Στο μάθημα αυτό όπως διαφαίνεται μέσα από τις σημειώσεις οι προαπαιτούμενες γνώσεις είναι όσες παίρνει κανείς από τα μαθήματα της Ανάλυσης I και II. Κυρίως: το ολοκλήρωμα Riemann, σειρές αριθμών και σειρές συναρτήσεων και γενικευμένο ολοκλήρωμα. Ούτως ή άλλως στην εισαγωγή εκτίθενται τα βασικά για καλύτερο προσανατολισμό του φοιτητή. Φυσικά, πολλά αποτελέσματα της Εισαγωγής δεν αποτελούν προηγούμενη γνώση. Για παράδειγμα, το πρώτο και το δεύτερο θεώρημα μέσης τιμής ολοκληρωτικού λογισμού, τα οποία αρκετά ίσως "υποτιμούνται" στις προπτυχιακές σπουδές.

Οι συναρτήσεις οι οποίες μελετώνται στις σημειώσεις αυτές ως προς την ανάλυση Fourier τους είναι όσες είναι <u>ολοκληρώσιμες</u> με την έννοια του γενικευμένου ολοκληρώματος. Είναι ανάμεσα στις Riemann-ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και στις Lebesgue-ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Ο <u>φυσιολογικός</u> χώρος είναι φυσικά οι Lebesgue-ολοκληρώσιμες συναρτήσεις αλλά δεν διδάσκονται σε βασικό προπτυχιακό μάθημα. Από την άλλη μεριά οι Riemann-ολοκληρ. συναρτήσεις είναι εξ ορισμού φραγμένες και έτσι χάνουν <u>ίσως</u> κάποια στοιχειώδη γνωρίσματα: λείπουν οι συναρτήσεις οι οποίες "απειρίζονται" σε μεμονωμένα σημεία.

Στο κεφάλαιο VII μόνον χρειάζεται η έννοια του <u>μηδενικού μέτρου</u>. Αυτή ορίζεται και δίνονται μερικά παραδείγματα με σκοπό <u>μόνον</u> να εξηγηθεί η θέση που κατέχει αυτή η έννοια στο θέμα μας και η σπουδαιότητά της.

Το μέρος των εφαρμογών πάσχει από πλούτο, αλλά οι επιλεγμένες εφαρμογές είναι ενδεικτικές και κλασικές ιστορικά και δίνουν μια ιδέα.

Ευρετήριο

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER (Σειρές FOURIER)

Σημειώσεις

Μ. Παπαδημητράκης.

ΚΕΦ. Ι ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Α. Ολοκλήρωμα Riemann (γρήγορη επανάληψη)

Έστω φραγμένο κλειστό διάστημα $[a,b]$, και $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μιά φραγμένη συνάρτηση. Δηλ, υπάρχει M ώστε

$$|f(x)| \le M \quad \text{γιά κάθε } x\in[a,b].$$

Γιά τυχούσα διαμέριση $\Delta = \{x_0=a<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=b\}$ του $[a,b]$ θεωρούμε τα

$$\left.\begin{aligned} M_k &= \sup\{f(x):\ x_k\le x\le x_{k+1}\}\\ m_k &= \inf\{f(x):\ x_k\le x\le x_{k+1}\}\end{aligned}\right\},\quad 0\le k\le n-1$$

και γνωρίζουμε το άνω και το κάτω άθροισμα Darboux

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta)=\sum_{k=0}^{n-1}M_k(x_{k+1}-x_k),\qquad \underline{\Sigma}(f,\Delta)=\sum_{k=0}^{n-1}m_k(x_{k+1}-x_k).$$

Προφανώς: $\quad -M(b-a)\le \underline{\Sigma}(f,\Delta)\le\overline{\Sigma}(f,\Delta)\le M(b-a)$.

