$

Εὔκολα διαπιστώνει κανείς ὅτι ἡ $T^*: V \longrightarrow V$ εἶναι γραμμική. Ἐπίσης

$$(Tx, y) = \left(T\left(\sum_{i=1}^{n}(x, e_i)\cdot e_i\right), y\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x, e_i)\cdot Te_i, y\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x, e_i)\cdot(Te_i, y) = \sum_{i=1}^{n}(Te_i, y)\cdot(x, e_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(x, \overline{(Te_i, y)}e_i\right) = \left(x, \sum_{i=1}^{n}\overline{(Te_i, y)}e_i\right) =$$

$$= (x, T^* y),$$

ἄρα ἰσχύει ἡ (1.2).

Μοναδικότητα τοῦ T^*: Ἔστω ὅτι γιά τό γραμμικό τελεστή T' ἴσχυε ἡ (1.2), μέ τόν T' στή θέση τοῦ T^*. Ἀρκεῖ νά δείξω ὅτι γιά τό τυχόν στοιχεῖο e_j τῆς βάσης ἰσχύει

$$T^* e_j = T' e_j.$$

Θέτοντας

$T'(e_j) = \lambda_{j1} e_1 + \cdots + \lambda_{jn} e_n$, $T^*(e_j) = \mu_{j1} e_1 + \cdots + \mu_{jn} e_n$,

ἀρκεῖ πάλι νά δείξω ὅτι $\lambda_{ji} = \mu_{ji}$ $\forall i = 1, \dots, n$.

Ὅμως $(e_i, T'e_j) = (e_i, \lambda_{j1} e_1 + \cdots + \lambda_{jn} e_n) =$

$= \overline{\lambda_{j1}} (e_i, e_1) + \cdots + \overline{\lambda_{jn}} (e_i, e_n) = \overline{\lambda_{ji}}$, λόγω τῆς

ὀρθοκανονικότητας τῆς βάσης. Ἐξ ὑποθέσεως,
$(e_i, T'e_j) = (Te_i, e_j)$, ὁπότε

$$\lambda_{ji} = \overline{(Te_i, e_j)}$$

Ἐντελῶς ἀνάλογα προκύπτει ὅτι $\mu_{ji} = \overline{(Te_i, e_j)}$, ὁπότε

$\lambda_{ji} = \mu_{ji}$ καί ἡ ἀπόδειξη εἶναι πλήρης. □

<u>Ὁρισμός</u> Δοθέντος τοῦ τελεστή T, ὁ μονοσήμαντα ὁρισμένος τελεστής T^* πού ἱκανοποιεῖ τήν (1.2) λέγεται συζυγής τελεστής τοῦ T. (1.3)

<u>Πρόταση</u>. Ἔστω $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ μιά ὀρθοκανονική βάση τοῦ V καί T ἕνας γραμμικός τελεστής ἐπί τοῦ V, τοῦ ὁποίου ὁ πίνακας ὡς πρός $\mathcal{E}$ ἔστω A. Ἄν μέ A^* συμβολίσομε τόν πίνακα τοῦ T^* ὡς πρός $\mathcal{E}$, τότε (1.4)

$$A^* = (\overline{A})^t = (\overline{A^t})$$

(Γενικά, γιά ἕνα πίνακα M μέ στοιχεῖα ἀπ' τό K, ὁ $\overline{M}$ εἶναι ὁ πίνακας τοῦ ὁποίου τό (i,j)-στοιχεῖο ἰσοῦται μέ τό μιγαδικό συζυγές τοῦ (i,j)-στοιχείου τοῦ M).

Ἀπόδειξη. Τό (j,i)-στοιχεῖο τοῦ A εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, ὁ συντελεστής τοῦ e_j στό δεξιό μέλος τῆς σχέσης

$$Te_i = c_{1i}e_1 + \cdots + c_{ji}e_j + \cdots + c_{ni}e_n$$

Συνεπώς,

$$c_{ji} = (Te_i\,, e_j).$$

Εντελώς ανάλογα, άν

$$T^*e_j = d_{1j}e_1 + \cdots + d_{ij}e_i + \cdots + d_{nj}e_n\,,$$

τότε

$$d_{ij} = (T^*e_j\,, e_i)$$

είναι τό (i,j)-στοιχείο τοῦ πίνακα A^*. Ὁ ἰσχυρισμός είναι ότι

$$d_{ij} = \overline{c_{ji}}.$$

Πράγματι,

$$\overline{c_{ji}} = \overline{(Te_i, e_j)} = \overline{(e_i, T^*e_j)} = (T^*e_j\,, e_i) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} d_{kj}e_k\,,\ e_i\right) = \sum_{k=1}^{n} d_{kj}(e_k, e_i) =$$

$$= d_{ij}$$

□

*<u>Ορισμός</u> Ὁ τελεστής T λέγεται <u>κανονικός</u> άν (1.5)

$$TT^* = T^*T\,,$$

<u>αὐτοσυζυγής</u> (ἤ Ἑρμιτιανός · Hermitian) άν

$$T^* = T$$

καί <u>ἀντισυζυγής</u> (ἤ unitary) άν

$$TT^* = T^*T = I \quad (\delta\eta\lambda.\ T^* = T^{-1}).$$

Στήν περίπτωση πραγματικῶν διανυσματικῶν χώρων ($K = \mathbb{R}$), ἀντί τῶν ὅρων αὐτοσυζυγής καί ἀντισυζυγής, χρησιμοποιοῦμε τούς ὅρους <u>συμμετρικός</u> καί <u>ὀρθογώνιος</u>, ἀντιστοίχως.

<u>Πρόταση.</u> Ὁ $\lambda \in \mathbb{C}$ εἶναι ἰδιοτιμή τοῦ τελεστή T ἄν (1.6)
καί μόνο ἄν ὁ $\bar{\lambda}$ εἶναι ἰδιοτιμή τοῦ T^*. Ἄν ὁ T
εἶναι κανονικός τότε τά ἰδιοδιανύσματα τοῦ T, πού
ἀντιστοιχοῦν στήν ἰδιοτιμή λ ταυτίζονται μέ τά
ἰδιοδιανύσματα τοῦ T^*, πού ἀντιστοιχοῦν στήν ἰδιοτιμή $\bar{\lambda}$.

<u>Ἀπόδειξη.</u> Ἔστω $\mathcal{E}$ μιά ὀρθοκανονική βάση τοῦ χώρου, ὡς πρός τήν ὁποία οἱ T, T^* ἔχουν πίνακες A, A^*, ἀντιστοίχως. Ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι

$$\det(A-\lambda I)=0,$$

καί θά δείξομε ὅτι

$$\det(A^*-\bar{\lambda} I)=0.$$

Λόγῳ τῆς πρότασης (1.4) θά εἶναι

$$\det(A^*-\bar{\lambda}I) = \det((\bar{A})^t-\bar{\lambda}I) = \det(\bar{A}-\bar{\lambda}I)^t =$$

$$= \det(\bar{A}-\bar{\lambda}I) = (\text{ἄσκηση } 2)\ \det(\overline{A-\lambda I})$$

$$= (\text{ἄσκηση } 2)\ \overline{\det(A-\lambda I)} = 0,$$

καί ἀποδείχτηκε ὅτι

$$\lambda \text{ ἰδιοτιμή τοῦ } T \Rightarrow \bar{\lambda} \text{ ἰδιοτιμή τοῦ } T^*. \quad (1.7)$$

Ἀντίστροφα, ἄν $\bar{\lambda}$ εἶναι ἰδιοτιμή τοῦ T^* γιά κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε, ἀπ' τήν (1.7) ὁ $\bar{\bar{\lambda}}=\lambda$ εἶναι ἰδιοτιμή τοῦ $(T^*)^* = (\text{ἄσκηση } 1)\ T$.

Ἔστω, στή συνέχεια, ὅτι ὁ T εἶναι κανονικός καί λ εἶναι μιά ἰδιοτιμή του. Τότε

$$Tx = \lambda x$$

Θά δείξομε ὅτι

$$T^*x = \bar{\lambda}x.$$

Πράγματι,

$$\|T^*x-\bar{\lambda}x\|^2 = (T^*x-\bar{\lambda}x,\ T^*x-\bar{\lambda}x) =$$

$$= (T^*x, T^*x) - \bar{\lambda}(x, T^*x) - \lambda(T^*x, x) + (\bar{\lambda}x, \bar{\lambda}x) =$$

$$= (TT^*x, x) - \bar{\lambda}(Tx, x) - \lambda(x, Tx) + |\lambda|^2(x,x).$$

Ὅμως $(TT^*x, x) = (T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = (\lambda x, \lambda x)$

Κατά συνέπεια,

$$\|T^*x - \bar{\lambda}x\|^2 = |\lambda|^2\|x\|^2 - \bar{\lambda}(\lambda x, x) - \lambda(x, \lambda x) + |\lambda|^2\|x\|^2 = 0,$$

ἀφοῦ $\bar{\lambda}(\lambda x, x) = |\lambda|^2\|x\|^2 = \lambda(x, \lambda x)$.

Ἀλλά τώρα $T^*x - \bar{\lambda}x = 0$. Ἀπ' αὐτό καί τό γεγονός ὅτι $(T^*)^* = T$ (ἄσκηση 1), ἕπεται καί τό ἀντίστροφο, ὅτι δηλ. κάθε ἰδιοδιάνυσμα τοῦ T^*, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή $\bar{\lambda}$, εἶναι ἰδιοδιάνυσμα τοῦ T, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή λ.

□

Ἔστω n ἡ διάσταση τοῦ διανυσματικοῦ χώρου V καί T ἕνας κανονικός τελεστής ἐπί τοῦ V. Συμβολίζομε μέ $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ὅλες τίς διαφορετικές ἀνά δύο ἰδιοτιμές τοῦ T, ὁπότε $m \leq n$. Ἰσχύει $m = n$ ἄν ὅλες οἱ ἰδιοτιμές τοῦ T εἶναι διαφορετικές. Συμβολίζομε ἐπίσης μέ E_i $(1 \leq i \leq m)$ τόν ἰδιοχῶρο πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή λ_i. Στά παρακάτω ἰσχύουν αὐτές οἱ ὑποθέσεις.

<u>Πρόταση</u> Ἄν $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, m\}$ τότε οἱ ὑπόχωροι E_i καί E_j εἶναι ὀρθογώνιοι, δηλ. γιά κάθε $x \in E_i$ καί γιά κάθε $y \in E_j$ ἰσχύει $(x, y) = 0$. (1.8)

Ἀπόδειξη.

$$\lambda_i(x,y) = (\lambda_i x, y) = (Tx, y) = (x, T^*y) =$$
$$= (\text{πρόταση } 1.6)\ (x, \bar{\lambda}_j y) =$$
$$= \lambda_j(x,y).$$

Ἄρα $(\lambda_i - \lambda_j)(x,y) = 0$, ἐνῶ ἐξ ὑποθέσεως $\lambda_i \neq \lambda_j$, ἀπ' ὅπου τό ἀποδεικτέο.

□

Ὑπενθυμίζομε ὅτι ὁ V λέμε πώς εἶναι <u>εὐθύ ἄθροισμα</u> τῶν ὑποχώρων του V_1, V_2 καί συμβολίζομε αὐτό τό γεγονός μέ $V = V_1 \oplus V_2$, ἄν κάθε $x \in V$ γράφεται μέ ἕνα καί <u>μοναδικό</u> τρόπο ὡς $x = x_1 + x_2$, ὅπου $x_1 \in V_1$ καί $x_2 \in V_2$. Ἀνάλογα ὁρίζεται ἡ σχέση $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$ (ἰδές καί ἄσκηση 8).

<u>Θεωροῦμε σ' ὅλα τά παρακάτω ὅτι οἱ ὑποθέσεις καί οἱ συμβολισμοί πρίν ἀπ' τήν πρόταση 1.8 ἐξακολουθοῦν νά ἰσχύουν.</u>

<u>Θεώρημα.</u> $V = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$ (1.9)

Ἀπόδειξη. Πρῶτα θ' ἀποδείξομε ὅτι γιά κάθε $x \in V$ ὑπάρχουν $x_i \in E_i$, $i=1,\dots,m$ εἰς τρόπον ὥστε

$$x = x_1 + \dots + x_m .$$

Πρός τοῦτο ἀρκεῖ νά δείξομε ὅτι ἄν $\mathcal{E}_i$ εἶναι μιά ὀρθοκανονική βάση τοῦ E_i $(i=1,\dots,m)$, τότε $\mathcal{E}_1 \cup \dots \cup \mathcal{E}_m$ εἶναι μιά βάση τοῦ V.
Ἔστω λοιπόν $\mathcal{E}_1 \cup \dots \cup \mathcal{E}_m = \{e_1,\dots,e_\rho\}$. Εἶναι φανερό ἀπ' τήν πρόταση 1.8 ὅτι τά $e_1,\dots,e_\rho$ εἶναι ἀνεξάρτητα, συνεπῶς $\rho \le n$. Ἄν $\rho = n$, τότε ἀποτελοῦν βάση τοῦ V, μιά καί ἡ διάσταση τοῦ V εἶναι n. Ἄν $\rho < n$ τότε ὁδηγούμαστε σέ ἄτοπο ὡς ἑξῆς:
Συμπληρώνομε τά $e_1,\dots,e_\rho$ μέ κάποια $e_{\rho+1},\dots,e_n$ οὕτως ὥστε τά $e_1,\dots,e_\rho,\dots,e_n$ ν' ἀποτελοῦν ὀρθοκανονική βάση τοῦ V. Ἔστω E ὁ ὑπόχωρος τοῦ V, πού παράγεται ἀπ' τά $e_{\rho+1},\dots,e_n$. Παρατηρῶ πρῶτα ὅτι

$$x \in E \Rightarrow Tx \in E \qquad (1.10)$$

Πράγματι, ἄν $Tx \notin E$ τότε $Tx = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$, $c_i \in K$ καί ἕνας τοὐλάχιστον συντελεστής c_i μέ $i \le \rho$, στό δεξιό μέλος, εἶναι $\neq 0$. Ἄν ὅμως $c_i \neq 0$, τότε $(Tx, e_i) = c_i \neq 0$, ἄρα καί $(x, T^* e_i) = (Tx, e_i) \neq 0$. Ἀπ' τήν ἄλλη μεριά, τό e_i ἀνήκει σέ κάποιον ἀπ' τούς ἰδιοχώρους $E_1,\dots,E_m$, ἄρα εἶναι ἰδιοδιάνυσμα τοῦ T:

$$Te_i = \lambda e_i \quad , \lambda \in \{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}.$$

Ἀπ' τήν πρόταση 1.6 τότε

$$T^* e_i = \bar{\lambda} e_i ,$$

ἄρα $(x, T^* e_i) = (x, \bar{\lambda} e_i) = \lambda (x, e_i) = 0$, ἀφοῦ $x \in E$ καί ἡ βάση τοῦ E ἔχει τά διανύσματά της ὀρθογώνια πρός τά $e_1,\dots,e_\rho$. Αὐτή ἡ ἀντίφαση ἀποδεικνύει τήν (1.10).

Λόγω της (1.10) ο T μπορεί να θεωρηθεί ως τελεστής επί του E και, συνεπώς, θα έχει μια ιδιοτιμή λ. → (πρέπει να είναι $K=\mathbb{C}$;)
Δηλαδή, για κάποιο $x\in E$, $x\neq 0$ θα ισχύει

$$Tx=\lambda x \tag{1.11}$$

Αυτό σημαίνει ότι, μια και οι $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ είναι όλες οι ιδιοτιμές του T, $\lambda=\lambda_i$ για κάποιο $i\in\{1,\dots,m\}$. Τότε όμως το x ανήκει, λόγω της (1.11), στον ιδιοχώρο του λ_i, δηλ. στον E_i. Έτσι $x\in E_i\cap E$. Επειδή οι υπόχωροι E_i και E είναι ορθογώνιοι, το μόνο κοινό τους διάνυσμα είναι το 0, κι αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεσή μας ότι $x\neq 0$.

Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε $x\in V$, υπάρχουν $x_1,\dots,x_m$ που ανήκουν στους υποχώρους $E_1,\dots,E_m$, αντιστοίχως, έτσι ώστε $x=x_1+\dots+x_m$. Για να δείξομε τη μοναδικότητα των $x_1,\dots,x_m$, που αντιστοιχούν σ' ένα συγκεκριμένο x, αρκεί να δείξομε τη μοναδικότητα των $x_1,\dots,x_m$, που αντιστοιχούν στο 0. Πράγματι, αν $x_1+\dots+x_m=0$ και $x_i\in E_i$, $i=1,\dots,m$, τότε, μια και οι $E_1,\dots,E_m$ είναι ανά δύο ορθογώνιοι θα έχομε για το τυχόν $i\in\{1,\dots,m\}$:

$$\begin{aligned}0=(x_i,0)&=(x_i,x_1+\dots+x_m)=\\&=(x_i,x_1)+\dots+(x_i,x_i)+\dots+(x_i,x_m)=\\&=\|x_i\|^2,\end{aligned}$$

από όπου $x_i=0$.

□

<u>Πόρισμα</u> $(E_i:K)=$ πολλαπλότητα της ρίζας λ_i του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του T $\forall\, i=1,\dots,m$. (1.12)

<u>Απόδειξη.</u> Λόγω του θεωρήματος 1.9 και της άσκησης 4 είναι

$$n=(V:K)=\sum_{i=1}^{m}(E_i:K). \tag{1.13}$$

Έστω, για απλοποίηση της διατύπωσης, r_i η πολλαπληθύτητα τῆς ρίζας λ_i τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου τοῦ T. Ἀπ' τό θεώρημα 6.9, σελ. 161 στό βιβλίο τοῦ Morris, εἶναι $(E_i : K) \leq r_i$, τό ὁποῖο, σέ συνδυασμό μέ τήν (1.13) συνεπάγεται (ἄς ληφθεῖ ὑπ' ὄψη ὅτι $r_1+\dots+r_m =$ βαθμός τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου τοῦ $T = n$)

$$n = (E_1 : K)+\dots+(E_i : K)+\dots+(E_m : K) \leq r_1+\dots+r_i+\dots+r_m = n$$

ὁπότε ἄν ἔστω καί μιά ἕνα i εἴχαμε $(E_i : K) < r_i$, ἡ ἀνισότητα στό δεξιό μέλος θά ἦταν γνήσια καί θά ὁδηγούμαστε σέ ἄτοπο. Συνεπῶς $(E_i : K) = r_i$. □

<u>Ὁρισμός</u> Ἔστω $x \in V$ καί $x = x_1+\dots+x_m$, ὅπου $x_i \in E_i$, $i=1,\dots,m$, ὅπως μᾶς ἐξασφαλίζει τό θεώρημα 1.9. Γιά κάθε $i \in \{1,\dots,m\}$ ὁρίζομε τήν ἀπεικόνιση (1.14)

$$P_i : V \longrightarrow E_i \quad \text{μέ} \quad P_i x = x_i$$

Αὐτή ἡ ἀπεικόνιση εἶναι ἕνα γραμμικός τελεστής ἐπί τοῦ V (προφανές), ἡ ὁποία λέγεται <u>προβολή τοῦ V ἐπί τοῦ E_i</u>.

<u>Φασματικό θεώρημα</u> $T = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_m P_m$ (1.15)

(βλ. σελ. 10α γιά τό ἀντίστροφο).

Ἀπόδειξη. Ἔστω $x \in V$ καί $x = x_1+\dots+x_m$ ὅπως στό (1.14). Τότε $Tx_i = \lambda_i x_i$, ἀφοῦ $x_i \in E_i$ καί E_i εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, ὁ ἰδιοχῶρος πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή λ_i τοῦ T. Συνεπῶς

$$Tx = T(x_1+\dots+x_m) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m =$$
$$= \lambda_1 P_1 x + \dots + \lambda_m P_m x = (\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_m P_m) x.$$

□

<u>Θεώρημα</u> Ἄν ὁ T εἶναι κανονικός τελεστής, τότε ὑπάρχει ὀρθοκανονική βάση τοῦ V ἀποτελούμενη ἀπό ἰδιοδιανύσματα τοῦ T. (1.16)

Ἀπόδειξη. Ἄν $\mathcal{E}_i$ εἶναι μιά ὀρθοκανονική βάση τοῦ E_i, $i=1,\dots,m$, τότε τό θεώρημα 1.9 καί ἡ ἄσκηση 4 ἀποδεικνύουν ὅτι τό σύνολο $\mathcal{E}_1 \cup \dots \cup \mathcal{E}_m$ εἶναι μιά ὀρθοκανονική βάση τοῦ V. Ἐξ ὁρισμοῦ δέ, τά διανύσματα τῆς βάσης αὐτῆς ἀνήκουν στά $E_1,\dots,E_m$, ἄρα εἶναι ἰδιοδιανύσματα τοῦ T.

$\square$

Σημείωση. Ἡ παραπάνω ἀπόδειξη εἶναι καί μέθοδος κατασκευῆς τῆς βάσης τοῦ V. (1.17)
Γιά κάθε λ_i βρίσκουμε τόσα ἀνεξάρτητα ἰδιοδιανύσματα τοῦ T, πού ἀντιστοιχοῦν στήν ἰδιοτιμή λ_i, ὅσα δείχνει ἡ πολλαπλότητα τῆς ρίζας λ_i τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου τοῦ T καί αὐτά τά διανύσματα συνιστοῦν μιά βάση $\mathcal{E}_i$ τοῦ ὑποχώρου E_i (πρβλ. μέ (1.12)). Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Gram-Schmidt ὀρθοκανονικοποιοῦμε τήν $\mathcal{E}_i$ παίρνοντας μιά βάση $\mathcal{E}_i$ καί ἀφοῦ τό κάνουμε αὐτό γιά κάθε $i=1,\dots,m$ συνενώνουμε τίς βάσεις $\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_m$ καί παίρνουμε μιά βάση $\mathcal{E}=\{e_1,\dots,e_n\}$ ὅπως στό θεώρημα 1.16.

Θεώρημα. Ἔστω T κανονικός τελεστής καί $\mathcal{E}$ ἡ βάση (1.18) τήν ὕπαρξη τῆς ὁποίας ἐξασφαλίζει τό θεώρημα 1.16. Τότε ὁ πίνακας τοῦ T ὡς πρός τήν $\mathcal{E}$ εἶναι διαγώνιος καί τά διαγώνια στοιχεῖα εἶναι τά $\lambda_1,\dots,\lambda_m$, καθένα ἐμφανιζόμενο τόσες φορές ὅσες δείχνει ἡ πολλαπλότητά του, ὡς ρίζας τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου τοῦ T θεωρουμένου.
Σημείωση. Τό θεώρημα δέν κάνει λόγο για τη διάταξη μέ τήν ὁποία ἐμφανίζονται οἱ διάφορες ἰδιοτιμές ὡς διαγώνια στοιχεῖα τοῦ πίνακα.
Ἀπόδειξη. Ἔστω $\mathcal{E}=\{e_1,\dots,e_n\}$ καί (c_{ij}) ὁ πίνακας τοῦ T ὡς πρός $\mathcal{E}$. Ἐξ ὁρισμοῦ

$$Te_j = c_{1j}e_1+\dots+c_{ij}e_i+\dots+c_{nj}e_n$$

ἄρα $c_{ij} = (Te_j, e_i) = (\lambda e_j, e_i) = \lambda(e_j, e_i) = \begin{cases} \lambda & \text{ἄν } j=i \\ 0 & \text{ἄν } j\neq i \end{cases}$ (1.19)

ὅπου ἐννοεῖται ὅτι $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. Αὐτό δείχνει ὅτι ὁ πίνακας εἶναι διαγώνιος καί τά διαγώνια στοιχεῖα του ἀνήκουν στό $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$.

Τώρα, ὅσον ἀφορᾶ στήν πολλαπλότητα μέ τήν ὁποία ἐμφανίζεται τό λ_i ὡς διαγώνιο στοιχεῖο τοῦ πίνακα: Ἔστω r_i ἡ πολλαπλότητα τῆς ρίζας λ_i τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου τοῦ T. Τότε (πόρισμα 1.12), $(E_i : k) = r_i$, δηλαδή ἀκριβῶς r_i τό πλῆθος διανύσματα τῆς βάσης $\mathcal{E}$ ἀνήκουν στόν ὑπόχωρο E_i· ἄς εἶναι αὐτά $e_{j_1}, \dots, e_{j_{r_i}}$.

Δηλ. $Te_j = \lambda_i e_j \quad \forall j \in \{j_1, \dots, j_{r_i}\}$,

ἐνῶ γιά κάθε $j \notin \{j_1, \dots, j_{r_i}\}$ εἶναι $e_j \notin E_i$ καί, συνεπῶς, $Te_j = \lambda e_j$ μέ $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, $\lambda \neq \lambda_i$.

Αὐτές οἱ παρατηρήσεις, σέ συνδυασμό μέ τήν (1.19) δείχνουν ὅτι

$$c_{jj} = \lambda_i \quad \forall j \in \{j_1, \dots, j_{r_i}\}$$

$$c_{jj} \neq \lambda_i \quad \forall j \notin \{j_1, \dots, j_{r_i}\},$$

καί αὐτό ἦταν πού ἔπρεπε ν' ἀποδείξομε. □

Μιά ἐνδιαφέρουσα ἐφαρμογή τοῦ θεωρήματος 1.18 βλέπει κανείς στήν ἄσκηση 6.

* Ἀντίστροφο τοῦ φασματικοῦ θεωρήματος: Ἔστω T τελεστής ἐπί τοῦ V, $V = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$ $(E_j \neq \{0\}\ \forall j=1,\dots,m)$, καί $T = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_m P_m$ ὅπου $P_j : V \longrightarrow E_j$ εἶναι ὁ τελεστής προβολῆς καί $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ εἶναι διαφορετικά. Τότε ὅλες οἱ διαφορετικές ἰδιοτιμές τοῦ T εἶναι οἱ $\lambda_1,\dots,\lambda_m$, ὁ ἰδιόχωρος τοῦ T, πού ἀντιστοιχεῖ στή λ_j εἶναι E_j καί ἡ πολλαπλότητα τῆς λ_j, ὡς ρίζας τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου τοῦ T θεωρουμένης, εἶναι $\dim(E_j)$.

Ἀπόδειξη: Ἔστω $x_j \in E_j$. Τότε $P_i x_j = 0$ $\forall i \neq j$, ἄρα $Tx_j = \lambda_j x_j$, πού δείχνει ὅτι ὁ E_j περιέχεται στόν ἰδιόχωρο τοῦ T, πού ἀντιστοιχεῖ στή λ_j. Ἀντίστροφα, ἔστω $x \in V$ μέ $Tx = \lambda_j x$. Ἄν $P_i x = x_i$, $i=1,\dots,m$ τότε $\lambda_j x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$, ἄρα $\sum_{i\neq j} (\lambda_i - \lambda_j) x_i = 0$.

Ἐπειδή $x_i \in E_i$ καί $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ $(i \neq j)$ θά πρέπει $x_i = 0$ γιά $i \neq j$, ἄρα $x = x_j \in E_j$. Συνεπῶς E_j εἶναι ὁ ἰδιόχωρος τοῦ T, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή λ_j καί τώρα, ἀπ' τό πόρισμα 1.12, ἡ πολλαπλότητα τῆς ρίζας λ_j τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου τοῦ T, ἰσοῦται μέ $\dim(E_j)$. Μένει νά δείξομε ὅτι κάθε ἰδιοτιμή λ τοῦ T ἰσοῦται μέ κάποια λ_j. Πράγματι, ἄν $P_i x = x_i$ $(x \neq 0)$ τότε $\lambda(x_1 + \cdots + x_m) = \lambda x = Tx = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$, ἄρα $\sum_j (\lambda - \lambda_j) x_j = 0$, ἀπ' ὅπου $(\lambda - \lambda_j) x_j = 0$ $\forall j = 1,\dots,m$.

Ἐπειδή ὑπάρχει κάποιο j μέ $x_j \neq 0$, θά πρέπει γι' αὐτό τό j νά ἰσχύει $\lambda = \lambda_j$. □

Ἀσκήσεις τοῦ Κεφαλαίου 1.

1. Γιὰ ἕνα τελεστὴ T δεῖξτε ὅτι $(T^*)^* = T$

2. Γιὰ δυὸ πίνακες A, B τῆς ἴδιας διάστασης, μὲ συντελεστὲς ἀπ' τὸ $K (= \mathbb{R}$ ἢ $\mathbb{C})$ δεῖξτε ὅτι $\overline{A}+\overline{B} = \overline{(A+B)}$. Ἂν ὁ A εἶναι τετραγωνικός, τότε $\det(\overline{A}) = \det(A)$;

3. Κάθε αὐτοσυζυγὴς τελεστὴς ἔχει ὅλες τὶς ἰδιοτιμὲς του πραγματικές, ἐνῶ ὅλες οἱ ἰδιοτιμὲς ἑνὸς ἀντισυζυγοῦς τελεστὴ ἔχουν μέτρο 1.

4. Ἂν $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ μὲ τοὺς ὑποχώρους $V_1, \dots, V_m$ ἀνὰ δύο ὀρθογώνιους καὶ $\mathcal{E}_i$ εἶναι ὀρθοκανονικὴ βάση τοῦ V_i, $i = 1, \dots, m$, τότε ἡ $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \dots \cup \mathcal{E}_m$ εἶναι ὀρθοκανονικὴ βάση τοῦ V.

5. Ἔστω ὅτι $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ καὶ $\mathcal{E}^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ εἶναι δύο ὀρθοκανονικὲς βάσεις τοῦ V καὶ $e_i = p_{1i}e_1^* + \dots + p_{ni}e_n^*$, $i = 1, \dots, n$. Ἂν P εἶναι ὁ πίνακας τοῦ ὁποίου ἡ i-οστὴ στήλη $(i = 1, \dots, n)$ ἔχει τὰ στοιχεῖα $p_{1i}, \dots, p_{ni}$, δεῖξτε ὅτι ὁ P εἶναι ἀντισυζυγής, δηλ. $PP^* = P^*P = I_n$, ὅπου $P^* = (\overline{P})^t$.

6. Ἔστω H ἕνας $n \times n$ (μιγαδικός) ἑρμιτιανὸς πίνακας, δηλ. πίνακας γιὰ τὸν ὁποῖο $H^* = H$, ὅπου $H^* = (\overline{H})^t$.
   α) Δεῖξτε ὅτι ὅλες οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ H εἶναι πραγματικές.
   β) Δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει ἀντισυζυγὴς πίνακας P, τέτοιος ὥστε ὁ πίνακας $P^{-1}HP = (\overline{P})^t HP$ εἶναι πραγματικός, διαγώνιος τοῦ ὁποίου τὰ διαγώνια στοιχεῖα εἶναι οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ H, καθεμιὰ ἐπαναλαμβανόμενη τόσες φορὲς ὅσες καὶ ἡ πολλαπλότητά της, ἂν θεωρηθεῖ ὡς ρίζα τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου τοῦ H.

7. (α) Δεῖξτε ὅτι οἱ ἰδιοτιμὲς ἑνὸς διαγωνίου πίνακα εἶναι τὰ διαγώνια στοιχεῖα του.
   (β) Ἔστω D διαγώνιος $n \times n$ πίνακας. Δεῖξτε ὅτι γιὰ $1 \le i, j \le n$, ὑπάρχει στοιχειώδης πίνακας P μὲ $P = P^{-1}$, τέτοιος ὥστε ὁ πίνακας PDP νὰ εἶναι ὁ διαγώνιος πίνακας ποὺ προκύπτει ἀπ' τὸν D μὲ ἐναλλαγὴ τοῦ i-οστοῦ καὶ j-οστοῦ στοιχείου τῆς κυρίας διαγωνίου.
   (γ) Δεῖξτε ὅτι δύο διαγώνιοι πίνακες τῆς ἴδιας διάστασης εἶναι ὅμοιοι, ἂν καὶ μόνο ἂν διαφέρουν κατὰ τὴ διάταξη τῶν διαγωνίων στοιχείων τους.

8. α) Ἔστω V διανυσματικός χῶρος καί U, W ὑπόχωροι τοῦ V. Δείξτε ὅτι $V = U \oplus W$ ἄν καί μόνο ἄν $V = U + W$ καί οἱ U, W εἶναι ξένοι ὑπόχωροι (δηλ. $U \cap W = \{0\}$).

β) Ἄν $V_1, \ldots, V_m$ εἶναι ὑπόχωροι τοῦ V, δείξτε ὅτι ὁ χῶρος $\langle V_1, \ldots, V_m \rangle$, τόν ὁποῖο παράγουν εἶναι ὁ $V_1 + \cdots + V_m$.

γ) Δείξτε ὅτι $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, ἄν καί μόνο ἄν $V = V_1 + \cdots + V_m$ καί κάθε ὑπόχωρος V_i εἶναι ξένος πρός τόν ὑπόχωρο πού παράγουν ὅλοι οἱ ὑπόλοιποι V_j.

9. Ὁ πίνακας ἑνός τελεστῆ T ἐπί τοῦ $V_3(\mathbb{C})$, ὡς πρός μιά ὀρθοκανονική βάση $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$, εἶναι

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix}$$

Βρεῖτε τόν πίνακα τοῦ τελεστῆ $\sqrt{T}$ ὡς πρός τήν ἴδια βάση $\mathcal{E}$. (Σημείωση: $\sqrt{T}$ εἶναι ὁ τελεστής S γιά τόν ὁποῖο $S^2 = T$. Ὑπόδειξη: Διαγωνοποιῆστε τόν A ὡς πρός κατάλληλη βάση.)

10. Ἕνας τελεστής T ἐπί τοῦ $V_n(\mathbb{C})$ λέγεται θετικός (ἀντιστ. μή ἀρνητικός), ἄν ὅλες οἱ ἰδιοτιμές του εἶναι θετικοί (ἀντιστ. μή ἀρνητικοί) ἀριθμοί. Δείξτε

α) Ὅτι τό τετράγωνο ἑνός συμμετρικοῦ τελεστῆ εἶναι μή ἀρνητικός τελεστής.

β) Ὅτι γιά τυχόντα τελεστή T, ὁ T^*T εἶναι μή ἀρνητικός τελεστής, ἐνῶ ὁ T^*T εἶναι θετικός ἄν καί μόνο ἄν ὁ T εἶναι ἀντιστρέψιμος.

γ) Ὅτι ἄν ὁ T εἶναι κανονικός, θετικός (ἀντιστ. μή ἀρνητικός), τότε ὑπάρχει ἕνας μοναδικός S θετικός (ἀντιστ. μή ἀρνητικός), γιά τόν ὁποῖο $S^2 = T$. Ὁ S λέγεται τετραγωνική ρίζα τοῦ T καί συμβολίζεται $\sqrt{T}$ (πρβλ. ἄσκηση 9.).

2. Πραγματικοί συμμετρικοί πίνακες καί τετραγωνικές μορφές μέ πραγματικούς συντελεστές.

Σ' αὐτό τό κεφάλαιο ὅλοι οἱ πίνακες, καθώς καί οἱ διανυσματικοί χῶροι, θά ἐννοοῦνται πραγματικοί.

<u>Πρόταση</u>. Ἔστω A πραγματικός, συμμετρικός $n\times n$ πίνακας καί V διανυσματικός χῶρος διαστάσεως n. Τότε ὁ γραμμικός τελεστής $T: V \longrightarrow V$, πού ἀντιστοιχεῖ στόν πίνακα A (δές Παράρτημα Π.1) εἶναι συμμετρικός, ἄρα καί κανονικός. (2.1)

Ἀπόδειξη. Χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας μποροῦμε νά ὑποθέτομε ὅτι $V = \mathbb{R}^n$. (δές Θεώρημα 4.14, σελ. 118 στό βιβλίο τοῦ Morris). Θεωροῦμε τή συνήθη ὀρθοκανονική βάση $e_1^*, \dots, e_n^*$ μέ $e_i^* = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{in})$,

ὅπου $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ἄν } i=j \\ 0 & \text{ἄν } i\neq j \end{cases}$

Ἐξ ὁρισμοῦ τοῦ T, ὁ πίνακας τοῦ T ὡς πρός αὐτή τή βάση εἶναι A. Ἀπ' τήν πρόταση 1.4 ὁ πίνακας τοῦ T^* εἶναι $A^t = A$, ἄρα οἱ T καί T^* ἔχουν, ὡς πρός τήν ἴδια βάση, τόν ἴδιο πίνακα καί, συνεπῶς ταυτίζονται. Ἔτσι ὁ T εἶναι συμμετρικός, ἄρα καί κανονικός, ἀφοῦ $TT^* = TT = T^*T$.

□

<u>Θεώρημα</u> Ἔστω A πραγματικός, συμμετρικός $n\times n$ πίνακας καί P ὁ πίνακας τοῦ ὁποίου ἡ i-οστή στήλη συνίσταται ἀπ' τίς συνιστῶσες τοῦ διανύσματος e_i τῆς βάσης $\mathcal{E}$ πού ἡ κατασκευή της περιγράφεται στό (1.17) (ὁ γραμμικός τελεστής T τοῦ (1.17) εἶναι στήν περίπτωσή μας ἐκεῖνος πού ἀντιστοιχεῖ στόν πίνακα A· δές καί τήν παραπάνω πρόταση). Τότε ὁ πίνακας $P^{-1}AP = P^tAP$ εἶναι ὁ διαγώνιος πίνακας, πού περιγράφεται στήν ἐκφώνηση τοῦ θεωρήματος 1.18. (2.2)

<u>Σημείωση</u>. i) Ὅταν στό χῶρο $\mathbb{R}^n$ ἀναφερόμαστε σέ

συντεταγμένες ἑνός διανύσματος, δίχως νά καθορίζομε ὡς πρός ποιά βάση εἶναι αὐτές οἱ συντεταγμένες, τότε θά ἐννοοῦμε ὡς πρός τή συνήθη ὀρθοκανονική βάση $e_1^*, \dots, e_n^*$, πού περιγράφομε στήν ἀπόδειξη τῆς προτάσης 2.1.

(ii) Ὁ P, ὡς πίνακας τοῦ ὁποίου οἱ στῆλες συνιστοῦν n γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα, εἶναι ἀντιστρέψιμος (βλ. πόρισμα σελ. 105 στό βιβλίο τοῦ Morris) καί, μάλιστα, <u>ὀρθογώνιος</u>, δηλ. $P^t = P^{-1}$.

Ἀπόδειξη. Ἄν τά στοιχεία τῆς i-οστῆς στήλης τοῦ P εἶναι $p_{1i}, p_{2i}, \dots, p_{ni}$, τότε, ἐξ ὁρισμοῦ,

$$e_i = p_{1i} e_1^* + \dots + p_{ni} e_n^*, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.3}$$

Ἔστω D ὁ πίνακας τοῦ T ὡς πρός τή βάση $e_1, \dots, e_n$. Ὁ D εἶναι ὁ διαγώνιος πίνακας πού περιγράφεται στό (1.18).

Ἀπ' τήν ἄλλη μεριά, ὁ ἴδιος τελεστής T ἔχει ὡς πρός τή βάση $e_1^*, \dots, e_n^*$ πίνακα A καί οἱ δύο βάσεις $e_1, \dots, e_n$ καί $e_1^*, \dots, e_n^*$ συνδέονται μέ τή (2.3). Ἄρα (Παράρτημα Π.2), οἱ D καί A θά συνδέονται μέ τή σχέση $D = P^{-1}AP$.

Μένει νά δείξομε ὅτι $P^{-1} = P^t$, ἤ $P^tP = I_n$. Ἡ τελευταία ὅμως ἰσότητα γίνεται φανερή ἄν θυμηθοῦμε ὅτι οἱ στῆλες τοῦ P εἶναι οἱ συν/μένες τῶν $e_1, \dots, e_n$, τά ὁποῖα ἀποτελοῦν ὀρθοκανονική βάση (ἄσκηση 5, κεφ. 1). □

Παράδειγμα. Νά βρεθεῖ ὁ ὀρθογώνιος πίνακας P, γιά τόν ὁποῖο μιλάει τό θεώρημα 2.2, στήν περίπτωση τοῦ πίνακα (2.4)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Λύση. Τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο τοῦ A εἶναι

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

, τοῦ ὁποίου οἱ ρίζες εἶναι

ἡ $\lambda_1 = 1$ (τριπλῆ) καί ἡ $\lambda_2 = -3$.
Κατά τά γνωστά βρίσκομε ὅτι μιά βάση γιά τόν ὑπόχωρο E_{λ_1} εἶναι ἡ

$$\{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,-1)\}$$

ἐνῶ μιά βάση γιά τόν E_{λ_2} εἶναι ἡ

$$\{\tfrac{1}{2}(1,-1,-1,1)\}.$$

Μέ τή μέθοδο Gram-Schmidt ὀρθοκανονικοποιοῦμε τήν παραπάνω βάση τοῦ E_{λ_1} καί βρίσκομε τήν ἑξῆς βάση:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt2}(1,1,0,0), \frac{1}{\sqrt6}(1,-1,2,0), \frac{1}{2\sqrt3}(1,-1,-1,-3)\right\}.$$

Ἄρα

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{2\sqrt3} & \frac12 \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{2\sqrt3} & -\frac12 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt6} & -\frac{1}{2\sqrt3} & -\frac12 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2\sqrt3} & \frac12 \end{pmatrix}.$$

Ἁπλοί ὑπολογισμοί δείχνουν τώρα ὅτι ὁ P εἶναι ὀρθογώνιος ($P^t = P^{-1}$) καί ὅτι

$$P^tAP = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -3 \end{pmatrix},$$ ὅπως ἀναμενόταν.