Ορίζουμε $\quad \overline{\int_a^b} f=\inf_\Delta\overline{\Sigma}(f,\Delta)\quad$ και $\quad \underline{\int_a^b} f=\sup_\Delta\underline{\Sigma}(f,\Delta)$

τα οποία αποκαλούμε <u>άνω</u> και <u>κάτω</u> <u>ολοκλήρωμα της f</u> αντίστοιχα (Στα inf και sup το Δ διατρέχει όλες τις δυνατές διαμερίσεις του $[a,b]$)

Αντικαθιστώντας μια διαμέριση με μιά πιό λεπτή διαμέριση το κάτω άθροισμα Darboux μεγαλώνει και το άνω άθροισμα Darboux μικραίνει. Αν, λοιπόν, Δ_1 και Δ_2 είναι τυχούσες διαμερίσεις του $[a,b]$ τότε σχηματίζοντας την κοινή τους εκλέπτυνση $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$ παίρνουμε:

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta_1)\le\underline{\Sigma}(f,\Delta)\le\overline{\Sigma}(f,\Delta)\le\overline{\Sigma}(f,\Delta_2)$$

Άρα $\quad \underline{\Sigma}(f,\Delta_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Delta_2)\quad$ γιά κάθε Δ_1,Δ_2.

Ως εκ τούτου

$$\underline{\int_a^b} f\le\overline{\int_a^b} f.$$

<u>Ορισμός</u> Η f λέγεται R-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν είναι φραγμένη στο $[a,b]$ και $\underline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^b} f$. Η κοινή τιμή ονομάζεται

R-ολοκλήρωμα της f και συμβολίζεται $\int_a^b f$.

<u>Κριτήριο ολοκληρωσιμότητας</u>. Έστω $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι R-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνον αν γιά κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει διαμέριση Δ ώστε $\overline{\Sigma}(f,\Delta)-\underline{\Sigma}(f,\Delta)<\varepsilon$.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω ότι ισχύει η δεύτερη συνθήκη. Τότε

$$0\le \overline{\int_a^b} f-\underline{\int_a^b} f \le \overline{\Sigma}(f,\Delta)-\underline{\Sigma}(f,\Delta)<\varepsilon$$

Άρα $0\le \overline{\int_a^b} f-\underline{\int_a^b} f<\varepsilon$ γιά κάθε $\varepsilon>0$.

Άρα $\overline{\int_a^b} f=\underline{\int_a^b} f$.

Αντιστρόφως, έστω ότι η f είναι R-ολοκληρώσιμη και έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει διαμέριση Δ_1 ώστε $\overline{\Sigma}(f,\Delta_1)<\overline{\int_a^b} f+\frac{\varepsilon}{2}$ και Δ_2 ώστε $\underline{\int_a^b} f-\frac{\varepsilon}{2}<\underline{\Sigma}(f,\Delta_2)$.

Παίρνουμε $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$. Τότε

$$0\le \overline{\Sigma}(f,\Delta)-\underline{\Sigma}(f,\Delta)\le \overline{\Sigma}(f,\Delta_1)-\underline{\Sigma}(f,\Delta_2)<$$
$$<\overline{\int_a^b} f+\frac{\varepsilon}{2}-\underline{\int_a^b} f+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

<u>Ο.Ε.Δ.</u>

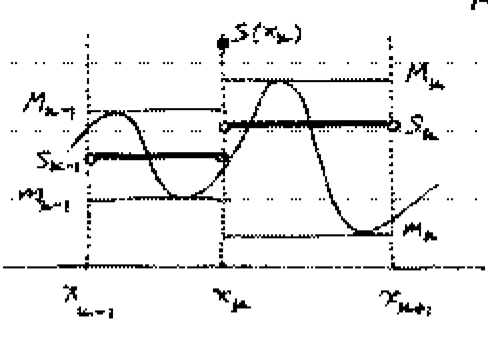
Όλα τα προηγούμενα είναι γνωστά από τον Απειροστικό Λογισμό. Γνωστές θεωρούνται και οι ιδιότητες του R-ολοκληρώματος.

<u>Πόρισμα 1</u>. Έστω $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ R-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Γιά κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει κλιμακωτή συνάρτηση $s:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\int_a^b|f-s|<\varepsilon$.