Ὁρισμός. Ἕνα ὁμογενὲς πολυώνυμο (2.5)

$$f(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$$

2ου βαθμοῦ λέγεται (πραγματική) *τετραγωνική μορφή* (n μεταβλητῶν). Παρατηροῦμε ὅτι μετὰ τὴν ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων στὴν f κάθε ὅρος τῆς μορφῆς $c x_i x_j$ $(i \neq j)$ γράφεται ὡς $\frac{c}{2} x_i x_j + \frac{c}{2} x_j x_i$, ἄρα ἡ f μπορεῖ νὰ γραφεῖ

ὡς $f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij} x_i x_j$ μὲ τὸν πίνακα

$A=(a_{ij})$ συμμετρικό. Μὲ συμβολισμὸ πινάκων, ἂν θέσομε,

$$X = (x_1\ x_2 \cdots x_n),$$

τότε

$$f(x_1,\dots,x_n) = XAX^t .$$

Ἔτσι, οὐσιαστικὰ κάθε τετραγωνικὴ μορφὴ μὲ μεταβλητὲς $x_1,\dots,x_n$ ταυτίζεται μ' ἕνα συμμετρικὸ $n\times n$ πίνακα, ποὺ λέγεται *πίνακας τῆς τετραγ. μορφῆς*. Στὴν πράξη, αὐτὸ ποὺ μᾶς ἐνδιαφέρει συχνὰ εἶναι νὰ βροῦμε ὕστερα ἀπὸ κατάλληλη "ἀλλαγὴ τῶν μεταβλητῶν" $x_1,\dots,x_n$, ξεκινώντας ἀπ' τὴν f, μιὰ νέα τετραγωνικὴ μορφὴ g ὡς πρὸς τὶς νέες μεταβλητές, ἂς τὶς ποῦμε $y_1,\dots,y_n$, ἡ ὁποία θὰ ἔχει, κατὰ τὸ δυνατόν, ἁπλούστερη μορφή. Καί, ἀντίστροφα, ξεκινώντας ἀπ' τὴν g καὶ ἐκφράζοντας τὶς μεταβλητὲς $y_1,\dots,y_n$ συναρτήσει τῶν $x_1,\dots,x_n$ θέλομε νὰ ξαναγυρίζομε στὴν f, ἀπ' τὴν ὁποία ξεκινήσαμε. Λέγοντας "ἀλλαγὴ μεταβλητῶν" ἐννοοῦμε πάντοτε σ' αὐτὲς τὶς σημειώσεις, "γραμμικὴ ἀλλαγὴ μεταβλητῶν". Ἔτσι λοιπὸν ζητοῦμε ἕνα $n\times n$ *ἀντιστρέψιμο* πίνακα P τέτοιον ὥστε, ἂν θέσομε

$$X^t = PY^t, \quad Y=(y_1\ y_2 \cdots y_n) \qquad (2.6)$$

καὶ ἀντικαταστήσομε στὴν f τὰ $x_1,\dots,x_n$ μὲ τὶς ἐκφράσεις τους συναρτήσει τῶν $y_1,\dots,y_n$ ἀπ' τὴ (2.6), τότε νὰ πάρομε μιὰ "ἁπλούστερη" τετραγωνικὴ μορφὴ ὡς πρὸς $y_1,\dots,y_n$. Ἡ μορφὴ αὐτή, ἔστω $g(y_1,\dots,y_n)$, βρίσκεται ὡς ἑξῆς:

$$f(x_1,\dots,x_n) = XAX^t = (YP^t)A(PY^t) = Y(P^tAP)Y^t = \\ = g(y_1,\dots,y_n).$$

Δηλαδή, ἂν κάνομε τὴν ἀλλαγὴ μεταβλητῶν (2.6), στὴν τετραγωνικὴ μορφὴ $f(x_1,\dots,x_n)$, τότε προκύπτει ἡ τετραγωνικὴ μορφὴ $g(y_1,\dots,y_n)$, τῆς ὁποίας ὁ πίνακας εἶναι

$$B = P^tAP \quad (\det P \neq 0). \tag{2.7}$$

Φυσικά, "ἁπλούστερη" τετραγωνικὴ μορφὴ εἶναι κάτι σχετικό. Μιὰ περίπτωση, ἰδιαίτερα σημαντική, εἶναι ἡ κανονικὴ τετραγωνικὴ μορφή, δηλ. μορφή

$$\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2. \tag{2.8}$$

Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση, τὸ νὰ μετασχηματίσομε μὲ κατάλληλη ἀλλαγὴ μεταβλητῶν τὴν τετραγωνικὴ μορφὴ $f(x_1,\dots,x_n)$ σὲ κανονικὴ μορφὴ σημαίνει, λόγῳ τῆς (2.7), νὰ βροῦμε ἀντιστρέψιμο πίνακα P τέτοιον ὥστε ὁ πίνακας P^tAP νὰ εἶναι διαγώνιος. Ἀπ' ὅ,τι ἔχομε ἰδεῖ στὸ κεφάλαιο 2, αὐτὸ εἶναι πάντοτε δυνατόν. Πιὸ συγκεκριμένα:

Θεώρημα. Γιὰ κάθε πραγματικὴ τετραγωνικὴ μορφὴ $f(x_1,\dots,x_n)$ ὑπάρχει ἕνας ὀρθογώνιος πίνακας P, εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἀλλαγὴ μεταβλητῶν στὴ (2.6) νὰ μετασχηματίζει τὴν $f(x_1,\dots,x_n)$ στὴν κανονικὴ τετραγωνικὴ μορφὴ (2.8), στὴν ὁποία οἱ συντελεστὲς $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ εἶναι οἱ ρίζες τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου τοῦ πίνακα τῆς τετραγωνικῆς (2.9) μορφής, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν καί τής πολλαπλότητας κάθε ρίζας.

Ἀπόδειξη. Ἄμεση συνέπεια τοῦ θεωρήματος 2.2.

□

Παράδειγμα. Ἔστω ἡ τετραγωνική μορφή (2.10).

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$.

Ὁ πίνακας τῆς f εἶναι ὁ A τοῦ (2.4) καί ὁ P στή (2.6) δίνεται, σ' αὐτή τήν περίπτωση, στό (2.4).

Ἄρα, θέτοντας

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{2\sqrt{3}}y_3+\frac{1}{2}y_4$$

$$x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{6}}y_2-\frac{1}{2\sqrt{3}}y_3-\frac{1}{2}y_4$$

$$x_3=\frac{2}{\sqrt{6}}y_2-\frac{1}{2\sqrt{3}}y_3-\frac{1}{2}y_4$$

$$x_4=-\frac{3}{2\sqrt{3}}y_3+\frac{1}{2}y_4$$

θά ἔχομε $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2$,

ὅπως φαίνεται, ἄλλωστε, καί μέ ἕναν ἄμεσο ὑπολογισμό.

Σημείωση. Τό θεώρημα 2.9 δίνει περισσότερα ἀπ' ὅσα ἀρχικά ζητήσαμε: Ἡ ἀλλαγή μεταβλητῶν (2.6) δέν ἔγινε μέ τή βοήθεια ἑνός ἀντιστρέψιμου, ἁπλῶς, πίνακα, ἀλλά ἑνός ὀρθογώνιου πίνακα. Γι' αὐτό, τό θεώρημα 2.9 διατυπώνεται ἰσοδύναμα καί ὡς ἑξῆς: (2.11)

Θεώρημα. Κάθε πραγματική τετραγωνική μορφή n μεταβλητῶν μπορεῖ νά μετασχηματιστεῖ μέσῳ ἑνός ὀρθογωνίου μετασχηματισμοῦ (γραμμικοῦ τελεστή) σέ μιά κανονική τετραγωνική μορφή (2.8), τῆς ὁποίας οἱ συντελεστές $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ εἶναι ὅπως στήν ἐκφώνηση τοῦ θεωρήματος 2.9. (2.12)

□

Ἄς δοῦμε τώρα μιά γεωμετρική ἑρμηνεία τοῦ (2.12):

Θεωροῦμε τόν $\mathbb{R}^n$ μέ τή συνήθη ὀρθοκανονική βάση καί ἔστω S ἡ δευτεροβάθμια ἐπιφάνεια (καμπύλη ἄν $n=2$) τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωση εἶναι $f(x_1,\dots,x_n)=c$, μέ f ὅπως στό (2.5). Ἔστω T ὁ τελεστής, τοῦ ὁποίου ὁ πίνακας (ὡς πρός τή συνήθη ὀρθοκανονική βάση) εἶναι P^{-1}, ὅπου P εἶναι ἕνας ὀρθογώνιος πίνακας. Τότε ὁ T εἶναι ὀρθογώνιος καί

$$T(x_1,\dots,x_n)=(y_1,\dots,y_n)$$

ὅπου τά $(x_1,\dots,x_n)$ καί $(y_1,\dots,y_n)$ συνδέονται μέ τή (2.6). Μέσω τοῦ T ἡ ἐπιφάνεια (καμπύλη) S μετασχηματίζεται σέ μιά ἐπιφάνεια (καμπύλη) S', τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωση εἶναι ἡ $g(y_1,\dots,y_n)=c$, μέ $g(y_1,\dots,y_n)$ ὅπως στή (2.8). Ἐπιπλέον, ὁ διαγώνιος πίνακας B τῆς τετραγωνικῆς μορφῆς g, συνδέεται μέ τόν πίνακα A τῆς f μέσῳ τῆς (2.7).

Ἡ γεωμετρική σημασία τοῦ γεγονότος ὅτι ὁ T εἶναι ὀρθογώνιος τελεστής περιγράφεται ἀπ' τά ἑξῆς.

Θεώρημα. Κάθε ὀρθογώνιος τελεστής (μετασχηματισμός) διατηρεῖ (i) τήν ἀπόσταση, ἄρα καί τό μῆκος, (ii) τό ἐσωτερικό γινόμενο, (iii) τήν καθετότητα, (iv) τό συνημίτονο τῆς γωνίας δύο ὁποιωνδήποτε διανυσμάτων. (2.13)

Ἀπόδειξη. Ἐξ ὁρισμοῦ $T^*=T^{-1}$. Ἄν λάβομε ἐπιπλέον ὑπ' ὄψη τήν (1.2), τότε

$$(Tx,Ty)=(x,T^*Ty)=(x,y). \qquad (2.14)$$

Ἡ (2.14) ἀποδεικνύει ἀμέσως τό (ii) καί τό (iii).

Ἄν στή (2.14) θέσομε ὅπου x καί y τό $x-y$ τότε παίρνομε

$$\|Tx-Ty\|^2=\|T(x-y)\|^2=(T(x-y),T(x-y))=$$
$$=(x-y,x-y)=\|x-y\|^2,$$

καί ἀποδεικνύομε ἔτσι καί τό (i).

Τέλος, τό (iv) ἀποδεικνύεται ἀπ' τή σχέση

$$(x,y)=\|x\|\|y\|\cos(\widehat{x,y}),$$

ὅπου $(\widehat{x,y})$ ἡ γωνία τῶν διανυσμάτων x,y, καί ἀπ' τά (i) καί (ii). □

Τό νά διατηρεῖ ἕνας γραμμικός τελεστής τό μῆκος εἶναι, ἐπίσης, ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι ὁ T ὀρθογώνιος:

Θεώρημα. Ὁ γραμμικός τελεστής T εἶναι ὀρθογώνιος ἄν καί μόνο ἄν ὁ T διατηρεῖ τά μήκη. (2.15)

Ἀπόδειξη. Τό ἀναγκαῖο ἔχει ἤδη ἀποδειχτεῖ στό (1) τοῦ θεωρήματος 2.13.

Τό ἱκανό: Ἔστω ὅτι $\|Tx\| = \|x\|$ γιά κάθε διάνυσμα x. Παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι ὁ T διατηρεῖ τό ἐσωτερικό γινόμενο. Πράγματι, εἶναι

$(x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y)$,

ἀπ' ὅπου

$$(x,y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \qquad (2.16)$$

καί ἡ σχέση αὐτή ἀληθεύει γιά κάθε ζευγάρι διανυσμάτων. Συνεπῶς καί

$$(Tx, Ty) = \frac{1}{2}\left(\|Tx + Ty\|^2 - \|Tx\|^2 - \|Ty\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|T(x+y)\|^2 - \|Tx\|^2 - \|Ty\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right),$$

ἀφοῦ ὁ T διατηρεῖ τά μήκη. Συγκρίνοντας μέ τή (2.16) βλέπουμε ὅτι

$$(x,y) = (Tx, Ty). \qquad (2.17)$$

Μιά δεύτερη παρατήρηση εἶναι ὅτι ὁ T εἶναι ἀντιστρέψιμος. Πράγματι, εἶναι $\|Tx\| = \|x\|$, ἄρα $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, δηλ. ὁ T εἶναι μή ἰδιάζων, ἄρα (θεώρ. 4.11, σελ. 115 στό βιβλίο τοῦ Morris) ἀντιστρέψιμος.

Ἔστω τώρα $A = (a_{ij})$ ὁ πίνακας τοῦ T ὡς πρός μιά ὀρθοκανονική βάση $e_1, \dots, e_n$. Τότε ὁ A εἶναι ἀντιστρέψιμος. Ἐπίσης, ὁ πίνακας τοῦ T^* ὡς πρός τήν ἴδια βάση εἶναι A^t (πρόταση 1.4). Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $A^t \cdot A = I_n$, γιατί αὐτό θά σημαίνει ὅτι $A^{-1} = A^t$ καί, συνεπῶς, ὅτι $T^* = T^{-1}$:

Ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι

$$Te_i = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \dots + a_{ni}e_n \quad , i=1,\dots,n \tag{2.18}$$

Ἀπ' τήν ἄλλη μεριά, τό (i,j)-στοιχεῖο τοῦ A^tA εἶναι

$$c_{ij} = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{ni}a_{nj} = (\text{λόγῳ τῆς } (2.18)) \tag{2.19}$$

$$= (Te_i , Te_j) = (\text{λόγῳ τῆς } (2.17)) = (e_i , e_j) .$$

Ἄρα

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ἄν } i=j \\ 0 & \text{ἄν } i\neq j \end{cases} ,$$

πού εἶναι τό ἀποδεικτέο.

□

Ἄς ἐπανέλθομε τώρα στό ζήτημα πού εἶχε τεθεῖ πρίν ἀπ' τό θεώρημα 2.9: Τό μετασχηματισμό μιᾶς δοθείσης τετραγωνικῆς μορφῆς σέ κανονική μορφή, μέσῳ ἑνός κατάλληλου μετασχηματισμοῦ τῶν μεταβλητῶν τῆς τετραγωνικῆς μορφῆς. Ἐκ πρώτης ὄψεως τό θεώρημα 2.9 φαίνεται νά δίνει τήν ὁριστική ἀπάντηση, ἀλλά ἀπό πρακτική ἄποψη τό θεώρημα 2.9 δέν εἶναι πάντοτε ἡ ἁπλούστερη λύση στό ζήτημά μας, ἐκτός ἄν γιά κάποιο λόγο θέλομε νά ἔχομε ὁπωσδήποτε ὀρθογώνιο μετασχηματισμό μεταβλητῶν (δηλ. ὀρθογώνιο πίνακα P στήν (2.6)). Τό πρακτικό πρόβλημα πού ἀνακύπτει εἶναι ἡ εὕρεση τῶν ριζῶν τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου τοῦ πίνακα τῆς τετραγωνικῆς μορφῆς. Ἄν ἡ τετραγωνική μορφή ἔχει πλῆθος μεταβλητῶν $n \geq 5$, τότε τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο εἶναι βαθμοῦ $n \geq 5$ καί, πλήν ἐξαιρέσεων, οἱ ρίζες του θά βρεθοῦν μόνο κατά προσέγγιση, ἔτσι ὥστε στή (2.8) οἱ συντελεστές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ νά εἶναι προσεγγίσεις τῶν ἰδιοτιμῶν τοῦ πίνακα τῆς τετραγωνικῆς μορφῆς. Κάτι τέτοιο δέν εἶναι ἀπόλυτα ἱκανοποιητικό καί ἀπό τήν ἄποψη τήν ὑπολογιστική καί ὡς ἀποτέλεσμα, ὅταν μάλιστα ὁ μετασχηματισμός τῶν με-

ταβλητών δέν είναι απαραίτητο νά είναι ορθογώνιος.
Ανάλογα προβλήματα προκύπτουν ακόμη καί γιά $n=4$ ή $n=3$, περιπτώσεις κατά τίς όποιες οί αντίστοιχες πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού n λύνονται μέν αλγεβρικά, αλλά ή αλγεβρική τους παράσταση είναι πολύ περίπλοκη.

<u>Παράδειγμα.</u> Έστω ή τετραγωνική μορφή (2.20)

$$f = x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1x_3 - 12x_2x_3 + 4x_3^2 - 4x_2x_4 - 8x_3x_4 - x_4^2.$$

Ο πίνακας της f είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -6 & -2 \\ -2 & -6 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

καί ύστερ' από πράξεις καταλήγομε στή χαρακτηριστική εξίσωση, ή όποία είναι:

$$\lambda^4 - 9\lambda^3 - 50\lambda^2 + 192\lambda + 64 = 0$$

Γιά νά πάρει κανείς μιά ιδέα λέμε ότι οί ρίζες της τεταρτοβάθμιας αυτής εξίσωσης είναι οί ρίζες τών εξής δύο δευτεροβαθμίων εξισώσεων:

$$\lambda^2 + \left(-\frac{9}{2} + 2\mu\right)\lambda - \frac{25}{3} + 2\rho + \nu = 0$$

$$\lambda^2 + \left(-\frac{9}{2} - 2\mu\right)\lambda - \frac{25}{3} + 2\rho - \nu = 0$$

όπου $\rho = \sqrt[3]{21131 + 54i\sqrt{3082146}} + \sqrt[3]{21131 - 54i\sqrt{3082146}}$

$$\mu = \sqrt{\frac{643}{48} + \rho}, \quad \nu = \sqrt{\left(-\frac{25}{3} + \rho\right)^2 - 64} \quad !$$

Είναι προφανές ότι ή τετραγωνική μορφή $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \lambda_4 y_4^2$ στήν όποία θά μετασχηματιστεί ή f δέν θά είναι καθόλου ικανοποιητική από άποψη συντελεστών. Επίσης ό πίνακας P της αλλαγής μεταβλητών θά έχει στοιχεία εκφραζόμενα μέ πολύ περίπλοκες αλγεβρικές παραστάσεις.

Ἀντιθέτως, θὰ δοῦμε τώρα ἀμέσως ὅτι μὲ ἁπλοὺς καὶ στοιχειώδεις ὑπολογισμοὺς ἡ f μπορεῖ νὰ μετασχηματιστεῖ σὲ κανονικὴ μορφή: Εἶναι

$$x_1^2+6x_1x_2-4x_1x_3=(x_1+3x_2-2x_3)^2-9x_2^2-4x_3^2+12x_2x_3$$

καὶ θέτοντας

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} \qquad (2.21)$$

ἔχομε

$$f=y_1^2-4y_2^2-4y_2y_4-8y_3y_4-y_4^2$$

Τώρα, $-4y_2^2-4y_2y_4=-4(y_2+\frac{1}{2}y_4)^2+y_4^2$. Ἄρα θέτοντας

$$\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix} \qquad (2.22)$$

ἔχομε

$$f=z_1^2-4z_2^2-8z_3z_4.$$

Τέλος, θέτοντας

$$\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{pmatrix} \qquad (2.23)$$

ἔχομε

$$f=w_1^2-4w_2^2-8w_3^2+8w_4^2,$$

ἐνῶ ἀπ' τὶς (2.21), (2.22) καὶ (2.23)

$$\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$$

Ἄρα,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

καί ἡ ἀλλαγή μεταβλητῶν $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}$

μετασχηματίζει τήν $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ στήν

$$g(w_1, w_2, w_3, w_4) = w_1^2 - 4w_2^2 - 8w_3^2 + 8w_4^2 . \qquad (2.24)$$

Εἰδικώτερα, λόγῳ τῆς (2.7) οἱ πίνακες τῶν f καί g συνδέονται μέ τή σχέση

$$P^t A P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -4 & & 0 \\ & 0 & -8 & \\ & & & 8 \end{pmatrix}.$$

Ἡ μέθοδος πού ἐφαρμόσαμε γιά τήν κανονικοποίηση τῆς f εἶναι γενική καί, οὐσιαστικά, ἀποδεικνύει τό

<u>Θεώρημα.</u> Γιά κάθε πραγματική τετραγωνική μορφή $f(x_1, \dots, x_n)$ (2.25) ὑπάρχει ἀντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας P, τέτοιος ὥστε ἡ ἀλλαγή μεταβλητῶν (2.6) νά μετασχηματίζει τήν $f(x_1, \dots, x_n)$ στήν κανονική τετραγωνική μορφή $g(y_1, \dots, y_n)$, τῆς ὁποίας ὁ διαγώνιος πίνακας σχετίζεται μέ τόν πίνακα A τῆς $f(x_1, \dots, x_n)$ μέσῳ τῆς (2.7).

<u>Παρατήρηση.</u> Τό θεώρημα 2.25 εἶναι, προφανῶς, ἀσθενέστερο τοῦ 2.9, ἀλλά ἡ ἀπόδειξή του ὑποδεικνύει ἕναν ἁπλούστερο τρόπο γιά νά κανονικοποιεῖ κανείς μιά τετραγωνική μορφή στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία δέν εἶναι ἀνάγκη νά γίνει ὀρθογώνια ἀλλαγή μεταβλητῶν.

Ἀπόδειξη. Ἄς ὑποθέσομε ὅτι ἡ f δέν περιέχει κανένα x_i^2. Τότε, ἄς ποῦμε δίχως βλάβη τῆς γενικότητας ὅτι ὁ ὅρος $x_1 x_2$ περιέχεται στήν f. Κάνοντας τήν ἀλλαγή μεταβλητῶν $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$, $x_3 = y_3$, ..., $x_n = y_n$, μετασχηματίζομε αμέσως τήν $f(x_1,\dots,x_n)$ σέ μιά τετραγωνική μορφή $f'(y_1,\dots,y_n)$, στήν όποία περιέχονται οί όροι y_1^2 καί y_2^2 μέ μή μηδενικό συντελεστή. Κατά συνέπεια, μπορούμε χωρίς βλάβη τής γενικότητας νά υποθέσομε ότι ένα, τουλάχιστον, x_i^2 περιέχεται στήν $f(x_1,\dots,x_n)$ (έννοείται, δίχως μηδενικό συντελεστή). Ή απόδειξη προχωρεί έπαγωγικά. Άν $n=1$, τότε ή τετραγωνική μορφή είναι ή $a_{11}x_1^2$, $a_{11}\neq 0$ καί δέν έχομε ν' άποδείξομε τίποτα. Έστω τώρα ότι έχομε άποδείξει ότι κάθε πραγματική τετραγωνική μορφή μέ πλήθος μεταβλητών $<n$ κανονικοποιείται μέ κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών. Θεωρούμε τώρα τήν πραγματική τετραγωνική μορφή $f(x_1,\dots,x_n)$, στήν όποία $a_{nn}\neq 0$. Συλλέγομε όλους τούς όρους τής f στούς όποίους είναι δυνατόν νά έμφανίζεται τό x_n:

$$\left.\begin{aligned} &a_{1n}x_1x_n + a_{n1}x_nx_1 + a_{2n}x_2x_n + a_{n2}x_nx_2 + \dots +\\ &+ a_{n-1,n}x_{n-1}x_n + a_{n,n-1}x_nx_{n-1} + a_{nn}x_n^2 = \end{aligned}\right\} \quad (2.26)$$

$$= a_{nn}\left(\frac{2a_{1n}}{a_{nn}}x_1x_n + \frac{2a_{2n}}{a_{nn}}x_2x_n + \dots + \frac{2a_{n-1,n}}{a_{nn}}x_{n-1}x_n + x_n^2\right) =$$

$$= a_{nn}\left(\frac{a_{1n}}{a_{nn}}x_1 + \frac{a_{2n}}{a_{nn}}x_2 + \dots + \frac{a_{n-1,n}}{a_{nn}}x_{n-1} + x_n\right)^2 -$$

$$- f_1(x_1,\dots,x_{n-1})$$

όπου ή f_1 είναι μιά πραγματική τετραγωνική μορφή, ή όποία δέν περιέχει τή μεταβλητή x_n. Συνεπώς, άντικαθιστώντας τό κομμάτι (2.26) τής $f(x_1,\dots,x_n)$ άπ' τό ίσο του βρίσκομε

$$f(x_1,\dots,x_n) = f_2(x_1,\dots,x_{n-1}) + a_{nn}\left(\frac{a_{1n}}{a_{nn}}x_1 + \dots + \frac{a_{n-1,n}}{a_{nn}}x_{n-1} + x_n\right)^2,$$

καί κάνοντας τήν αλλαγή μεταβλητών

$$\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_{n-1}\\ z_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ \frac{a_{1n}}{a_{nn}} & \frac{a_{2n}}{a_{nn}} & \dots & \frac{a_{n-1,n}}{a_{nn}} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_{n-1}\\ x_n\end{pmatrix}$$

μετασχηματίζομε τήν $f(x_1,\dots,x_n)$ στήν τετραγωνική μορφή

$$h(z_1,\dots,z_n) = h_1(z_1,\dots,z_{n-1}) + a_{nn} z_n^2.$$

Τώρα, ἀπ' τήν ἐπαγωγική ὑπόθεση ὑπάρχει μιά ἀλλαγή μεταβλητῶν $z_1 \to y_1, \dots, z_{n-1}\to y_{n-1}$ ἡ ὁποία μετασχηματίζει τήν $h_1(z_1,\dots,z_{n-1})$ στήν

$$g_1(y_1,\dots,y_{n-1}) = b_{11}y_1^2+\dots+b_{n-1,n-1}y_{n-1}^2.$$

Ἔστω αὐτή ἡ ἀλλαγή μεταβλητῶν

$$\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_{n-1}\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_{n-1}\end{pmatrix}, \quad \det C\neq 0,$$

ὅπου ὁ C εἶναι πίνακας διαστάσεως $(n-1)\times(n-1)$.
Τότε ἡ ἀλλαγή μεταβλητῶν

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} C & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_{n-1}\\ y_n\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_{n-1}\\ y_n\end{pmatrix}$$

μέ $\det P = \det B\cdot\det C = \det C \neq 0$, μετασχηματίζει τήν $f(x_1,\dots,x_n)$ στήν $g(y_1,\dots,y_n) = b_{11}y_1^2+\dots+b_{n-1,n-1}y_{n-1}^2 + a_{nn}y_n^2$.

□

<u>Παρατήρηση</u>. Εἶναι φανερό ὅτι ὁ ἀλγόριθμος πού ὑπο- (2.27)
δεικνύεται ἀπ' τήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος 2.25 δέν εἶναι μονότροπα ἐφαρμόσιμος. Ἀπ' τήν ἄλλη μεριά, τό θεώρημα 2.9 δίνει ἕναν ἄλλο τρόπο κανονικοποίησης μιᾶς τετραγωνικῆς μορφῆς. Ἔτσι, ἄν μᾶς δοθεῖ μιά πραγματική τετραγωνική μορφή, ὑπάρχουν διάφοροι τρόποι γιά νά τή μετασχηματίσομε σέ κανονική μορφή καί οἱ ἀντί-

στοιχες κανονικές μορφές δέν θά είναι κατ' ανάγκη οί ίδιες (πρβλ. παράδειγμα 2.20). Τί κοινό θά έχουν όλες οί κανονικές μορφές, στίς όποιες είναι δυνατόν νά μετασχηματιστεί μία καί ή αυτή τετραγωνική μορφή;
Ή απάντηση δίνεται απ' τό

Θεώρημα αδράνειας γιά τίς τετραγωνικές μορφές (Sylvester) (2.28)
Άν κανονικοποιήσομε μιά πραγματική τετραγωνική μορφή $f(x_1,\dots,x_n)$, τότε τό πλήθος τών θετικών συντελεστών, καθώς καί τό πλήθος τών αρνητικών συντελεστών της κανονικής τετραγωνικής μορφής στην όποια θά μετασχηματιστεί ή f είναι αναλλοίωτη της f, δηλ. εξαρτάται αποκλειστικά απ' τήν f καί όχι απ' τή εφαρμοσθείσα μέθοδο κανονικοποίησης.

Απόδειξη. Έστω ότι οί αλλαγές μεταβλητών

$$X^t = PY^t, \ \det P \neq 0 \quad \text{καί} \quad X^t = QZ^t, \ \det Q \neq 0 \qquad (2.29)$$

όπου $X=(x_1 \dots x_n)$, $Y=(y_1\dots y_n)$, $Z=(z_1\dots z_n)$ μετασχηματίζουν τήν $f(x_1,\dots,x_n)$ στίς κανονικές μορφές

$$\left.\begin{aligned} &g(y_1,\dots,y_n) = a_1y_1^2+\dots+a_ky_k^2 - a_{k+1}y_{k+1}^2 - \dots - a_m y_m^2, \quad m\leq n \\ &\text{καί} \\ &h(z_1,\dots,z_n) = b_1z_1^2+\dots+b_pz_p^2 - b_{p+1}z_{p+1}^2 - \dots - b_q z_q^2, \quad q\leq n \end{aligned}\right\} \qquad (2.30)$$

όπου τά $a_1,\dots,a_m, b_1,\dots,b_q$ είναι >0.
Δηλαδή

$$g(y_1,\dots,y_n) = f(x_1,\dots,x_n) = h(z_1,\dots,z_n) \qquad (2.31)$$

καί

$$D_1 = P^tAP, \quad D_2 = Q^tAQ,$$

όπου A είναι ό πίνακας της f, D_1 ό πίνακας της g καί D_2 ό πίνακας της h (πρβλ. (2.7)).
Λόγω τών (2.30) καί (2.31) είναι

$$a_1y_1^2+\dots+a_ky_k^2 + b_{p+1}z_{p+1}^2+\dots+b_qz_q^2 = b_1z_1^2+\dots+b_pz_p^2 + a_{k+1}y_{k+1}^2+\dots+a_my_m^2 \qquad (2.32)$$

Άς υποθέσομε ότι $p>k$.
Λόγω τών (2.29) είναι δυνατόν νά εκφράσομε τά

$y_1, \dots, y_k$ καί $z_{p+1}, \dots, z_n$ ὡς γραμμικές ἐκφράσεις τῶν $x_1, \dots, x_n$. Ἔτσι θά ὁδηγηθοῦμε σέ μιά σχέση

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ z_{p+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad R \text{ πραγματικός πίνακας,}$$

ὅπου τά στοιχεῖα τῆς στήλης στό ἀριστερό μέλος εἶναι $k+(n-p) = (k-p)+n$, ἄρα λιγώτερα ἀπό n. Συνεπῶς, ἄν θεωρήσομε τό ὁμογενές γραμμικό σύστημα $RX = 0$, αὐτό θά ἔχει μή μηδενική λύση $(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἄν ἀντικαταστήσομε τά $x_1, \dots, x_n$ ἀπ' τά $\xi_1, \dots, \xi_n$, τότε τά $y_1, \dots, y_k, z_{p+1}, \dots, z_n$ θ' ἀντικατασταθοῦν ὅλα ἀπ' τό 0, ὥστε λόγῳ τῆς (2.32),

$$b_1 z_1^2 + \dots + b_p z_p^2 + a_{k+1} y_{k+1}^2 + \dots + a_m y_m^2 = 0, \qquad (2.33)$$

ὅπου τά $z_1, \dots, z_p, y_{k+1}, \dots, y_m$ εἶναι γραμμικές ἐκφράσεις τῶν $\xi_1, \dots, \xi_n$ (λόγῳ τῆς (2.29)), ἄρα πραγματικοί ἀριθμοί. Ἐπιπλέον ὅλα τά a καί b εἶναι θετικοί ἀριθμοί, ἄρα ἀπ' τή (2.33) εἶναι, εἰδικώτερα,

$$b_1 z_1^2 + \dots + b_p z_p^2 = 0$$

($p \geq 1$, διότι $p > k$). Ἄρα $z_1 = \dots = z_p = 0$. Ἔτσι ἡ ἀντικατάσταση τῶν x_i ἀπ' τά $\xi_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$, μηδενίζει τά $z_1, \dots, z_p, z_{p+1}, \dots, z_n$. Λόγῳ τῆς (2.29) αὐτό σημαίνει ὅτι

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

ἄτοπο διότι τά $\xi_1, \dots, \xi_n$ δέν εἶναι ὅλα 0.

Ἔτσι, ἀποκλείεται νά εἶναι $k < p$. Λόγῳ τῆς συμμετρίας τοῦ ρόλου τῶν k καί p, ὁμοίως ἀποκλείεται νά εἶναι $p < k$, ἄρα ἕπεται ὅτι $k = p$.

Μένει νά δείξομε ὅτι $m = q$. Ἔστω π.χ. $m < q$. Τότε, ἐκφράζοντας τά $z_1,\dots,z_p, z_{q+1},\dots,z_n, y_{k+1},\dots,y_m$ γραμμικά συναρτήσει τῶν $x_1,\dots,x_n$ (βλ. (2.29)), οδηγούμαστε σέ $p+(n-q)+(m-k) = n+m-q < n$ γραμμικές παραστάσεις τῶν $x_1,\dots,x_n$. Ἄρα γιά μια κατάλληλη μή μηδενική ἀντικατάσταση τῶν $x_1,\dots,x_n$ θά ἔχομε μηδενισμό τῶν $z_1,\dots,z_p, z_{q+1},\dots, z_n, y_{k+1},\dots,y_m$. Τότε, λόγω τῆς (2.32), ἡ ἴδια ἀντικατάσταση θά καθιστᾶ τήν ἔκφραση $b_{p+1}z_{p+1}^2+\dots+b_q z_q^2$ μηδενική, δηλ. ὅλα τά $z_{p+1},\dots,z_q$ μηδενικά. Ἔτσι, βρέθηκε ἀντικατάσταση μή μηδενική τῶν $x_1,\dots,x_n$, ἡ ὁποία μηδενίζει ὅλα τά $z_1,\dots z_n$ καί αὐτό εἶναι ἄτοπο, λόγῳ τῆς δεύτερης σχέσης (2.29).

□

<u>Πόρισμα</u> Ἔστω $f(x_1,\dots,x_n)$ πραγματική τετραγωνική μορφή. Τότε μέ κατάλληλη ἀλλαγή μεταβλητῶν (2.6) (ὅπου $\det P\neq 0$) ἡ $f(x_1,\dots,x_n)$ μετασχηματίζεται στήν τετραγωνική μορφή (2.34)

$$y_1^2+\dots+y_k^2-y_{k+1}^2-\dots-y_m^2 \quad , 0\le k\le m\le n \qquad (2.35)$$

ὅπου οἱ μή ἀρνητικοί ἀκέραιοι k καί $m-k$ τῶν θετικῶν καί ἀρνητικῶν προσήμων, ἀντιστοίχως εἶναι πλήρες σύστημα ἀναλλοιώτων. Δηλαδή, ἡ πραγματική τετραγωνική μορφή $g(x_1,\dots,x_n)$ μπορεῖ να μετασχηματιστεῖ, μέ κατάλληλη ἀλλαγή μεταβλητῶν, στή (2.35), ἄν καί μόνο ἄν οἱ πίνακες A καί B τῶν f καί g, ἀντιστοίχως, συνδέονται μέ μια σχέση

$$B=P^tAP, \quad \det P\neq 0.$$

Ἀπόδειξη. Ἄσκηση.

□

Παράρτημα τοῦ Κεφαλαίου 2.

Ὑπενθυμίζομε τά ἑξῆς βασικά ἀπ' τή Γραμμική Ἄλγεβρα I:

(Π.1) Ἔστω A ἕνας $m\times n$ πίνακας μέ στοιχεῖα ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σῶμα K. Ἔστω $\mathcal{E}=\{e_1,\dots,e_n\}$ ἡ συνήθης βάση τοῦ $V_n(K)$ (δηλ. $e_1=(1,0,\dots,0)$, $e_2=(0,1,0,\dots,0)$ κ.λ.π.) καί $\mathcal{E}'=\{e'_1,\dots,e'_m\}$ ἡ συνήθης βάση τοῦ $V_m(K)$. Θεωροῦμε τό γραμμικό τελεστή $T: V_n(K)\longrightarrow V_m(K)$, ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ἀπ' τίς τιμές του στά διανύσματα τῆς $\mathcal{E}$ ὡς ἑξῆς: $Te_i = a_{1i}e'_1 + a_{2i}e'_2+\dots+a_{mi}e'_m$, $i=1,\dots,n$ ὅπου $a_{1i}, a_{2i},\dots,a_{mi}$ εἶναι τά στοιχεῖα τῆς i-στήλης τοῦ A. Εἶναι προφανές ὅτι ὁ πίνακας τοῦ T ὡς πρός τίς βάσεις $\mathcal{E}$ καί $\mathcal{E}'$ εἶναι A. Λέμε τότε ὅτι ὁ T εἶναι ὁ γραμμικός τελεστής, πού ἀντιστοιχεῖ στόν πίνακα A.
(δές καί σελ. 100-103 στό βιβλίο τοῦ Morris)

(Π.2) Ἔστω T γραμμικός τελεστής ἐπί τοῦ $V_n(K)$, τοῦ ὁποίου ὁ πίνακας ὡς πρός τή βάση $\mathcal{E}=\{e_1,\dots,e_n\}$ εἶναι A, ἐνῶ ὡς πρός τή βάση $\mathcal{E}'=\{e'_1,\dots,e'_n\}$ εἶναι A'. Ἔστω ἀκόμη

$$e'_i = p_{1i}e_1+\dots+p_{ni}e_n \quad , i=1,\dots,n.$$

Τότε ὁ πίνακας P τοῦ ὁποίου ἡ i-στήλη ἔχει στοιχεῖα τά $p_{1i},\dots,p_{ni}$ $(i=1,\dots,n)$ εἶναι ἀντιστρέψιμος καί οἱ πίνακες A', A συνδέονται μέ τή σχέση

$$A'=P^{-1}AP$$

(Π.3) Ἔστω ὅτι οἱ βάσεις $\mathcal{E}$ καί $\mathcal{E}'$ συνδέονται ὅπως στό (Π.2). Ἄν $(x'_1,\dots,x'_n)$ εἶναι οἱ συντεταγμένες τοῦ διανύσματος v ὡς πρός τήν $\mathcal{E}'$ καί $(x_1,\dots,x_n)$ ὡς πρός τήν $\mathcal{E}$, τότε

$$P\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\mathcal{E}' = \mathcal{E}P$	$\mathcal{E}' = \mathcal{E}P$
$\bar{X}' \quad \bar{X}$	$T: \quad A' \quad A$
$P\bar{X}' = \bar{X}$	$A' = P^{-1}AP$

Ἀσκήσεις τοῦ Κεφαλαίου 2.

1. Ἀποδεῖξτε ὅτι στόν δισδιάστατο εὐκλείδιο χῶρο ἡ ὁμάδα τῶν ὀρθογωνίων μετασχηματισμῶν παράγεται ἀπ' τίς στροφές καί τίς συμμετρίες ὡς πρός τούς ἄξονες.
2. Μέ χρήση καταλλήλου ὀρθογωνίου μετασχηματισμοῦ (ὀρθογώνια ἀλλαγή μεταβλητῶν) μετασχηματίστε κάθε μιά ἀπ' τίς παρακάτω τετραγωνικές μορφές σέ κανονική μορφή:

   $2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$

   $2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$

   $2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_4^2-4x_1x_2+2x_1x_4+2x_2x_3-4x_3x_4$

   $2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$
3. Μέ κατάλληλη ἀλλαγή μεταβλητῶν μετασχηματίστε κάθε μιά ἀπ' τίς παρακάτω τετραγωνικές μορφές σέ κανονική μορφή:

   $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$

   $x_1^2+6x_1x_2+4x_1x_3-x_2^2+x_2x_3+3x_3^2$

   Κάθε μιά ἀπ' τίς τετραγωνικές μορφές τῆς ἄσκησης 2.

3. Κανονικές μορφές καί ἀναλλοίωτες.

Ἔστω S ἕνα μή κενό σύνολο καί G μιά ὁμάδα μετασχηματισμῶν τοῦ S (δηλ. ἀμφιμονοσημάντων καί "ἐπί" ἀπεικονίσεων $S \longrightarrow S$). Λέμε ὅτι δυό στοιχεῖα x καί y τοῦ S εἶναι *ἰσοδύναμα ὑπό τή G* ἄν ὑπάρχει $T \in G$ τέτοιος ὥστε $Tx = y$. Εἶναι προφανές ὅτι ἔτσι ὁρίζομε μιά σχέση ἰσοδυναμίας στό S. Ἕνα ὑποσύνολο S_0 τοῦ S λέγεται *σύνολο κανονικῶν μορφῶν* ὑπό τή G, ἄν κάθε $x \in S$ εἶναι ἰσοδύναμο πρός ἕνα καί μόνο ἕνα $x_0 \in S_0$. Τό x_0 χαρακτηρίζεται ὡς *ἡ κανονική μορφή τοῦ x* (ὑπό τή G). Μιά συνάρτηση F μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό S (καί, συχνά, πεδίο τιμῶν κάποιο σύνολο ἀριθμῶν) χαρακτηρίζεται ὡς *ἀναλλοίωτη τοῦ S ὑπό τήν G*, ἄν $F(x) = F(Tx)$, δηλ. ἄν ἰσοδύναμα ὑπό τήν G στοιχεῖα ἔχουν τήν ἴδια τιμή μέσῳ τῆς F. Ἕνα σύνολο $\{F_1, \dots, F_m\}$ ἀναλλοιώτων τοῦ S ὑπό τή G χαρακτηρίζεται ὡς *πλήρες σύστημα ἀναλλοιώτων τοῦ S ὑπό τή G* ἄν ἔχει τήν ἑξῆς ἰδιότητα: (3.1)

$(x, y \in S$ καί $F_i(x) = F_i(y)\ \forall i = 1, \dots, m) \Longrightarrow$ τά x, y εἶναι ἰσοδύναμα ὑπό τήν G,

δηλ. ἄν ἡ m-άδα τιμῶν $(F_1(x), \dots, F_m(x))$ χαρακτηρίζει τήν κλάση ἰσοδυναμίας τοῦ x.

Παρακάτω δίνομε ὁρισμένα σημαντικά παραδείγματα ἀπό τή μέχρι τώρα γνωστή μας Γραμμική Ἄλγεβρα*.

Παράδειγμα Ἔστω S τό σύνολο τῶν πινάκων διάστασης $m \times n$ καί G ἡ *πλήρης γραμμική ὁμάδα* τοῦ m-διάστατου διανυσματικοῦ χώρου $V_m(K)$, δηλ. ἡ G ἀποτελεῖται ἀπό μετασχηματισμούς τοῦ S τῆς μορφῆς (3.2)

$$S \ni A \longmapsto PA \in S$$

ὅπου ὁ P εἶναι ἀντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας. Δηλαδή ἡ G εἶναι ἰσόμορφη πρός τό σύνολο τῶν $m \times m$ ἀντιστρέψιμων πινάκων (ἐφοδιασμένο μέ τόν πολ/σιασμό) ἤ, ἰσοδύναμα,

* Οἱ πίνακες στούς ὁποίους θ' ἀναφερόμαστε θά ἔχουν στοιχεῖα ἀπό κάποιο σῶμα K, πού ἄν δέν τό συγκεκριμενοποιοῦμε, σημαίνει ὅτι μπορεῖ νά εἶναι τυχόν.

ἰσόμορφη πρὸς τὸ σύνολο τῶν ἀντιστρεψίμων γραμμικῶν τελεστῶν ἐπὶ τοῦ $V_m(K)$, ἐξ οὗ καὶ τὸ ὄνομα τῆς G. Τὸ ὅτι οἱ $A, B \in S$ εἶναι ἰσοδύναμοι ὑπὸ τὴ G σημαίνει ὅτι οἱ A, B εἶναι γραμμοϊσοδύναμοι. Πράγματι, ἂν οἱ A, B εἶναι γραμμοϊσοδύναμοι, τότε ἡ ὕπαρξη ἀντιστρεψίμου πίνακα P τέτοιου ὥστε $B = PA$, ἐξασφαλίζεται ἀπ᾽ τὸ θεώρημα 4.17 σελ. 32 τοῦ Morris. Ἀντίστροφα, ἂν $B = PA$ καὶ ὁ P εἶναι $m \times m$ ἀντιστρέψιμος πίνακας τότε (πόρισμα 2, σελ. 32-33 τοῦ Morris) $P = E_1 \cdots E_k$, ὅπου οἱ E_i εἶναι στοιχειώδεις $m \times m$ πίνακες. Τότε ὅμως $B = E_1 \cdots E_k A$ καὶ πολ/σιασμὸς ἑνὸς πίνακα ἐπὶ στοιχειώδη πίνακα σημαίνει μετάβαση ἀπ᾽ τὸν ἀρχικὸ πίνακα σ᾽ ἕνα γραμμοϊσοδύναμό του. Ἕνα σύνολο κανονικῶν μορφῶν εἶναι τὸ σύνολο τῶν $m \times n$ ἀνηγμένων κλιμακωτῶν πινάκων, δεδομένου ὅτι ἂν R εἶναι ὁ ἀνηγμένος κλιμακωτὸς πίνακας τοῦ $A \in S$ τότε ὑπάρχει ἀντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας τέτοιος ὥστε $R = PA$ (βλ. πόρισμα 1, σελ. 32 τοῦ Morris). Τέλος, ἂν $F : S \longrightarrow \mathbb{N}_0$ εἶναι ἡ ἀπεικόνιση πού σὲ κάθε $A \in S$ ἀντιστοιχεῖ τὸ βαθμὸ τοῦ A (= βαθμὸς τοῦ A ὡς πρὸς τὶς γραμμές = βαθμὸς τοῦ A ὡς πρὸς τὶς στῆλες · βλ. θεώρημα 4.21, σελ. 126 τοῦ Morris), τότε ἡ F εἶναι ἀναλλοίωτη, διότι γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες ἔχουν τὸν ἴδιο βαθμὸ ὡς πρὸς τὶς γραμμές. Ὅμως τὸ $\{F\}$ δὲν εἶναι πλῆρες σύστημα ἀναλλοιώτων, ἀφοῦ εἶναι δυνατὸν δυὸ πίνακες ἀπ᾽ τὸ S νὰ ἔχουν τὸν ἴδιο βαθμό, δίχως νὰ εἶναι γραμμοϊσοδύναμοι.