<u>Απόδειξη</u>. Δεδομένου $\varepsilon>0$ το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας εγγυάται την ύπαρξη διαμέρισης $\Delta=\{x_0=a<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=b\}$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta)-\underline{\Sigma}(f,\Delta)<\varepsilon.$$

Γιά $k=0,1,\dots,n-1$ διαλέγουμε οποιονδήποτε αριθμό s_k με την ιδιότητα $m_k\le s_k\le M_k$. Ορίζουμε



$s(x)=s_k$ σταθερό στο (x_k,x_{k+1}). Φτιάχνουμε έτσι μιά συνάρτηση s που σε κάθε (x_k,x_{k+1}) έχει σταθερή τιμή s_k. Στα σημεία $x_0,x_1,\dots,x_n$

ορίζουμε αυθαίρετες τιμές $s(x_k)$. Η s είναι κλιμακωτή συνάρτηση στο $[a,b]$. Είναι προφανές από το σχήμα ότι, για $x \in (x_k, x_{k+1})$ $\quad |f(x)-s(x)| = |f(x)-s_k| \le M_k - m_k$

Άρα $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f-s| \le (M_k-m_k)(x_{k+1}-x_k)$.

Προσθέτουμε για $k=0,1,\dots,n-1$

$$\int_a^b |f-s| \le \sum_{k=0}^{n-1} (M_k-m_k)(x_{k+1}-x_k) = \overline{\Sigma}(f,\Delta) - \underline{\Sigma}(f,\Delta) < \varepsilon .$$

Ο.Ε.Δ.

<u>Παρατήρηση 1</u> Οι τιμές $s(x_k)$ στα μεμονωμένα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$ δεν παίζουν κανένα ρόλο διότι το $\int_a^b |f-s|$ δεν επηρεάζεται από τις τιμές των f και s σε πεπερασμένα σημεία.

<u>Παρατήρηση 2.</u> Αν στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης διαλέξουμε $s_k = M_k$ για κάθε k και $s(x_k)$ πάλι αυθαίρετο αλλά μεγαλύτερο ή ίσο του $f(x_k)$ τότε έχουμε μία κλιμακωτή συνάρτηση s_1 που ικανοποιεί το αποτέλεσμα του πορίσματος και επιπλέον την: $f(x) \le s_1(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Αν, αντιθέτως, διαλέξουμε $s_k = m_k$ και $s(x_k)$ οποιοδήποτε μικρότερο ή ίσο του $f(x_k)$ τότε έχουμε κλιμακωτή συνάρτηση s_2 με $s_2(x) \le f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Δηλαδή, υπάρχουν δύο κλιμακωτές συναρτήσεις s_1 και s_2 ώστε: $\quad s_2(x) \le f(x) \le s_1(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$

και $\quad \int_a^b |f-s_1| < \varepsilon$, $\int_a^b |f-s_2| < \varepsilon$.

<u>Άσκηση</u> Διαλέξτε κάποια καλή συνάρτηση, έστω την x^2 στο $[0,1]$ και προσπαθήστε να βρείτε κλιμακωτή συνάρτηση s ώστε

$$\int_0^1 |x^2 - s(x)|\, dx \le \varepsilon$$

αφού διαλέξετε ένα μικρό ε. Δοκιμάστε διαμερίσεις σε ίσα υποδιαστήματα.

<u>Πόρισμα 2.</u> Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ώστε

$\int_a^b |f-g| < \varepsilon$ ...

<u>Παρατήρηση.</u> Αν $f, g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι R-ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ τότε $\int_a^b |f-g| \le \int_a^b |f-h| + \int_a^b |h-g|$.

Διότι, για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει ότι

$|f(x)-g(x)| \le |f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)|$

και ολοκληρώνοντας στο $[a,b]$ παίρνουμε την προς απόδειξιν ανισότητα.

Η ανισότητα αυτή ονομάζεται <u>τριγωνική ανισότητα για ολοκληρώματα.</u>

<u>Απόδειξη του πορίσματος 2.</u> Έστω λοιπόν f και δοθέν $\varepsilon > 0$.

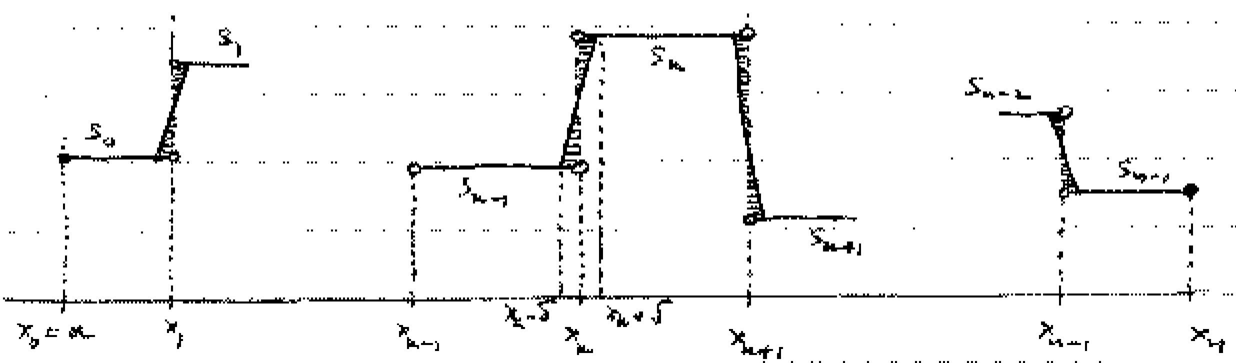
Το πόρισμα 1 εξασφαλίζει την ύπαρξη κλιμακωτής συνάρτησης s με την ιδιότητα $\int_a^b |f-s| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Αρκεί να βρούμε συνεχή g ώστε $\int_a^b |s-g| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Διότι, βάσει της τριγωνικής ανισότητας για ολοκληρώματα:

$$\int_a^b |f-g| \le \int_a^b |f-s| + \int_a^b |s-g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Έστω λοιπόν ότι η s που μας δίνει το πόρισμα 1 έχει την μορφή $s(x) = s_k$ σταθερή στο διάστημα (x_k, x_{k+1}) όπου $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Οι τιμές της s στα σημεία x_k δεν μας ενδιαφέρουν (δεν επηρεάζουν τα ολοκληρώματα).



Με βάση την s θα φτιάξουμε την συνεχή g. Η ιδέα είναι να αλλάξουμε <u>λίγο</u> την s γύρω από τα σημεία που παρουσιάζει πήδημα, δηλ. τα x_k.

Ορίζουμε $g(a) = s_0$, $g(b) = s_{n-1}$.

Μετά γύρω από κάθε x_k $(k = 1, 2, \dots, n-1)$ παίρνουμε ευθ. τμήμα

$(x_k-\delta, x_k+\delta)$. Για να είναι αυτά τα ευθ. τμήματα ξένα μεταξύ τους αρκεί να πάρουμε

$$2\delta \le \min(x_1-x_0,\ x_2-x_1, \dots, x_n-x_{n-1}).$$

Στο διάστημα $[x_k-\delta, x_k+\delta]$ ενώνουμε το επίπεδο s_{k-1} με το s_k με ένα ευθ. τμήμα όπως στο σχήμα. Φτιάχνουμε έτσι μιά <u>συνεχή</u> πολυγωνική γραμμή που διαφέρει από το γράφημα της s μόνο στα διαστήματα $[x_k-\delta, x_k+\delta]$ $k=1,2,\dots,n-1$.
Αυτή η γραμμή είναι το γράφημα μιάς συνεχούς συνάρτησης g. Προφανώς το $\int_a^b |g-s|$ είναι το συνολικό εμβαδό των γραμμοσκιασμένων τριγώνων, δηλ.

$$\int_a^b |g-s| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\delta\cdot|s_k-s_{k-1}| \le \frac{n-1}{2}\delta \max_{1\le k\le n-1}|s_k-s_{k-1}|.$$