<u>Παράδειγμα.</u> Ἔστω S τὸ σύνολο τῶν $m \times n$ πινάκων καὶ (3.3) G ἡ ὁμάδα τῶν μετασχηματισμῶν τοῦ S τῆς μορφῆς

$$S \ni A \longmapsto PAQ \in S,$$

ὅπου P, Q εἶναι ἀντιστρέψιμοι πίνακες διαστάσεως $m \times m$ καὶ $n \times n$, ἀντιστοίχως. Ἰσοδυναμία τῶν $A, B \in S$ ὑπὸ τὴ G σημαίνει ὅτι οἱ A, B παριστάνουν τὴν αὐτὴ γραμμικὴ ἀπεικόνιση $V_n(K) \longrightarrow V_m(K)$, ὡς πρὸς κατάλληλες βάσεις (ἄσκηση 1.). Λόγῳ τοῦ θεωρήματος 4.19, σελ. 37 τοῦ Morris, ἕνα σύνολο κανονικῶν μορφῶν εἶναι τὸ σύνολο τῶν $m \times n$ διαγωνίων πινάκων, μὲ διαγώνια στοιχεῖα ἀποκλειστικὰ 1 καὶ 0, ὅπου, ὅλα τά 1 προηγοῦνται ὅλων τῶν 0. Τό πλῆθος τῶν 1 στή διαγώνιο τῆς κανονικῆς μορφῆς τοῦ $A\in S$ ἰσοῦται μέ τό βαθμό τοῦ A (βλ. σελ. 39 τοῦ Morris). Ἡ ἀπεικόνιση $F: S \longrightarrow \mathbb{N}_0$ πού σέ κάθε $A\in S$ ἀντιστοιχεῖ τό βαθμό του εἶναι, συνεπῶς, ἀναλλοίωτος. Ἐπιπλέον, τό $\{F\}$ εἶναι πλῆρες σύστημα ἀναλλοιώτων (ἐνῶ στό παράδειγμα 3.2 δέν ἦταν· βλ. ἄσκηση 2).

Παράδειγμα Ἔστω S τό σύνολο τῶν $n\times n$ πινάκων καί G ἡ ὁμάδα τῶν μετασχηματισμῶν τοῦ S τῆς μορφῆς (3.4)

$$S \ni A \longmapsto P^{-1}AP \in S$$

ὅπου P εἶναι ἀντιστρέψιμος $n\times n$ πίνακας. Σ' αὐτή τήν περίπτωση, ἰσοδυναμία τῶν $A, B\in S$ ὑπό τή G σημαίνει ὅτι οἱ A, B παριστάνουν τήν ἴδια γραμμική ἀπεικόνιση $V_n(K)\longrightarrow V_n(K)$, ὡς πρός κατάλληλα ἐκλεγμένες βάσεις (Θεώρημα 4.6, σελ. 106 τοῦ Morris). Αὐτό, λόγῳ καί τοῦ θεωρήματος 4.18, σελ. 125 τοῦ Morris, σημαίνει ὅτι ἡ ἀπεικόνιση $F_1: S\longrightarrow\mathbb{N}_0$, πού στόν $A\in S$ ἀντιστοιχεῖ τό βαθμό του εἶναι ἀναλλοίωτος. Ἡ ἀπεικόνιση F_2 πού σέ κάθε $A\in S$ ἀντιστοιχεῖ τό σύνολο τῶν n μιγαδικῶν ἰδιοτιμῶν τοῦ A (λογαριάζοντας πολλαπλότητες) εἶναι, ἐπίσης, μιά ἄλλη ἀναλλοίωτος. Ἀλλά τό $\{F_1, F_2\}$ δέν εἶναι πλῆρες σύστημα ἀναλλοιώτων. Ἕνα πολύ σημαντικό πρόβλημα τῆς Γραμμικῆς Ἄλγεβρας εἶναι ἡ εὕρεση ἑνός συνόλου κανονικῶν μορφῶν σ' αὐτή τήν περίπτωση. Ἡ ἀπάντηση γιά τήν περίπτωση $K=\mathbb{C}$ θά δοθεῖ στό ἑπόμενο κεφάλαιο.

Παράδειγμα Ἔστω $K=\mathbb{R}$ καί S τό σύνολο τῶν $n\times n$ συμμετρικῶν πινάκων καί G ἡ ὁμάδα μετασχηματισμῶν τοῦ S τῆς μορφῆς (3.5)

$$S\ni A \longrightarrow P^{-1}AP = P^{t}AP,$$

ὅπου P εἶναι ὀρθογώνιος $n\times n$ πίνακας. Ἰσοδυναμία τῶν $A,B\in S$ ὑπό τή G σημαίνει ὅτι μέ μιά ὀρθογώνια ἀλλαγή μεταβλητῶν, ἡ τετραγωνική μορφή πού παριστάνει ὁ A μετασχηματίζεται στήν τετραγωνική μορφή πού παριστάνει ὁ B. Ὑπενθυμίζομε ὅτι οἱ ὀρθογώνιοι μετασχηματισμοί χαρακτηρίζονται ἀπό διατήρηση τῶν μηκῶν (Θεώρημα 2.15)

Μέ τή βοήθεια τοῦ θεωρήματος 2.2 μπορεῖ ν' ἀποδειχτεῖ ὅτι τό σύνολο τῶν διαγωνίων $n \times n$ πινάκων τῶν ὁποίων τά διαγώνια στοιχεῖα γράφονται κατ' αὔξουσα τάξη (ἐπιτρέπονται ἐπαναλήψεις) εἶναι ἕνα σύνολο κανονικῶν μορφῶν (ἄσκηση 3). Γιά ἕνα πίνακα $A \in S$ τά διαγώνια στοιχεῖα τῆς κανονικῆς μορφῆς τοῦ A εἶναι οἱ ἰδιοτιμές τοῦ A (εἶναι πραγματικές σύμφωνα μέ τήν ἄσκηση 3 τοῦ κεφαλαίου 1) γραμμένες κατ' αὔξουσα τάξη, καθεμιά τόσες φορές ὅσες δείχνει ἡ πολλαπλότητά της. Συνεπῶς ἡ συνάρτηση F πού σέ κάθε $A \in S$ ἀντιστοιχεῖ τή διατεταγμένη n-άδα τῶν ἰδιοτιμῶν τοῦ A, γραμμένων ὅπως παραπάνω, ἀποτελεῖ ἕνα πλῆρες σύστημα ἀναλλοιώτων.

Δύο ἀκόμη παραδείγματα δίνονται στίς ἀσκήσεις 4 καί 5.

Ἀσκήσεις τοῦ Κεφαλαίου 3.

1. Δείξτε ὅτι δύο πίνακες A, B διάστασης $m \times n$, μέ στοιχεῖα ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σῶμα K συνδέονται μέ μιά σχέση τῆς μορφῆς $B = PAQ$, ὅπου οἱ P, Q εἶναι ἀντιστρέψιμοι πίνακες διάστασης $m \times m$ καί $n \times n$, ἀντιστοίχως, ἄν καί μόνο ἄν ὑπάρχουν βάσεις $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ τοῦ $V_m(K)$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ τοῦ $V_n(K)$ καί γραμμική ἀπεικόνιση $T: V_n(K) \longrightarrow V_m(K)$ ἔτσι ὥστε ὁ πίνακας τῆς T ὡς πρός τίς $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}$ εἶναι A καί ὁ πίνακας τῆς T ὡς πρός τίς $\mathcal{F}'$, $\mathcal{E}'$ εἶναι B.
2. Δείξτε ὅτι ὑπάρχει περίπτωση δύο πίνακες νά μήν εἶναι ἰσοδύναμοι ὑπό τήν ἔννοια τοῦ παραδείγματος 3.2 καί ὅμως νά ἔχουν τόν ἴδιο βαθμό. Δείξτε ὅμως ὅτι ἄν δύο πίνακες ἔχουν τόν ἴδιο βαθμό, τότε εἶναι ἰσοδύναμοι ὑπό τήν ἔννοια τοῦ (3.3).
3. Μέ τή βοήθεια τοῦ θεωρήματος 2.2 καί τῆς ἄσκησης 7 τοῦ Κεφαλαίου 1 ἀποδείξτε ὅτι για κάθε πραγματικό συμμετρικό πίνακα A ὑπάρχει πραγματικός ὀρθογώνιος πίνακας P, τέτοιος ὥστε ὁ πίνακας $P^t A P$ εἶναι πραγματικός, διαγώνιος, τοῦ ὁποίου τά στοιχεῖα τῆς διαγωνίου εἶναι οἱ ἰδιοτιμές τοῦ A (λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς πολλαπλότητας), κατ' αὔξουσα τάξη γραμμένες, ἀπό πάνω πρός τά κάτω.
4. Ἔστω S τό σύνολο τῶν πραγματικῶν συμμετρικῶν $n \times n$ πινάκων καί G ἡ ὁμάδα μετασχηματισμῶν τοῦ S, πού ἀποτελεῖται ἀπό ἀπεικονίσεις τῆς μορφῆς $S \ni A \longmapsto P^t A P \in S$ μέ P $n \times n$ ἀντιστρέψιμο πίνακα. Δῶστε ἑρμηνεία τοῦ τί σημαίνει ὅτι οἱ πίνακες $A, B \in S$ εἶναι ἰσοδύναμοι ὑπό τή G, περιγράψτε ἕνα σύνολο κανονικῶν μορφῶν τοῦ S ὑπό τή G καί βρεῖτε ἕνα πλῆρες σύστημα ἀναλλοιώτων. (Ὑπόδειξη: Λάβετε ὑπ' ὄψη τό Θεώρημα 2.25 καί τό πόρισμα 2.34)
5. Ὅμοια ἄσκηση ὅπως ἡ 4. (δίχως ἑρμηνεία τῆς ἰσοδυναμίας), ὅπου τώρα S εἶναι τό σύνολο τῶν ἑρμιτιανῶν (μιγαδικῶν) $n \times n$ πινάκων καί G ἡ ὁμάδα μετασχηματισμῶν τοῦ S, πού ἀποτελεῖται ἀπό ἀπεικονίσεις τῆς μορφῆς $S \ni A \longmapsto (\bar{P})^t A P$ μέ P $n \times n$ ἀντιστρέψιμο πίνακα. (Ὑπόδειξη: Ἄσκηση 6 τοῦ Κεφαλαίου 1)

4. Ἡ κανονικὴ μορφὴ Jordan τοῦ πίνακα ἑνὸς τελεστῆ

Σ' αὐτὸ τὸ κεφάλαιο θεωροῦμε διανυσματικοὺς χώρους πεπερασμένης διαστάσεως ἐπὶ ἑνὸς σώματος K. Γιὰ τὰ σημαντικότερα θεωρήματα θὰ πάρομε $K=\mathbb{C}$ καὶ αὐτὸ θὰ τὸ τονίζομε.

Ὁρισμός. Ἔστω ὁ διανυσματικὸς χῶρος $V=V_n(K)$. Οἱ τελεστὲς S, T ἐπὶ τοῦ V λέγονται ἰσοδύναμοι ἂν ὑπάρχουν βάσεις $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ τοῦ V τέτοιες ὥστε: ὁ πίνακας τοῦ S ὡς πρὸς $\mathcal{E}$ εἶναι ὁ ἴδιος μὲ τὸν πίνακα τοῦ T ὡς πρὸς $\mathcal{F}$. (4.1)

Πρόταση. Οἱ τελεστὲς S, T ἐπὶ τοῦ V εἶναι ἰσοδύναμοι (4.2) ἂν καὶ μόνο ἂν ὑπάρχει ἀντιστρέψιμος τελεστὴς R ἐπὶ τοῦ V εἰς τρόπον ὥστε

$$T=RSR^{-1} \qquad (4.3)$$

(*) βλ. σελ. 33α

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι οἱ S, T εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ $\mathcal{E}=\{e_1,\dots,e_n\}$, $\mathcal{F}=\{f_1,\dots,f_n\}$ εἶναι βάσεις ὅπως στὸ (4.1). Θεωροῦμε τὸ γραμμικὸ τελεστὴ R ἐπὶ τοῦ V, ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ἀπὸ τὴ συνθήκη $Re_i=f_i$, $i=1,\dots,n$. Προφανῶς, ὁ βαθμὸς τοῦ R (βλ. ὁρισμὸ 4.8, σελ. 110 τοῦ Morris) εἶναι n, ἄρα ὁ R εἶναι ἀντιστρέψιμος (Θεώρημα 4.11, σελ. 115 τοῦ Morris). Ἂς συμβολίσομε τώρα μὲ (c_{ij}) τὸν κοινὸ πίνακα τῶν S καὶ T. Τότε

$$R^{-1}TRe_i=R^{-1}Tf_i=R^{-1}(c_{1i}f_1+c_{2i}f_2+\dots+c_{ni}f_n)=$$

$$=c_{1i}R^{-1}f_1+c_{2i}R^{-1}f_2+\dots+c_{ni}R^{-1}f_n=c_{1i}e_1+c_{2i}e_2+\dots+c_{ni}e_n=$$

$=Se_i$. Δηλ. $R^{-1}TRe_i=Se_i$ $\forall\, i=1,\dots,n$, ἀπ' ὅπου $R^{-1}TR=S$, ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν (4.3).

Ἀντίστροφα, ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ (4.3) καὶ (c_{ij}) εἶναι ὁ πίνακας τοῦ S ὡς πρὸς μιὰ βάση $\mathcal{E}=\{e_1,\dots,e_n\}$. Θεωρῶ τὴ βάση $\mathcal{F}=\{f_1,\dots,f_n\}$, ὅταν $f_i=Re_i$, $i=1,\dots,n$. Διαπιστώνεται ἀμέσως ὅτι ὁ πίνακας τοῦ T ὡς πρὸς τὴν $\mathcal{F}$ εἶναι, ἐπίσης, (c_{ij}). □

Ἕνα εὔλογο ἐρώτημα ποὺ τίθεται εἶναι τὸ ἑξῆς: Ἂν ἔχομε τοὺς πίνακες τῶν S, T ὡς πρὸς τὴν ἴδια βάση, πῶς μποροῦμε ν' ἀποφασίζομε ἂν οἱ τελεστὲς S καὶ T εἶναι ἰσοδύναμοι; (*) βλ. σελ. 33α

Σ' αὐτὸ τὸ κεφάλαιο θὰ δοῦμε ὅτι, στὴν περίπτωση ποὺ $K = \mathbb{C}$, ἂν δοθεῖ ὁποιοσδήποτε τελεστὴς T ἐπὶ τοῦ V, μποροῦμε νὰ ἔχομε τὸν πίνακα τοῦ T, ὡς πρὸς κατάλληλη βάση, ὅσο γίνεται πιὸ ἁπλὸ στὴ μορφὴ (μορφὴ Jordan). Αὐτὸς ὁ πίνακας θὰ λέγεται πίνακας Jordan τοῦ T. Ἔτσι, ἀπ' τὸν ὁρισμὸ τῆς ἰσοδυναμίας τελεστῶν, ἂν δυὸ τελεστὲς S, T ἔχουν τὸν ἴδιο πίνακα Jordan, τότε, προφανῶς, θὰ εἶναι ἰσοδύναμοι. Θὰ δείξομε, ἐπίσης, καὶ τὸ ἀντίστροφο· ἰσοδύναμοι τελεστὲς ἔχουν τὸν ἴδιο πίνακα Jordan. Ἐπιπλέον, θὰ δείξομε πῶς μποροῦμε, ἔχοντας τὸν πίνακα τοῦ T ὡς πρὸς μιὰ ὁποιαδήποτε βάση, νὰ βροῦμε τὸν πίνακα Jordan τοῦ T. Αὐτὸ ἔχει τὴν ἑξῆς ἄμεση συνέπεια: Ἂν ξέρομε τοὺς πίνακες τῶν S καὶ T, τὸν καθένα ὡς πρὸς μιὰ τυχοῦσα βάση, τότε ὑπάρχει μιὰ διαδικασία μὲ τὴν ὁποία μποροῦμε ν' ἀποφασίσομε ἂν οἱ S, T εἶναι ἰσοδύναμοι. Αὐτό, εἰδικώτερα, ἀπαντάει στὸ ἐρώτημα ποὺ εἶχε τεθεῖ, πρίν.

Ὁρισμός. Ὁ τελεστὴς S ἐπὶ τοῦ V λέγεται μηδενοδύναμος ἂν ὑπάρχει θετικὸς ἀκέραιος q, τέτοιος ὥστε $S^q x = 0$ $\forall x \in V$. Ὁ ἐλάχιστος τέτοιος q λέγεται δείκτης τοῦ S. (4.4)

Πρόταση. Ἂν ὁ τελεστὴς S ἐπὶ τοῦ V εἶναι μηδενοδύναμος δείκτη q καὶ $x \neq 0$ εἶναι ἕνα στοιχεῖο τοῦ V γιὰ τὸ ὁποῖο $S^{q-1}x \neq 0$, τότε τὰ διανύσματα $x, Sx, \ldots, S^{q-1}x$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα καὶ ὁ ὑπόχωρος, ἔστω U, τὸν ὁποῖο παράγουν εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπ' τὸν S (δηλ. $S(U) \subseteq U$). (4.5)

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι τὰ διανύσματα $x, Sx, \ldots, S^{q-1}x$ ἦταν ἐξαρτημένα καὶ $a_0 x + a_1 Sx + \cdots + a_{q-1} S^{q-1}x = 0$, ὅπου τὰ a_i δὲν εἶναι ὅλα 0. Ἔστω $j \geq 0$ ὁ ἐλάχιστος δείκτης γιὰ τὸν ὁποῖο $a_j \neq 0$. Λόγῳ τῆς ὑποθέσεως θὰ εἶναι $j < q-1$. Ἄρα, $S^j x = b_{j+1} S^{j+1}x + \cdots + b_{q-1} S^{q-1}x$, ὅπου $b_i = -a_i/a_j$, $i = j+1, \ldots, q-1$.

Δηλαδή, $S^j x = S^{j+1} y$ γιὰ κάποιο $y \in V$. Τότε ὅμως

$S^{q-1}x = S^{q-j-1} S^j x = S^{q-j-1} S^{j+1} y = S^q y = 0$, ποὺ ἀντίκειται στὴν ὑπόθεση ὅτι $S^{q-1}x \neq 0$.

σελ. 32 (*) Δηλαδή, οἱ τελεστές S καί T εἶναι ἰσοδύναμοι ἄν καί μόνο ἄν οἱ πίνακές τους ὡς πρός τήν ἴδια βάση εἶναι ὅμοιοι.

σελ. 33 (*) Σημείωση. Σύμφωνα μέ τό (*) τῆς σελ. 32, τό ἐρώτημα τίθεται ἰσοδύναμα ὡς ἑξῆς: Ἄν δοθοῦν δύο τετραγωνικοί πίνακες τῆς ἴδιας διάστασης, πῶς θ' ἀποφασίσομε ἄν αὐτοί εἶναι ὅμοιοι;

Ὅσον ἀφορᾷ στό δεύτερο ἰσχυρισμό τῆς πρότασης, αὐτός εἶναι προφανής. □

Πρόταση. Μέ τις ὑποθέσεις τῆς πρότασης 4.5, ὑπάρχει ἕνας ἀναλλοίωτος ἀπ' τόν S ὑπόχωρος W τοῦ V, τέτοιος ὥστε $V=U\oplus W$. (4.6)

Ἀπόδειξη. Ἐπαγωγικά ἐπί τοῦ δείκτη q τοῦ S: Ἄν $q=1$, τότε ὁ S εἶναι ὁ μηδενικός τελεστής καί $U=\langle x\rangle$, ὅπου $x\neq 0$. Συμπληρώνομε τό x σέ μιά βάση $\{x, e_2, \dots, e_n\}$ καί θέτομε $W=\langle e_2,\dots,e_n\rangle$. Προφανῶς τότε $V=U\oplus W$ καί ὁ W εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπ' τό μηδενικό τελεστή S.

Ἔστω τώρα ὅτι ἡ πρόταση ἔχει ἀποδειχτεῖ γιά ὅλους τούς μηδενοδύναμους τελεστές δείκτη $q-1$ $(q\geq 2)$ κι ἄς θεωρήσομε ἕνα μηδενοδύναμο τελεστή S δείκτη q ἐπί ἑνός χώρου V. Θέτω $Z=S(V)$. Εὔκολα φαίνεται ὅτι ὁ ὑπόχωρος Z εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπ' τόν S καί ὁ $S|Z$ εἶναι μηδενοδύναμος τελεστής ἐπί τοῦ Z, δείκτη $q-1$ (ἄσκηση 1). Ἄν x καί U εἶναι ὅπως στήν πρόταση 4.5 καί θέσω $Sx=y\in Z$ καί $U_0=U\cap Z$, τότε ὁ ὑπόχωρος τοῦ Z, πού παράγεται ἀπ' τά $y, Sy, \dots, S^{q-2}y$ εἶναι ὁ U_0 (ἄσκηση 2). Ἄρα, ἀπ' τήν ἐπαγωγική ὑπόθεση θά εἶναι

$$Z=U_0\oplus W_0,\quad W_0 \text{ ἀναλλοίωτος ἀπ' τόν } S \text{ ὑπόχωρος τοῦ } Z.$$

Θέτω

$$W_1=\{v\in V : Sv\in W_0\},\quad W_1 \text{ ὑπόχωρος τοῦ } V.$$

Ἰσχύει

$$U+W_1=V \tag{4.7}$$

Ἀπόδειξη τῆς (4.7): Ἔστω $v\in V$. Τότε $Sv\in Z=U_0\oplus W_0$, ἄρα $Sv=u_0+w_0$, ὅπου $u_0\in U_0$ καί $w_0\in W_0$. Τό u_0 μπορεῖ νά γραφτεῖ $u_0=c_0y+c_1Sy+\dots+c_{q-2}S^{q-2}y=c_0Sx+c_1S^2x+\dots+c_{q-2}S^{q-1}x=$

$=Su$, γιά κάποιο $u\in U$. Συνεπῶς $Sv=Su+w_0$, ὁπότε $S(v-u)=w_0\in W_0$ καί, ἐξ ὁρισμοῦ τοῦ W_1, $v-u=w_1\in W_1$. Δηλ. $v=u+w_1$ μέ $u\in U$ καί $w_1\in W_1$, πού ἀποδεικνύει τήν (4.7).

Ἀποδεικνύομε τώρα ὅτι οἱ ὑπόχωροι U καί W_0 εἶναι ξένοι, δηλ.

$$U\cap W_0=\{0\}. \tag{4.8}$$

Ἀπόδειξη τῆς (4.8): Ἔστω $v\in U\cap W_0$. Ἐπειδή ὁ U εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπ' τόν S, θά εἶναι $Sv\in U$ καί, ἐξ ὁρισμοῦ τοῦ Z,

$Su \in Z$, ἄρα $Su \in U \cap Z = U_0$. Ἐπίσης, ὁ W_0 ἔχει ὑποτεθεῖ ἀναλλοίωτος ἀπ' τόν S, ἄρα $Su \in W_0$. Συνεπῶς $Su \in U_0 \cap W_0 = \{0\}$.
Ἀφ' ἑτέρου, μιά καί $u \in U$, ἄς θέσουμε $u = a_0 x + a_1 Sx + \dots + a_{q-1} S^{q-1}x$, ὁπότε $0 = Su = a_0 Sx + a_1 S^2x + \dots + a_{q-2} S^{q-1}x$, καί λόγῳ τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν $Sx, \dots, S^{q-1}x$, $a_0 = a_1 = \dots = a_{q-2} = 0$. Ἔτσι, $u = a_{q-1} S^{q-1}x = a_{q-1} S^{q-2}y \in U_0$. Ὑποθέσαμε ὅμως στήν ἀρχή ὅτι $u \in W_0$, ὁπότε $u \in U_0 \cap W_0 = \{0\}$, πού ἀποδεικνύει τήν (4.8).
Τώρα παρατηροῦμε ὅτι

$$W_0 \text{ ὑπόχωρος τοῦ } W_1 \tag{4.9}$$

Διότι $w \in W_0 \Rightarrow Sw \in W_0$ (ὁ W_0 εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπ' τόν S).
Ἐξ ὁρισμοῦ τοῦ W_1, $Sw \in W_0 \Rightarrow w \in W_1$.
Ἐπίσης,

$$U \cap W_1 \text{ ὑπόχωρος τοῦ } W_1, \text{ ξένος πρός τόν } W_0, \tag{4.10}$$

διότι $(U \cap W_1) \cap W_0 = U \cap W_0 = \{0\}$, ἀπ' τήν (4.8).
Ἔστω τώρα

$$W_1 = W_0 \oplus (U \cap W_1) \oplus W_2$$

γιά κάποιο κατάλληλο ὑπόχωρο W_2 τοῦ W_1. Θέτω

$$W = W_0 \oplus W_2, \text{ ὁπότε } W_1 = (U \cap W_1) \oplus W \tag{4.11}$$

Ἰσχυρίζομαι ὅτι

$$V = U + W. \tag{4.12}$$

Πράγματι, ἀπ' τήν (4.7), $v \in V \Rightarrow v = u + w_1$ μέ $u \in U$ καί $w_1 \in W_1$.
Ὅμως, ἀπ' τήν (4.11), $w_1 = u' + w$ μέ $u' \in U \cap W_1$ καί $w \in W$, ἄρα $v = (u + u') + w$, πού ἀποδεικνύει τήν (4.12).
Ἐπίσης,

$$U \cap W = \{0\}, \tag{4.13}$$

διότι $v \in U \cap W \Rightarrow v \in U \cap W_1$ καί $v \in W$ ἄρα, ἀπ' τήν (4.11), $v = 0$.
Ἀπ' τίς (4.12) καί (4.13) συμπεραίνομε ὅτι $V = U \oplus W$.
Τέλος, $W \subseteq W_1$, ἄρα $S(W) \subseteq S(W_1) \subseteq W_0 \subseteq W$, πού ἀποδεικνύει ὅτι ὁ ὑπόχωρος W εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπ' τόν S.

□

Θεώρημα Έστω S ένας μηδενοδύναμος τελεστής επί του V. Τότε υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $r, q_1, \dots, q_r$ και $x_1, \dots, x_r \in V$, έτσι ώστε: (i) $q_1 \geq \dots \geq q_r$, (ii) τα διανύσματα (4.14)

$$\begin{array}{c} x_1, Sx_1, \dots, S^{q_1-1}x_1 \\ x_2, Sx_2, \dots, S^{q_2-1}x_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_r, Sx_r, \dots, S^{q_r-1}x_r \end{array}$$

αποτελούν βάση του V, και (iii) $S^{q_i}x_i = 0$, $\forall\, i=1,\dots,r$.

Απόδειξη. Έστω ότι ο δείκτης του S είναι q_1 και $x_1 \in V$, τέτοιο ώστε $S^{q_1-1}x_1 \neq 0$. Αν θέσομε $U_1 = \langle x_1, Sx_1, \dots, S^{q_1-1}x_1 \rangle$ τότε, απ' την πρόταση 4.6, υπάρχει υπόχωρος V_1 του V, αναλλοίωτος απ' τον S, τέτοιος ώστε $V = U_1 \oplus V_1$. Ο περιορισμός του S στον V_1 είναι, φυσικά, μηδενοδύναμος τελεστής επί του V_1 του οποίου ο δείκτης, έστω q_2, είναι $\leq q_1$. Έστω $x_2 \in V_1$, τέτοιο ώστε $S^{q_2-1}x_2 \neq 0$. Εφαρμόζοντας πάλι την πρόταση 4.6 στο χώρο V_1, συμπεραίνομε ότι $V_1 = U_2 \oplus V_2$, όπου $U_2 = \langle x_2, Sx_2, \dots, S^{q_2-1}x_2 \rangle$ και ο V_2 είναι αναλλοίωτος απ' τον S υπόχωρος του V_1. Συνεπώς $V = U_1 \oplus U_2 \oplus V_2$ και, προφανώς, $\dim(V) > \dim(V_1) > \dim(V_2)$. Αν συνεχίσομε την ίδια διαδικασία, εφαρμόζοντας την πρόταση 4.6 στο χώρο V_2, κ.ο.κ. βλέπομε ότι κάποτε θα σταματήσομε, λόγω του ότι ο V είναι χώρος πεπερασμένης διαστάσεως και $\dim(V) > \dim(V_1) > \dim(V_2) > \dots$, και τότε θα έχομε οδηγηθεί στην εξής κατάσταση:

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_r, \qquad (4.15)$$

όπου (α) ο δείκτης του S επί του U_i είναι q_i $(i=1,\dots,r)$ με $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_r$, (β) $U_i = \langle x_i, Sx_i, \dots, S^{q_i-1}x_i \rangle$ με $S^{q_i-1}x_i \neq 0$ $(i=1,\dots,r)$. Απ' την πρόταση 4.5 τα $x_i, Sx_i, \dots, S^{q_i-1}x_i$ αποτελούν βάση του U_i άρα, λόγω της (4.15) το σύνολο $\bigcup_{i=1}^{r}\{x_i, Sx_i, \dots, S^{q_i-1}x_i\}$ είναι βάση του V και η απόδειξη του θεωρήματος είναι τώρα πλήρης. □

<u>Θεώρημα.</u> Ἔστω T γραμμικός τελεστής ἐπί τοῦ V. Τότε, (4.16)
ὑπάρχουν δύο ὑπόχωροι U καί W τοῦ V τέτοιοι ὥστε:
(i) $V = U \oplus W$, (ii) οἱ U, W εἶναι ἀναλλοίωτοι ἀπ' τόν T, καί
(iii) ὁ περιορισμός τοῦ T στόν U εἶναι μηδενοδύναμος τελεστής,
ἐνῶ ὁ περιορισμός τοῦ T στόν W εἶναι ἀντιστρέψιμος τελεστής.

Ἀπόδειξη. Γιά κάθε $k=1,2,\dots$ θεωροῦμε τό μηδενόχωρο Z_k τοῦ τελεστή T^k. Προφανῶς $Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq Z_3 \subseteq \dots \subseteq V$ καί ἐπειδή ὁ V εἶναι πεπερασμένης διαστάσεως θά πρέπει ἡ ἀκολουθία $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ νά εἶναι τελικῶς σταθερά. Δηλαδή γιά κάποιο δείκτη q ἔχομε

$$Z_q = Z_{q+j} \quad \forall\, j=1,2,\dots \tag{4.17}$$

Θέτομε $U = Z_q$ καί $W = T^q(V)$.
Ὁ U εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπ' τόν T διότι $x\in U \Rightarrow x\in Z_q \Rightarrow$ (λόγῳ τῆς (4.17)) $x \in Z_{q+1} \Rightarrow T^{q+1}x = 0 \Rightarrow T^q Tx = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow Tx \in Z_q = U$.
Ὁ W εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπ' τόν T, διότι $x\in W \Rightarrow x = T^q y$ γιά κάποιο $y\in V$, ἄρα $Tx = T^{q+1}y = T^q Ty \in T^q(V) = W$.
Ἀκόμη, ἰσχύει

$$U \cap W = \{0\}. \tag{4.18}$$

Πράγματι, $x \in U\cap W \Rightarrow T^q x = 0$ καί $x = T^q y$ γιά κάποιο $y\in V$.
Ἄρα $T^{2q}y = T^q T^q y = T^q x = 0$, δηλ. $y \in Z_{2q} = Z_q$, λόγῳ τῆς (4.17). Ἀλλά $y\in Z_q$ σημαίνει $T^q y = 0$, δηλ. $x=0$, καί ἀποδείχτηκε ἡ (4.18).
Τώρα, ἀπ' τό θεώρημα 3.18, σελ. 90 τοῦ Morris, θά ἔχομε
$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U\cap W) =$ (λόγῳ τῆς (4.18))
$= \dim(U) + \dim(W) =$ μηδενικότητα τοῦ T^q +
+ βαθμός τοῦ $T^q = \dim(V)$ (βλ. θεώρημα 4.9, σελ. 110 τοῦ Morris). Ἀλλά ἀφοῦ ὁ ὑπόχωρος $U+W$ τοῦ V ἔχει τήν ἴδια διάσταση μέ τόν V, συμπεραίνομε ὅτι $V = U+W$. Αὐτή ἡ σχέση, σέ συνδυασμό μέ τήν (4.18), δίνει $V = U\oplus W$. Μένει λοιπόν ν' ἀποδείξομε τό (iii).
Γιά κάθε $x \in U = Z_q$ ἔχομε $T^q x = 0$, ἐξ ὁρισμοῦ τοῦ Z_q.
Συνεπῶς ὁ T εἶναι μηδενοδύναμος ἐπί τοῦ U (ἄν καί ὁ

δείκτης του T επί του U μπορεί και να είναι $< q$; δες όμως άσκηση 9).
Τέλος, έστω ότι για κάποιο $x \in W$ είναι $Tx = 0$. Εξ ορισμού του W θα είναι $x = T^q y$ για κάποιο $y \in V$, οπότε $0 = Tx = T^{q+1} y$, δηλ. $y \in Z_{q+1}$. Λόγω της (4.17) τότε, $y \in Z_q$, που σημαίνει $T^q y = 0$, δηλ. $x = 0$. Αυτοί οι συλλογισμοί αποδεικνύουν ότι ο πυρήνας του $T|W$ είναι $\{0\}$. Άρα, απ' το θεώρημα 4.11, σελ. 115 του Morris (δες και τον ορισμό 4.10) έπεται ότι ο $T|W$ είναι αντιστρέψιμος.

□

Θεώρημα. Έστω ο γραμμικός τελεστής T επί του $V = V_n(\mathbb{C})$, του οποίου όλες οι διαφορετικές ιδιοτιμές είναι $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, με αντίστοιχες πολλαπλότητες $m_1, \dots, m_p$. Τότε ο V είναι ευθύ άθροισμα p υποχώρων του $U_1, \dots, U_p$, τέτοιων ώστε: Για κάθε $j \in \{1, \dots, p\}$, ο U_j έχει διάσταση m_j, είναι αναλλοίωτος απ' τον T και ο περιορισμός του $T - \lambda_j$ πάνω στον U_j είναι μηδενοδύναμος τελεστής. (4.19)

Απόδειξη. Για κάθε $j \in \{1, \dots, p\}$ θεωρούμε τον τελεστή $T - \lambda_j$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα για να πάρομε τους αναλλοίωτους απ' τον T_j υποχώρους U_j, W_j, τέτοιους ώστε $V = U_j \oplus W_j$, ο T_j είναι μηδενοδύναμος επί του U_j και αντιστρέψιμος επί του W_j. Θα αποδείξομε πρώτα μερικές ιδιότητες, που αφορούν σ' αυτούς τους υποχώρους:

Κάθε U_j είναι αναλλοίωτος απ' τον T, καθώς κι από κάθε T_i. (4.20)

Πράγματι, αφού ο U_j είναι αναλλοίωτος απ' τον T_j, θα είναι αναλλοίωτος κι από κάθε τελεστή $T_j + c$, όπου c τυχούσα σταθερά. Για $c = \lambda_j$ και για $c = \lambda_j - \lambda_i$, παίρναμε την (4.20).

Ο $T|U_j$ έχει ως ιδιοτιμή τη λ_j και μόνο αυτή. (4.21)

Πράγματι, έστω q ο δείκτης του T_j επί του U_j και $x \in U_j$, $x \neq 0$, τέτοιο ώστε $T_j^{q-1} x = y \neq 0$. Τότε $y \in U_j$ και $T_j y = T_j T_j^{q-1} x = T_j^q x = 0$, άρα $(T - \lambda_j) y = 0$, δηλ. $Ty = \lambda_j y$, που αποδεικνύει ότι η λ_j είναι ιδιοτιμή του $T|U_j$.
Έστω τώρα ότι η $\lambda_i \neq \lambda_j$ ήταν, επίσης, ιδιοτιμή του $T|U_j$. Τότε $Tx = \lambda_i x$ για κάποιο $x \in U_j$, $x \neq 0$, άρα $T_j x = (T - \lambda_j) x = (\lambda_i - \lambda_j) x = \mu x$ με $\mu \neq 0$. Τότε όμως,
$0 = T_j^q x = T_j^{q-1} T_j x = T_j^{q-1} \mu x = \dots = \mu^q x \neq 0$, άτοπο.

Γιά $i \neq j$ $(i,j \in \{1,\dots,p\})$, $r \in \mathbb{N}$ καί $x \in U_j$, $x \neq 0$, ισχύει $T_i^r x \neq 0$ (4.22)
Πράγματι, έστω ότι με τίς υποθέσεις τοῦ (4.22) είχαμε $T_i^r x = 0$.
Δίχως βλάβη τῆς γενικότητας, μποροῦμε νά υποθέσομε ότι

$$T_i^{r-1} x = y \neq 0. \qquad (4.23)$$

Επειδή ὁ U_j είναι αναλλοίωτος απ' τόν T_i (βλ. (4.20)), θά πρέπει $y \in U_j$. Επίσης, $T_i y = T_i^r x = 0$. Αλλά $T_i y = 0$ σημαίνει $Ty = \lambda_i y$, δηλ. ὁ T/U_j έχει ὡς ιδιοτιμή τή $\lambda_i \neq \lambda_j$, πού αντίκειται στήν (4.21).

Κάθε U_j είναι ξένος πρός τόν υπόχωρο πού παράγουν όλοι οἱ υπόλοιποι U_i. (4.24)

Πράγματι, έστω, γιά απλούστευση τοῦ συμβολισμοῦ, ότι $j=1$ καί $x_1 \in U_1 \cap (U_2 + \dots + U_p)$, $x_1 \neq 0$. Τότε

$$x_1 = x_2 + \dots + x_p, \quad x_i \in U_i,\ i=1,\dots,p, \quad x_1 \neq 0 \qquad (4.25)$$

οπότε ένα τουλάχιστον απ' τά $x_2,\dots,x_p$ είναι $\neq 0$. Έστω q ὁ δείκτης τοῦ T_1 επί τοῦ U_1. Τότε, απ' τήν (4.25):

$$0 = T_1^q x_1 = T_1^q x_2 + \dots + T_1^q x_p = y_2 + \dots + y_p, \text{ όπου } y_i = T_1^q x_i,$$

$i=1,\dots,p$. Λόγῳ τοῦ (4.20), $y_i \in U_i$, $i=2,\dots,p$, καί απ' τήν (4.22) καί τό γεγονός ότι κάποια απ' τά $x_2,\dots,x_p$ είναι $\neq 0$, έπεται ότι ένα, τουλάχιστον, απ' τά $y_2,\dots,y_p$ είναι $\neq 0$.
Έστω, δίχως βλάβη τῆς γενικότητας, $y_2 \neq 0$. Τότε

$$y_2 = (-y_3) + \dots + (-y_p), \quad y_i \in U_i,\ i=2,\dots,p, \quad y_2 \neq 0 \qquad (4.26)$$

πού είναι ανάλογη τῆς (4.25), δίχως όμως νά εμφανίζονται τώρα στοιχεῖα τοῦ U_1. Ξεκινώντας απ' τήν (4.26) καί δουλεύοντας όπως στήν περίπτωση τῆς (4.25), προχωροῦμε σέ μιά νέα ισότητα, κ.ο.κ. μέχρις ότου φτάσομε σέ μιά ισότητα τῆς μορφῆς

$$z_{p-1} = z_p, \quad z_i \in U_i,\ i=p-1,p, \quad z_{p-1} \neq 0.$$

Άν r είναι ὁ δείκτης τοῦ T_{p-1} επί τοῦ U_{p-1}, τότε $0 = T_{p-1}^r z_{p-1} = T_{p-1}^r z_p$, ενῶ λόγῳ τοῦ (4.22) πρέπει $T_{p-1}^r z_p \neq 0$, καί καταλήξαμε σέ αντίφαση.

Γιά κάθε $j \in \{1,\dots,p\}$ είναι $\dim(U_j) = m_j$ (4.27)
Πράγματι, αφοῦ $V = U_j \oplus W_j$ καί οἱ U_j, W_j είναι αναλλοίωτοι απ' τόν T, έπεται ότι ὁ πίνακας τοῦ T, ὡς πρός κατάλληλη βάση,

εἶναι $\begin{pmatrix} B_j & 0 \\ 0 & C_j \end{pmatrix}$, ὅπου B_j, C_j εἶναι οἱ πίνακες τοῦ T περιορισμένου στούς ὑποχώρους U_j καί W_j, ἀντιστοίχως (ἄσκηση 5). Συνεπῶς τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_T(\lambda)$ τοῦ T εἶναι ἴσο μέ $\chi_{1j}(\lambda)\cdot\chi_{2j}(\lambda)$, ὅπου χ_{1j}, χ_{2j} εἶναι τά χαρακτηριστικά πολυώνυμα τῶν $T|U_j$ καί $T|W_j$, ἀντιστοίχως. Ἐπειδή ἡ μοναδική χαρακτηριστική τιμή τοῦ $T|U_j$ εἶναι ἡ λ_j, (βλ. (4.21)), ἡ ὁποία δέν εἶναι χαρακτηριστική τιμή τοῦ $T|W_j$ (διότι ὁ $T-\lambda_j$ εἶναι ἀντιστρέψιμος ἐπί τοῦ W_j βλ. ἄσκηση 6), ἕπεται, λόγῳ τῆς $\chi_T(\lambda)=\chi_{1j}(\lambda)\cdot\chi_{2j}(\lambda)$ καί τοῦ γεγονότος ὅτι ὁ παράγοντας $\lambda-\lambda_j$ διαιρεῖ τό $\chi_T(\lambda)$ μέ ἐκθέτη m_j, ἀκριβῶς, ὅτι $\chi_{1j}(\lambda)=(\lambda-\lambda_j)^{m_j}$. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ διάσταση τοῦ πίνακα B_j εἶναι $m_j\times m_j$, ἄρα ἡ διάσταση τοῦ ὑποχώρου U_j εἶναι m_j.

Τώρα μποροῦμε νά δοῦμε εὔκολα ὅτι

$$V = U_1\oplus\cdots\oplus U_p\,, \tag{4.23}$$

διότι ἡ διάσταση τοῦ ὑποχώρου $U_1\oplus\cdots\oplus U_p$ εἶναι $m_1+\cdots+m_p$ = βαθμός τοῦ $\chi_T(\lambda) = n = \dim(V)$, καί λόγῳ τοῦ (4.24). (Δές ἄσκηση 4). □

<u>Θεώρημα.</u> Κάθε τελεστής T ἐπί τοῦ $V=V_n(\mathbb{C})$ ἔχει, ὡς πρός κατάλληλη βάση, πίνακα J τῆς ἑξῆς μορφῆς: (4.29)

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_p \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

ὅπου οἱ $B_1,\dots,B_p$ εἶναι πίνακες ὡς ἑξῆς: p εἶναι τό πλῆθος ὅλων τῶν διαφορετικῶν ἰδιοτιμῶν, ἔστω $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ τοῦ T, ὅπου $|\lambda_1|\geq\dots\geq|\lambda_p|$.* Κάθε πίνακας B_j εἶναι $m_j\times m_j$, ὅπου m_j εἶναι ἡ πολλαπλότητα τῆς ρίζας λ_j στό χαρακτηριστικό πολυώνυμο τοῦ T. Σέ κάθε πίνακα B_j, (i) ὅλα τά στοιχεῖα τῆς κυρίας διαγωνίου εἶναι λ_j, (ii) τά στοιχεῖα τῆς ἀμέσως ἀπό κάτω διαγωνίου εἶναι μόνο 1 καί 0, ὡς ἑξῆς τοποθετημένα: Ὑπάρχει μιά διαδοχή ἀπό $q_{j1}-1$ τό πλῆθος 1, πού ἀκολουθεῖται ἀπό ἕνα μοναδικό 0, ὕστερα μιά ἄλλη

* καί ἄν $|\lambda_i|=|\lambda_{i+1}|$ τότε γράφομε "ψηλότερα" ἐκεῖνον ἀπ' τούς λ_i,λ_{i+1} μέ τό μικρότερο (πρωτεῦον) ὄρισμα (ὄρισμα $\in(-\pi,\pi]$).

διαδοχή ἀπό $q_{j2}-1$ τό πλῆθος 1, ἀκολουθούμενη ἀπό ἕνα μοναδικό 0, κ.ο.κ., ὅπου $q_{j1} \geq q_{j2} \geq \dots$ καί $q_{j1}+q_{j2}+\dots = m_j$.

(iii) ὅλα τά ὑπόλοιπα στοιχεῖα τοῦ B_j εἶναι 0.

Σημείωση. Πίνακας, ὅπως ὁ J πού μόλις περιγράψαμε, λέγεται πίνακας Jordan. Γιά ἕνα τελεστή T χρησιμοποιοῦμε τόν ὅρο βάση Jordan τοῦ T γιά νά ὑποδηλώσομε ἐκείνη τή βάση τοῦ V, ὡς πρός τήν ὁποία ὁ πίνακας τοῦ T παίρνει τή μορφή ἑνός πίνακα Jordan, ὁ ὁποῖος (πίνακας) καί λέγεται πίνακας Jordan τοῦ τελεστή T.

Ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος. Κάνοντας χρήση τῶν συμβολισμῶν καί τῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ θεωρήματος 4.19 ἔχομε $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_p$, ἄρα ὁ πίνακας τοῦ T ὡς πρός βάση $\mathcal{E}_1 \cup \dots \cup \mathcal{E}_p$, ὅπου $\mathcal{E}_j$ εἶναι βάση τοῦ U_j $(j=1,\dots,p)$, εἶναι τῆς μορφῆς (4.30), μέ B_j νά παριστάνει τόν πίνακα τοῦ $T|U_j$ ὡς πρός τή βάση $\mathcal{E}_j$. Ἀπ' τό ἴδιο θεώρημα ἕπεται τότε ὅτι ἡ διάσταση τοῦ B_j εἶναι $m_j \times m_j$. Ἀρκεῖ, λοιπόν, νά βροῦμε τή μορφή τοῦ B_j, ἀφοῦ πρῶτα ἐκλέξομε καταλλήλως τή βάση $\mathcal{E}_j$. Γιά ἁπλούστευση τοῦ συμβολισμοῦ θά παραλείπομε τό δείκτη j. Ἔχομε ἔτσι ἕναν ὑπόχωρο U, διάστασης m, ἀναλλοίωτο ἀπ' τόν T, ἐπί τοῦ ὁποίου ὁ τελεστής $S = T - \lambda$ εἶναι μηδενοδύναμος. Ἐδῶ λ εἶναι ἰδιοτιμή τοῦ T καί m εἶναι ἡ πολλαπλότητα τῆς θεωρούμενης ὡς ρίζας τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου τοῦ T.

Ἐκλέγομε ὡς βάση $\mathcal{E}$ τοῦ U ἐκείνη πού περιγράφεται στήν ἐκφώνηση τοῦ θεωρήματος 4.14 (ὁ V ἐκεῖ ν' ἀντικατασταθεῖ ἀπ' τόν U, πού ἔχομε τώρα). Ἕνας ἄμεσος ὑπολογισμός τώρα δείχνει ὅτι ὁ πίνακας τοῦ S ὡς πρός τήν $\mathcal{E}$ εἶναι

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{matrix}}\; q_1 \times q_1 & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{matrix}}\; q_2 \times q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{matrix}}\; q_r \times q_r \end{pmatrix}$$

ὅπου ἡ διαδοχή τῶν συνεχῶν 0 βρίσκεται ἐπί τῆς κυρίας διαγωνίου καί, προφανῶς, $q_1+q_2+\dots+q_r=m$, ἀφοῦ ἡ διάσταση τοῦ ὑποχώρου U, ἐπί τοῦ ὁποίου δρᾶ ὁ S, εἶναι m.

Ἕπεται τώρα ἀμέσως, ὅτι ὁ πίνακας τοῦ $T=S+\lambda$ εἶναι $B=C+\lambda\cdot I_m$, δηλ. ὁ πίνακας πού προκύπτει ὅταν στόν C ἀντικατασταθοῦν τά 0 τῆς κυρίας διαγωνίου ἀπό λ. Ἔτσι, κάθε B ἔχει τή μορφή, πού περιγράφεται στήν ἐκφώνηση τοῦ θεωρήματος.

$\square$

Ὅπως εἴχαμε ἤδη στή σελ. 33 παρατηρήσει, ἄν δυό τελεστές ἔχουν τόν ἴδιο πίνακα Jordan, τότε οἱ τελεστές αὐτοί εἶναι ἰσοδύναμοι. Διότι τό νά ἔχουν τόν ἴδιο πίνακα Jordan, ἔστω J, σημαίνει ὅτι ὁ καθένας τελεστής ἔχει ὡς πρός κατάλληλη βάση (βάση Jordan τοῦ ἀντίστοιχου τελεστή) τόν ἴδιο πίνακα J. Αὐτό ἀκριβῶς λέει, ἐξ ὁρισμοῦ τῆς ἰσοδυναμίας τελεστῶν, ὅτι οἱ δυό τελεστές εἶναι ἰσοδύναμοι. Αὐτό πού μένει νά δείξομε εἶναι τό ἀντίστροφο:

Θεώρημα Ὅμοιοι* τελεστές ἔχουν τόν ἴδιο πίνακα Jordan. Ἀκριβέστερα: Ἄν οἱ τελεστές T_1, T_2 εἶναι ὅμοιοι καί J_i εἶναι πίνακας Jordan τοῦ T_i $(i=1,2)$, τότε $J_1=J_2$. (4.31)

Γιά τήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος 4.31 θά θεωρήσομε ἕνα γραμμικό τελεστή T ἐπί τοῦ $V=V_n(\mathbb{C})$, ἕνα πίνακα Jordan J τοῦ T, καί θά δείξομε ὅτι ὁ J ἐξαρτᾶται ἀποκλειστικά ἀπ' τήν κλάση ὁμοιότητας τοῦ T. Δηλαδή, ἄν τόν T ἀντικαταστήσει ἀπό ἕναν ὅμοιό του τελεστή, γιά τόν ὁποῖο βροῦμε ἕνα πίνακα Jordan, αὐτός ὁ πίνακας Jordan θά ἰσοῦται μέ τόν J. Εἰδικώτερα, αὐτό δείχνει, σέ συνδυασμό μέ τό θεώρημα 4.29, ὅτι ὁ T ἔχει ἀκριβῶς ἕνα πίνακα Jordan.

Σέ συμφωνία συμβολισμοῦ μέ ἐκεῖνον τοῦ θεωρήματος 4.29, θεωροῦμε ὅτι ὅλες οἱ διαφορετικές ἰδιοτιμές τοῦ T, γραμμένες κατά φθίνουσα ἀπόλυτη τιμή, εἶναι οἱ $\lambda_1,\dots,\lambda_p$, μέ ἀντίστοιχες πολλαπλότητες $m_1,\dots,m_p$. Κατά συνέπεια, ἄν J εἶναι κάποιος πίνακας Jordan τοῦ T, τότε ὁ J θά ἔχει τή μορφή

* Δηλαδή, ἰσοδύναμοι

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & & 0\\ & B_2 & \\ 0 & & \ddots \; B_p\end{pmatrix} \qquad (4.32)$$

στόν ὁποῖο, γιά κάθε $j=1,\dots,p$, ὁ πίνακας B_j εἶναι $m_j\times m_j$, τοῦ ὁποίου ὅλα τά διαγώνια στοιχεῖα εἶναι ἴσα μέ λ_j.
Ἡ ἀμέσως ἀπό κάτω διαγώνιος τοῦ B_j ἀποτελεῖται ἀπό τά ἑξῆς στοιχεῖα, θεωρούμενα ἀπό πάνω πρός τά κάτω: q_{j1} τό πλῆθος 1, ἀκολουθούμενα ἀπό ἕνα 0, μετά q_{j2} τό πλῆθος 1, ἀκολουθούμενα ἀπό ἕνα 0, κ.ο.κ., ὅπου $q_{j1}\geq q_{j2}\geq\dots$.
Ὅλα δέ τά ὑπόλοιπα στοιχεῖα τοῦ B_j εἶναι 0.
Δεδομένου ὅτι ὅμοιοι πίνακες ἔχουν τίς ἴδιες ἰδιοτιμές, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν καί τῆς πολλαπλότητος, τά διαγώνια στοιχεῖα τοῦ B_j ἐξαρτῶνται ἀποκλειστικά ἀπ' τήν κλάση ὁμοιότητος τοῦ T. Αὐτό πού μένει ν' ἀποδείξομε εἶναι ὅτι οἱ μή ἀρνητικοί ἀκέραιοι $q_{j1}, q_{j2},\dots$, πού περιγράψαμε παραπάνω ἐξαρτῶνται ἀποκλειστικά ἀπ' τήν κλάση ὁμοιότητος τοῦ T.
Σύμφωνα μέ τήν ἄσκηση 7., $V=U_1\oplus\dots\oplus U_p$, ὅπου ὁ U_j ἔχει ὡς βάση τήν $e_{j1},\dots,e_{jm_j}$ $(j=1,\dots,p)$· τά διανύσματά της ἀνήκουν στή βάση, ὡς πρός τήν ὁποία ὁ πίνακας τοῦ T εἶναι ὁ (4.32). Κάθε U_j εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπ' τόν T, ὁ δέ πίνακας τοῦ T/U_j ὡς πρός τήν παραπάνω βάση τοῦ U_j, εἶναι ὁ B_j.
Στά παρακάτω θεωροῦμε ἕνα συγκεκριμένο $j\in\{1,\dots,p\}$ καί ἑστιάζομε τήν προσοχή μας στόν ὑπόχωρο U_j, τήν ἀντίστοιχη βάση του, ὅπως παραπάνω καί τόν πίνακα B_j τοῦ T/U_j ὡς πρός αὐτή τή βάση. Γιά ἁπλούστευση τοῦ συμβολισμοῦ παραλείπομε τό δείκτη j, ὁπουδήποτε αὐτός ἐμφανίζεται. Ἔστω $S=T-\lambda$. Εἶναι φανερό ὅτι

T' ὅμοιος πρός τόν $T \Longrightarrow S'=T'-\lambda$ ὅμοιος πρός τόν $S=T-\lambda$. (4.33)

Ὁ πίνακας τοῦ S/U ὡς πρός τή βάση $e_1,\dots,e_m$ τοῦ U εἶναι

$$B = \begin{pmatrix} \begin{array}{|cccc|}\hline 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \; q_1 \times q_1 & & \\ & \begin{array}{|cccc|}\hline 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \; q_2 \times q_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

ἀπ' τόν ὁποῖο γίνεται φανερό ὅτι $Se_1 = e_2$, $Se_2 = e_3, \ldots, Se_{q_1-1} = e_{q_1}$, $Se_{q_1} = 0$ καί ἀνάλογα γιά τά ἑπόμενα q_2 διανύσματα, κ.ο.κ.

Ἔτσι, ἀλλάζοντας καταλλήλως τό συμβολισμό, βλέπομε ὅτι ἡ βάση $e_1, \ldots, e_{q_1}; e_{q_1+1}, \ldots, e_{q_1+q_2}; \ldots, e_m$ τοῦ U ἀποτελεῖται ἀπ' τά ἑξῆς διανύσματα:

$$\left.\begin{array}{l} x_1, Sx_1, \ldots, S^{q_1-1}x_1 ; \text{ μέ } S^{q_1}x_1 = 0 \\ x_2, Sx_2, \ldots, S^{q_2-1}x_2 ; \text{ μέ } S^{q_2}x_2 = 0 \\ \quad \text{κ.ο.κ.}, \end{array}\right\} \qquad (4.34)$$

συνολικά $q_1 + q_2 + \ldots = m$ τό πλῆθος διανύσματα. Ἐδῶ

$$0 \leq \ldots \leq q_2 \leq q_1 \leq m.$$

Μποροῦμε νά δοῦμε καί διαφορετικά τή βάση (4.34), ὡς ἀποτελούμενη ἀπό τά ἑξῆς m ὑποσύνολα διανυσμάτων:
Τό 1ο ἀποτελεῖται ἔστω ἀπό ν_1 τό πλῆθος $x \in U$, $x \neq 0$ μέ $Sx = 0$.
Τό 2ο ἀποτελεῖται ἔστω ἀπό ν_2 τό πλῆθος $x \in U$, $Sx \neq 0$ μέ $S^2x = 0$,
κ.ο.κ., τό m-οστό σύνολο ἀποτελεῖται ἔστω ἀπό ν_m τό πλῆθος $x \in U$, $S^{m-1}x \neq 0$ μέ $S^m x = 0$. Ἐννοεῖται ὅτι κάποια ἀπ' αὐτά τά ὑποσύνολα πιθανόν νά εἶναι κενά. Ἀφοῦ $\nu_i \geq 0$ εἶναι ὁ πληθάριθμος τοῦ i-οστοῦ ὑποσυνόλου, μποροῦμε νά γράψομε τά διανύσματα τῆς βάσης $e_1, \ldots, e_m$ ὡς ἑξῆς:

m-οστό ὑποσύνολο: $x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{m\nu_m}$,

ὅπου, γιά κάθε $i = 1, \ldots, \nu_m$ εἶναι

$S^j x_{mi} \neq 0$ ἄν $j \leq m-1$ ἤ $S^m x_{mi} = 0$

. . .

2ο ὑποσύνολο: $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2\nu_2}$,

ὅπου, γιά κάθε $i = 1, \ldots, \nu_2$ εἶναι

$S^j x_{2i} \neq 0$ ἄν $j = 0, 1$ ἤ $S^2 x_{2i} = 0$

1^{η} διαστήματα: $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1\nu_1}$

όπου, γιά κάθε $i=1,\dots,\nu_1$ είναι

$x_{1i} \neq 0$ & $Sx_{1i} = 0$.

Αυτό που θέλομε ν' αποδείξομε, γιά νά έχομε ολοκληρώσει τήν απόδειξη του θεωρήματος, είναι ότι οι μή αρνητικοί ακέραιοι $\nu_1,\dots,\nu_m$ εξαρτώνται, αποκλειστικά, απ' τήν κλάση ομοιότητος του T ή, ισοδύναμα (λόγω της (4.33)), απ' τήν κλάση ομοιότητος του S.

Άν εφαρμόσομε τήν (πολύ απλή) άσκηση 8 στήν περίπτωση των τελεστών $S|U, S^2|U, \dots, S^m|U$, διαδοχικά, βλέπομε ότι

$$\left.\begin{array}{l} \dim(\operatorname{Ker} S|U) = \nu_1 \\ \dim(\operatorname{Ker} S^2|U) = \nu_1+\nu_2 \\ \text{καί γενικά, γιά κάθε } q=1,\dots,m, \\ \dim(\operatorname{Ker} S^q|U) = \nu_1+\nu_2+\dots+\nu_q \end{array}\right\} \qquad (4.35)$$

Άν θέσομε $\dim(\operatorname{Ker} S^q) = d_q$ $(q=1,\dots,m)$, τότε, όπως θ' αποδείξομε στό τέλος, ισχύει επίσης

$$\dim(\operatorname{Ker} S^q|U) = \dim(\operatorname{Ker} S^q) = d_q. \qquad (4.36)$$

Έτσι, λόγω των (4.35) καί (4.36), έχομε νά λύσομε ένα μή ομογενές $m \times m$ σύστημα, μέ αγνώστους $\nu_1,\dots,\nu_m$, του οποίου ή στήλη των σταθερών είναι $\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$, ενώ ο πίνακας συντελεστών είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

μέ ορίζουσα 1. Απ' τό σύστημα αυτό φαίνεται ότι τά $\nu_1,\dots,\nu_m$ εξαρτώνται, αποκλειστικά, απ' τά $d_1,\dots,d_m$, δηλ. απ' τόν S (λόγω της (4.36)). Είναι όμως φανερό ότι άν ο τελεστής S' είναι όμοιος πρός τόν S, τότε ο S'^q είναι όμοιος πρός τόν S^q, άρα $\dim(\operatorname{Ker} S'^q) = \dim(\operatorname{Ker} S^q) = d_q$. Αυτό ση-

φαίνει ὅτι τά d_q, ἄρα καί τά γ_q, ἐξαρτῶνται ἀποκλειστι-
κά ἀπ' τήν κλάση ὁμοιότητος τοῦ S, τό ὁποῖο ἦταν καί
τό ἀποδεικτέο.

Μένει τώρα ἡ ἀπόδειξη τῆς (4.36).

Ἀρχικά παρατηροῦμε ὅτι: Ἄν λ_1, λ_2 εἶναι διαφορετικές ἰδιοτιμές τοῦ T καί $x \in V$, $x \neq 0$ καί ὑπάρχει θετικός ἀκέραιος r τέτοιος ὥστε $(T-\lambda_2)^r x = 0$, τότε $(T-\lambda_1)^q x \neq 0$ γιά κάθε θετικό ἀκέραιο q. (4.37)

Πράγματι, δίχως βλάβη τῆς γενικότητας, μποροῦμε νά ὑποθέσομε ὅτι r εἶναι ὁ ἐλάχιστος θετικός ἀκέραιος μέ $(T-\lambda_2)^r x = 0$.
Τότε, τά διανύσματα $x, (T-\lambda_2)x, \dots, (T-\lambda_2)^{r-1}x$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα (πρβλ. μέ τήν ἀπόδειξη τῆς πρότασης 4.5).
Ἄν τώρα εἴχαμε $(T-\lambda_1)^q x = 0$ γιά κάποιο θετικό ἀκέραιο q καί θέσομε $\lambda_2-\lambda_1 = d \neq 0$, τότε

$$0 = (T-\lambda_1)^q x = (T-\lambda_2+d)^q x = \sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j} d^{q-j}(T-\lambda_2)^j x =$$

$$= \sum_{j=0}^{r-1}\binom{q}{j} d^{q-j}(T-\lambda_2)^j x \quad (\text{διότι } (T-\lambda_2)^j x = 0 \ \forall j \geq r)$$

καί αὐτό ἔρχεται σέ ἀντίφαση μέ τήν ἀνεξαρτησία τῶν $x, (T-\lambda_2)x, \dots, (T-\lambda_2)^{r-1}x$.

Γιά τήν ἀπόδειξη τῆς (4.36) παρατηροῦμε ὅτι ὁ V ἔχει μιά βάση τῆς μορφῆς $\mathcal{E}_1 \cup \dots \cup \mathcal{E}_p$ ὅπου κάθε $\mathcal{E}_j$ εἶναι σύνολο (ἀνεξαρτήτων) διανυσμάτων τῆς μορφῆς (4.34) (μέ $S = T-\lambda_j$).
Γιά τήν (4.36) ἀρκεῖ ν' ἀποδείξομε ὅτι

$$x \in \ker(T-\lambda_j)^q \implies x \in U_j, \qquad (4.38)$$

ὅπου, ὅπως καί πρίν, $U_j = \langle \mathcal{E}_j \rangle$.

Γιά τήν ἀπόδειξη τῆς (4.38) γράφω $x = y_1+\dots+y_p$ μέ $y_i \in U_i$ $(i=1,\dots,p)$ καί ἀρκεῖ νά ἀποδείξω ὅτι $y_i = 0$ γιά $i \neq j$.
Πράγματι, $0 = (T-\lambda_j)^q x = \sum_{i=1}^{p}(T-\lambda_j)^q y_i$ καί $(T-\lambda_j)^q y_i \in U_i$, ἀφοῦ ὁ U_i εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπ' τόν $(T-\lambda_j)^q$, ὡς ἀναλλοίωτος ἀπ' τόν T. Θά πρέπει τότε $(T-\lambda_j)^q y_i = 0$ $\forall i = 1,\dots,p$. Γιά $i \neq j$ αὐτό σημαίνει ὅτι $y_i = 0$, λόγῳ τοῦ (4.37).

□

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος 4.31 περιέχει ἀρκετά στοιχεῖα, τά ὁποῖα μᾶς ἐπιτρέπουν ν' ἀποδείξομε πολύ εὔκολα τό θεώρημα τῶν Cayley-Hamilton, τό ὁποῖο θά διατυπώσομε ἀφοῦ πρῶτα ὁρίσομε τήν πολυωνυμική τιμή ἑνός τελεστῆ:

Ἔστω ἕνα πολυώνυμο $f(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$,

$$f(\lambda) = a_\nu \lambda^\nu + \dots + a_1\lambda + a_0$$

καί T ἕνας γραμμικός τελεστής ἐπί τοῦ $V = V_n(\mathbb{C})$.

Ὁρίζομε ὡς $f(T)$ τόν τελεστή

$$f(T) = a_\nu T^\nu + \dots + a_1 T + a_0 .$$

Εἶναι εὔκολο νά δεῖ κανείς ὅτι ἄν $\rho_1, \dots, \rho_\nu$ εἶναι οἱ ρίζες τοῦ $f(\lambda)$, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν καί τῆς πολλαπλότητος, ὁπότε $f(\lambda) = a_\nu(\lambda-\rho_1)\cdots(\lambda-\rho_\nu)$, τότε $f(T) = a_\nu(T-\rho_1)\cdots(T-\rho_\nu)$.

Θεώρημα (Cayley-Hamilton). Κάθε γραμμικός τελεστής ἐπί τοῦ V μηδενίζει τό χαρακτηριστικό πολυώνυμό του. (4.39)

Δηλαδή ἄν ὁ T ἔχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_T(\lambda)$, τότε $\chi_T(T) = 0$ (= ὁ μηδενικός τελεστής ἐπί τοῦ V).

Ἀπόδειξη. Ἔστω, ὅπως στήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος 4.31, ὅτι ὅλες οἱ διαφορετικές ἰδιοτιμές τοῦ T εἶναι $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ μέ ἀντίστοιχες πολλαπλότητες $m_1, \dots, m_p$, οὕτως ὥστε

$$\chi_T(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda-\lambda_p)^{m_p}. \qquad (4.40)$$

Μέ τό συμβολισμό καί τά διάφορα ἐπιμέρους ἀποτελέσματα τῆς ἀποδείξεως τοῦ θεωρήματος 4.31 ἔχομε $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_p$, ὅπου γιά κάθε $j = 1, \dots, p$ ὁ $T - \lambda_j | U_j$ εἶναι μηδενοδύναμος δείκτη q_{j1} (πρβλ. μέ (4.34), στήν ὁποία πρέπει νά θυμηθοῦμε ὅτι εἴχαμε παραλείψει τόν δείκτη j), πρᾶγμα πού σημαίνει ὅτι

$$(T-\lambda_j)^{q_{j1}} | U_j = 0 \qquad (4.41)$$

Ἐπιπλέον, εἶναι

$$q_{j1} \leq m_j .$$

Συνεπῶς, ἄν θέσομε

$$\sigma_j(\lambda) = (\lambda-\lambda_j)^{q_{j1}} \quad , j = 1, \dots, p$$

καί

$$\sigma(\lambda) = \sigma_1(\lambda) \cdots \sigma_p(\lambda) ,$$

τότε, λόγῳ καὶ τῆς (4.40),

$$\chi_T(\lambda) = f(\lambda)\cdot\sigma(\lambda) \qquad (4.42)$$

ὅπου $f(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$.

Ἐπιπλέον εἶναι φανερό ὅτι ὁ τελεστής $\sigma(T)$ παραμένει ἀναλλοίωτος ἂν ἐναλλάξομε δύο παράγοντες $\sigma_i(T)$ καί $\sigma_j(T)$. Ἀπό μή, ἡ (4.41) λέει ὅτι

$$\sigma_j(T)|U_j = 0.$$

Ἄρα

$$\sigma(T) = 0. \qquad (4.43)$$

Πράγματι, ἂν $x \in V$, γράφομε $x = x_1 + \cdots + x_p$ μέ $x_j \in U_j$ $(j = 1, \ldots, p)$. Ἄρα $\sigma(T)x = \sigma_p(T)\cdots\sigma_2(T)\sigma_1(T)x =$
$= \sigma_p(T)\cdots\sigma_2(T)\sigma_1(T)(x_1+\cdots+x_p) =$ (λόγῳ τῆς $\sigma_1(T)x_1 = 0$)
$= \sigma_p(T)\cdots\sigma_2(T)\sigma_1(T)(x_2+\cdots+x_p) = \sigma_1(T)\sigma_p(T)\cdots\sigma_2(T)(x_2+\cdots+x_p) =$
$=$ (λόγῳ τῆς $\sigma_2(T)x_2 = 0$) $\sigma_1(T)\sigma_p(T)\cdots\sigma_2(T)(x_3+\cdots+x_p) =$
$= \sigma_2(T)\sigma_1(T)\sigma_p(T)\cdots\sigma_3(T)(x_3+\cdots+x_p) = \cdots$ κ.ὁ.κ.
$= \sigma_{p-1}(T)\cdots\sigma_2(T)\sigma_1(T)\sigma_p(T)x_p = 0.$

Τώρα, ἀπ' τήν (4.42), εἶναι $\chi_T(T) = f(T)\sigma(T)$, πού σέ συνδυασμό μέ τήν (4.43) δίνει $\chi_T(T) = 0$.

□

<u>Ἐφαρμογή</u>. Θά βροῦμε τήν κανονική μορφή Jordan τοῦ πίνακα (4.44)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

τοῦ ὁποίου οἱ ἰδιοτιμές εἶναι $\lambda_1 = 2$ μέ πολλαπλότητα $m_1 = 3$, καί $\lambda_2 = -1$ μέ πολλαπλότητα $m_2 = 2$.

Ἔστω T ὁ τελεστής τοῦ V_5, πού ἀντιστοιχεῖ στόν A (δηλ. ἐξ ὁρισμοῦ, ὁ T ἔχει ὡς πρός τή συνήθη ὀρθοκανονική βάση τοῦ V_5 πίνακα A). Σύμφωνα μέ τό θεώρημα 4.19 εἶναι $V_5 = U_1 \oplus U_2$, ὅπου ὁ U_i εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπ' τόν T, ἔχει διάσταση m_i καί ὁ $T - \lambda_i$ εἶναι μηδενοδύναμος ἐπί τοῦ U_i. Ἡ εὕρεση τοῦ U_i γίνεται, ὅπως λέει ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος 4.19, σύμφωνα μέ τό θεώρημα 4.16.

Ὑπόχωρος U_1: Ὁ μηδενόχωρος τοῦ $T-2$ εἶναι

$$Z_1 = \langle (1,0,-1,1,0),\ (1,-1,-1,0,1) \rangle$$

Εἶναι

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 6 & -9 & -9 \\ 15 & 0 & 6 & -9 & -9 \\ -6 & 0 & 8 & 9 & 9 \\ 15 & 0 & 6 & -9 & -9 \\ -15 & 0 & -6 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$, ἄρα ὁ μηδενόχωρος τοῦ $(T-2)^2$ εἶναι:

$$Z_2 = \langle (1,0,-1,1,0),\ (1,-1,-1,0,1),\ (0,1,0,0,0) \rangle$$

Στή συνέχεια,

$$(A-2I)^3 = \begin{pmatrix} -54 & 0 & -27 & 27 & 27 \\ -54 & 0 & -27 & 27 & 27 \\ 27 & 0 & 0 & -27 & -27 \\ -54 & 0 & -27 & 27 & 27 \\ 54 & 0 & 27 & -27 & -27 \end{pmatrix}$$, ἀπ' ὅπου

$$Z_3 = Z_2 .$$

Ἄρα, κατά τήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος 4.16, θέτομε

$$U_1 = Z_2$$

καί, σύμφωνα μέ τήν ἄσκηση 9, ὁ $T-2|U_1$ ἔχει δείκτη 2.
Τότε ἡ βάση τοῦ U_1 γιά τήν ὁποία μιλεῖ τό θεώρημα 4.14
θά εἶναι τῆς μορφῆς

$$x_1,\ (T-2)x_1 \qquad ((T-2)x_1 \neq 0)$$

$$x_2 \qquad ,\ x_2 \notin \langle x_1, (T-2)x_1 \rangle ,\ (T-2)x_2 = 0$$

καί εὔκολα φαίνεται ὅτι σάν τέτοια x_1, x_2 μποροῦμε νά πάρομε τά $x_1 = (0,1,0,0,0)$ καί $x_2 = (1,0,-1,1,0)$. Ἄρα, ὡς πρός τή βάση

$x_1 = (0,1,0,0,0)$, $(T-2)x_1 = (-1,-1,1,-2,1)$, $x_2 = (1,0,-1,1,0)$,

ὁ $T-2|U_1$ ἔχει πίνακα $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ὁπότε ὁ $T|U_1$ ἔχει,

ὡς πρός τήν ἴδια βάση, πίνακα $B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ὑπόχωρος U_2: Ἐργαζόμαστε ἀνάλογα, μέ τόν τελεστή $T+1$.
Τώρα βρίσκομε: $Z_1 = \langle (1,1,-1,1,-1) \rangle$,
$Z_2 = \langle (1,1,-1,1,-1),\ (0,0,1,0,0) \rangle$ καί $Z_3 = Z_2$,
ὁπότε

$$U_2 = Z_2 \text{ καί ὁ } T+1|U_2 \text{ εἶναι μηδενοδύναμος δείκτη 2.}$$

Συνεπώς, ή βάση τοῦ U_2, για τήν όποία μιλεῖ τό Θεώρημα 4.14 θα είναι της μορφής
$$x_1',\ (T+1)x_1' \qquad ((T+1)x_1' \neq 0).$$
Μπορούμε σάν τέτοιο x_1' να πάρομε τό $x_1'=(0,0,1,0,0)$, όπότε ό πίνακας τοῦ $T|U_2$ ώς πρός τή βάση
$x_1'=(0,0,1,0,0)$, $(T+1)x_1'=(-1,-1,1,-1,1)$ είναι
$$B_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$
Έτσι, ό πίνακας J τοῦ T ώς πρός τή βάση τοῦ V_5
$\{x_1, (T-2)x_1, x_2, x_1', (T+1)x_1'\}$, δηλ. ώς πρός τή βάση
$\{(0,1,0,0,0),(-1,-1,1,-2,1),(1,0,-1,1,0),(0,0,1,0,0),(-1,-1,1,-1,1)\}$
είναι
$$J=\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}$$
καί εύκολα φαίνεται ότι $J=P^{-1}AP$, όπου P είναι ό πίνακας τοῦ όποίου τα διανύσματα-στήλες είναι τα διανύσματα της παραπάνω βάσης, μέ τή σειρά πού γράφτηκαν.

Εφαρμογή. Αναφερόμενοι στό συμβολισμό κλπ. της σελ. 45, (4.45)
βλέπομε ότι άπ' τό έκεῖ γραμμικό σύστημα προκύπτει
$$\nu_i = d_i - d_{i-1}, \quad 2 \le i \le m \qquad (4.46)$$

(είναι $\nu_1 = d_1 =$ τό r τοῦ πίνακα C της σελ. 41), όπου ύποτίθεται ότι έργαζόμαστε σέ κάποιον ύπόχωρο U τοῦ V άπό έκείνους τούς $U_1, \dots, U_p$ τοῦ Θεωρήματος 4.19. Λόγω της (4.35) είναι $d_i = \dim(\mathrm{Ker}\, S^i)$, όπου $S = T-\lambda$ καί λ είναι ή ίδιοτιμή πού άντιστοιχεῖ στόν ύπόχωρο U. Άρα, άν θεωρήσομε τόν πίνακα $A-\lambda I$, όπου A ό πίνακας τοῦ T (ώς πρός κάποια βάση), τότε $d_i = m - r_i$, όπου r_i είναι ή τάξη τοῦ πίνακα $(A-\lambda I)^i$. Ίσοδύναμα, d_i είναι τό πλήθος τῶν μηδενικῶν γραμμῶν τοῦ άνηγμένου κλιμακωτοῦ τοῦ πίνακα $(A-\lambda I)^i$.
Άπ' τα $\nu_2, \dots, \nu_m$ πού θα ύπολογίσομε μας ένδιαφέρουν τα μή μηδενικά (άρα θετικά).
Κάθε θετικό ν_i δείχνει τό πλήθος τῶν "δρμάθων" τῶν

στοιχείων τῆς διαγωνίου ἀμέσως κάτω ἀπ' τήν κύρια, οἱ ὁποῖες ἀποτελοῦνται ἀπό τουλάχιστον $i-1$ διαδοχικά 1. Ἄν οἱ ὁμάδες αὐτές εἶναι περισσότερες τῆς μιᾶς, τότε εἶναι διαδοχικές, χωριζόμενες μεταξύ τους ἀπό ἕνα 0.

Ἡ μέθοδος αὐτή παρέχει ἕνα πολύ ἁπλό τρόπο γιά νά ὑπολογίζει κανείς τήν κανονική μορφή Jordan ἑνός πίνακα (ἰσοδύναμα τόν πίνακα Jordan ἑνός τελεστή), ἀλλά δέν ὑπολογίζει τόν πίνακα P μέσῳ τοῦ ὁποίου μεταβαίνομε ἀπ' τόν ἀρχικό πίνακα στόν πίνακα Jordan. Μ' ἄλλα λόγια δέν ὑπολογίζει τή βάση Jordan τοῦ τελεστή.

__Παράδειγμα:__ Ὁ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 & -1 & -8 & 7 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ἔχει ἰδιοτιμές τό 3 μέ πολλαπλότητα 4 καί τό -2 μέ πολλαπλότητα 2. Τό πλῆθος τῶν μηδενικῶν γραμμῶν στούς ἀνηγμένους κλιμακωτούς τῶν πινάκων $A-3I$, $(A-3I)^2$, $(A-3I)^3$, $(A-3I)^4$ εἶναι, ἀντιστοίχως, $d_1=2$, $d_2=4$, $d_3=4$, $d_4=4$, ἄρα $\nu_4=\nu_3=0$ καί $\nu_2=2$, πού σημαίνει ὅτι ὁ ὑποπίνακας στόν πίνακα Jordan τοῦ A, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή 3 εἶναι

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Στή συνέχεια ἐργαζόμαστε μέ τήν ἰδιοτιμή -2. Οἱ ἀνηγμένοι κλιμακωτοί τῶν $A+2I$ καί $(A+2I)^2$ ἔχουν $d_1=1$ καί $d_2=2$ μηδενικές γραμμές, ἀντιστοίχως. Ἄρα τώρα $\nu_2=1$, πού σημαίνει ὅτι ὁ ὑποπίνακας στόν πίνακα Jordan τοῦ A, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή -2 εἶναι

$$B_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ἄρα, ἡ κανονική μορφή Jordan τοῦ A εἶναι $J = \begin{pmatrix} B_1 & \\ & B_2 \end{pmatrix}$.

Ἀσκήσεις τοῦ Κεφαλαίου 4.

1. Ἔστω T γραμμικός τελεστής ἐπί τοῦ V, ὁ ὁποῖος εἶναι μηδενοδύναμος δείκτη q καί $V' = T(V)$. Δεῖξτε ὅτι ὁ V' εἶναι ἀναλλοίωτος ἀπ' τόν T ὑπόχωρος τοῦ V καί ὁ τελεστής $T|_{V'}$ εἶναι μηδενοδύναμος δείκτη $q-1$.
2. Μέ τίς ὑποθέσεις τῆς ἄσκησης 1, ἔστω ἐπιπλέον $x \in V$ τέτοιο ὥστε $T^{q-1}x \neq 0$ καί $y = Tx$. Ἄν $U = \langle x, Tx, \ldots, T^{q-1}x \rangle$ καί $U_0 = \langle y, Ty, \ldots, T^{q-2}y \rangle$, δεῖξτε ὅτι $U_0 = U \cap V'$.
3. Ἔστω T μηδενοδύναμος τελεστής ἐπί τοῦ V δείκτη q καί $x \in V$ τέτοιο ὥστε $T^{q-1}x \neq 0$ καί $U = \langle x, Tx, \ldots, T^{q-1}x \rangle$. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε θετικό ἀκέραιο r ἡ διάσταση τοῦ $T^r(U)$ εἶναι ἴση μέ $\max\{q-r, 0\}$.
4. Ἔστω ὅτι οἱ $V_1, \ldots, V_m$ εἶναι ὑπόχωροι τοῦ V, καθένας ἀπ' τούς ὁποίους εἶναι ξένος πρός τόν ὑπόχωρο πού παράγουν ὅλοι οἱ ὑπόλοιποι, καί $\dim(V) = \dim(V_1) + \cdots + \dim(V_m)$. Τότε $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$. (Ὑπόδειξη: Δές ἄσκηση 8 τοῦ Κεφαλαίου 1).
5. Ἔστω $V = U \oplus W$ καί T ἕνας τελεστής τοῦ V, πού ἀφήνει ἀναλλοίωτους τούς ὑποχώρους U καί W. Ἄν $\{e_1, \ldots, e_\mu\}$ εἶναι μιά βάση τοῦ U καί $\{e'_1, \ldots, e'_\nu\}$ εἶναι μιά βάση τοῦ W, τότε ὁ πίνακας τοῦ T ὡς πρός τή βάση $\{e_1, \ldots, e_\mu, e'_1, \ldots, e'_\nu\}$ τοῦ V εἶναι
$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$
ὅπου B εἶναι ὁ πίνακας τοῦ $T|_U$ ὡς πρός τή βάση $\{e_1, \ldots, e_\mu\}$ καί C εἶναι ὁ πίνακας τοῦ $T|_W$ ὡς πρός τή βάση $\{e'_1, \ldots, e'_\nu\}$. Γενικεύσατε στήν περίπτωση πού $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_p$.
6. Ἔστω T τελεστής ἐπί τοῦ V, W ὑπόχωρος τοῦ V ἀναλλοίωτος ἀπ' τόν T καί λ ἰδιοτιμή τοῦ T. Δεῖξτε ὅτι ἄν ὁ $T-\lambda$ εἶναι ἀντιστρέψιμος ἐπί τοῦ W, τότε ἡ λ δέν εἶναι ἰδιοτιμή τοῦ $T|_W$.
7. Ἔστω ὅτι ὁ V ἔχει μιά βάση $\{e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1m_1}; e_{21}, e_{22}, \ldots, e_{2m_2}\}$, ὡς πρός τήν ὁποία ὁ πίνακας τοῦ τελεστῆ T ἔχει τή μορφή

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix},$$

ὅπου ὁ B_i εἶναι πίνακας $m_i \times m_i$ $(i=1,2)$. Δεῖξτε τότε ὅτι ἄν θέσομε $U_i = \langle e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{im_i} \rangle$ $(i=1,2)$, θά ἔχομε $V = U_1 \oplus U_2$, οἱ ὑπόχωροι U_1, U_2 εἶναι ἀναλλοίωτοι ἀπ' τόν T καί ὁ $T|U_i$ ἔχει πίνακα ὡς πρός τή βάση $\{e_{i1}, \ldots, e_{im_i}\}$ τόν B_i $(i=1,2)$. Γενικεύσατε.

8. Ἔστω U ἕνας διανυσματικός χῶρος, R ἕνας τελεστής ἐπί τοῦ U καί $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_m\}$ μιά βάση τοῦ U, τέτοια ὥστε:
α) $Rb_i = 0$ $\forall\, i = 1, \ldots, r$ $(r \leq m)$
β) Ἄν $r < m$ τότε $Rb_i \in \mathcal{B}$ $\forall\, i = r+1, \ldots, m$ κι ἐπιπλέον $Rb_i \neq Rb_j$ γιά $i, j \in \{r+1, \ldots, m\}$ μέ $i \neq j$.
Δεῖξτε ὅτι $\dim(\ker R) = r$.

9. Ἔστω, μέ τό συμβολισμό τῆς ἀπόδειξης τοῦ θεωρήματος 4.16, ὅτι q εἶναι ὁ ἐλάχιστος φυσικός ἀριθμός γιά τόν ὁποῖο $Z_q = Z_{q+1}$. Δεῖξτε ὅτι τότε $Z_q = Z_{q+j}$ $\forall\, j = 1, 2, \ldots$ καί ὅτι ὁ T εἶναι μηδενοδύναμος ἐπί τοῦ $U = Z_q$, δείκτη q.

10. Ἔστω

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

καί T ὁ τελεστής ἐπί τοῦ $V = V_5(\mathbb{C})$, πού ἀντιστοιχεῖ στόν A. Βρεῖτε τούς ὑποχώρους U καί W, πού μᾶς ἐξασφαλίζει τό θεώρημα 4.16, γιά τούς τελεστές $T-2$ καί $T+1$. (Σημείωση. Οἱ ρίζες τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου τοῦ A εἶναι οἱ 2 καί -1, μέ πολλαπλότητες 3 καί 2, ἀντιστοίχως). Βρεῖτε, στή συνέχεια, τήν κανονική μορφή Jordan τοῦ A.

11.

11. Ὑπολογίστε τὴν κανονικὴ μορφὴ Jordan τοῦ πίνακα

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -5 & 6 & 4 \\ 3 & -23 & -21 & 30 & 4 \\ 3 & -21 & -21 & 29 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

τοῦ ὁποίου τὸ χαρακτηριστικὸ πολυώνυμο εἶναι $(\lambda-2)^5$.

12. Ἀκολουθώντας τὴ μέθοδο ποὺ προτείνεται στὸ (4.45) βρεῖτε τὶς κανονικὲς μορφὲς Jordan τῶν ἑξῆς πινάκων (δίπλα σὲ κάθε πίνακα γράφουμε τὶς ἰδιοτιμές του καί, ἐντὸς παρενθέσεως, τὴν πολλαπλότητα καθεμιᾶς).

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad 2(2),\ 1(1),\ -1(2)$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 & 3 & -1 & -10 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad 3(4),\ 2(2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ -19 & -11 & 18 & -9 & 21 \\ 9 & 9 & -13 & 9 & -14 \\ 9 & 9 & -12 & 7 & -15 \\ -9 & -9 & 10 & -9 & 11 \end{pmatrix} \qquad 1(2),\ -2(2),\ -3(1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2(1),\ 1(3),\ -2(1)$$

13. Ἀναφερόμενοι στήν ἐκφώνηση τοῦ θεωρήματος 4.19, ἔστω ὅτι ὁ δείκτης τοῦ μηδενοδύναμου τελεστῆ $T-\lambda_j I|U_j$ εἶναι q_j $(j=1,\dots,p)$. Ἔστω τό πολυώνυμο

$$P_T(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{q_1}\cdots(\lambda-\lambda_p)^{q_p}\in\mathbb{C}[\lambda].$$

Δεῖξτε ὅτι ἄν τό $f(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$ εἶναι τέτοιο ὥστε $f(T)=0$, τότε $P_T(\lambda)\mid f(\lambda)$. (*)

14. Ἀναφερόμενοι καί πάλι στό Θεώρημα 4.19: Δεῖξτε ὅτι ἄν ὁ T εἶναι κανονικός τελεστής, τότε ὁ ὑπόχωρος U_j εἶναι ὁ ἰδιόχωρος τοῦ T, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή λ_j $(j=1,\dots,p)$. Συνεπῶς, τό Θεώρημα 4.19 εἶναι γενίκευση τοῦ Θεωρήματος 1.9 (**)

(*) Ὑπόδειξη στήν ἄσκηση 13: Πρῶτα ν' ἀποδειχτεῖ τό ἑξῆς λῆμμα: «Ἄν τό $g(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$ δέν ἔχει ρίζα τό λ_j, τότε $g(T)x\neq 0$ $\forall x\in U_j$, $x\neq 0$». Γιά τήν ἀπόδειξη αὐτοῦ τοῦ λήμματος πρέπει νά ληφθεῖ ὑπ' ὄψιν τό (4.21).

(**) Ὑπόδειξη στήν ἄσκηση 14: Ἔστω x ἰδιοδιάνυσμα τοῦ T, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή λ_j. Γράφομε $x=x_1+\dots+x_p$ ὅπου $x_i\in U_i$ $\forall i=1,\dots,p$ καί ἀποδεικνύομε, χρησιμοποιώντας καί τό (4.21), ὅτι $x_i=0$ $\forall i\neq j$. Ἄρα ὁ ἰδιόχωρος τοῦ T, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή λ_j εἶναι ὑπόχωρος τοῦ U_j. Μετά τό συγκρίνομε τίς διαστάσεις, λαμβάνοντας ὑπ' ὄψιν καί τό (1.12).

15. Μέ τή βοήθεια τῆς ἄσκησης 13 δῶστε ἀπάντηση στά ἑξῆς: Ἔστω πολυώνυμο $g(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$ μέ ἁπλές μόνο ρίζες καί A $n\times n$ πίνακας μέ στοιχεῖα ἀπ' τό $\mathbb{C}$, τέτοιος ὥστε $g(A)=0$. Τί συμπεραίνεται γιά τήν κανονική μορφή Jordan τοῦ A; Ὅμοιο ζήτημα ἄν τό $g(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$ εἶναι ὁποιοδήποτε πολυώνυμο.