Αν λοιπόν διαλέξουμε το δ ώστε

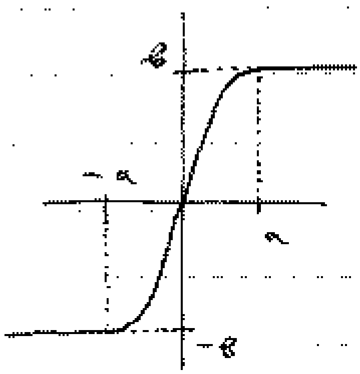
$$\delta \le \frac{1}{2}\min(x_1-x_0, \dots, x_n-x_{n-1}) \quad \text{και}$$

$$\delta < \frac{4\varepsilon}{(n-1)\cdot\max|s_k-s_{k-1}|}$$

τότε έχουμε φτιάξει συνεχή g ώστε $\int_a^b |s-g| < \frac{\varepsilon}{2}$. <u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Παρατήρηση</u>. Αν κατασκευάσω να συνδέσω τα επίπεδα της κλιμακωτής συνάρτησης s όχι με ευθύγραμμα τμήματα αλλά με πιό "καμπυλωτές" γραμμές τότε μπορώ να πετύχω η g να είναι όχι μόνον συνεχής αλλά να έχει και πρώτη παράγωγο συνεχή ή και, πιό γενικά, να έχει n-οστή παράγωγο συνεχή γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$ προκαθορισμένο.

<u>Άσκηση</u> (α) a, b είναι δοσμένοι θετικοί αριθμοί. Βρείτε πολυώνυμο τρίτου βαθμού $\mu x^3+\nu x^2+\xi x+\rho$ έτσι ώστε η συνάρτηση



$$f(x) = \begin{cases} -b, & x \le -a \\ \mu x^3+\nu x^2+\xi x+\rho, & -a \le x \le a \\ b, & a \le x \end{cases}$$

να είναι συνεχής και να έχει συνεχή παράγωγο.

(β) Λύστε το ίδιο πρόβλημα με πολυώνυμο πέμπτου βαθμού ώστε η $f(x)$ να έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο.

(γ) Γιατί διαλέγουμε βαθμούς 3 και 5 αντίστοιχα; Τίνος βαθμού πολυώνυμο πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ώστε η αντίστοιχη $f(x)$ να έχει συνεχή παράγωγο τάξης n; Λύστε το γενικό πρόβλημα.

(δ) Λύστε το πρόβλημα 2 με g που να έχει συνεχή παράγωγο τάξης n.

Β. Γενικευμένο ολοκλήρωμα

Έστω $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ όπου $a \in \mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{R}$ ή $b = +\infty$. Έστω επίσης ότι η f είναι R-ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, \gamma]$ όπου $a \le \gamma < b$.

Ορισμός. Αν το $\lim_{\gamma \to b-} \int_a^\gamma f$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f έχει γενικευμένο ολοκλήρωμα το οποίο συμβολίζουμε με $\int_a^b f$ και είναι ίσο με την τιμή του παραπάνω ορίου. Ακόμη λέμε ότι το $\int_a^b f$ συγκλίνει.

Αν το παραπάνω όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$ τότε λέμε ότι το $\int_a^b f$ αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αντίστοιχα και γράφουμε $\int_a^b f = +\infty$ ή $-\infty$.

Αν το όριο δεν υπάρχει τότε λέμε ότι το $\int_a^b f$ αποκλίνει.

Παρατήρηση. Αν η f είναι ορισμένη στο $[a, b]$ και φραγμένη και είναι R-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ ισχύει ότι το R-ολοκλήρωμα της f στο $[a, b]$ ισούται με το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f δηλ. με το $\lim_{\gamma \to b^-} \int_a^\gamma f$. Δικαιολογείται δηλαδή η χρήση του ίδιου συμβόλου για το R-ολοκλήρωμα και για το γενικευμένο ολοκλήρωμα.

Πράγματι, αν $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε

$$\left| \int_a^b f - \int_a^\gamma f \right| = \left| \int_\gamma^b f \right| \le M(b - \gamma) \longrightarrow 0 \quad \text{αν } \gamma \to b-.$$

Άρα $\lim_{\gamma\to b-}\int_a^\gamma f = \int_a^b f$.

Παραδείγματα

(α) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$. Αν $\alpha=1$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{\gamma\to+\infty}\int_1^\gamma \frac{1}{x}dx =$

$= \lim_{\gamma\to+\infty}\log\gamma = +\infty$

Αν $\alpha<1$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\gamma\to\infty}\frac{\gamma^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = +\infty$

Αν $\alpha>1$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\gamma\to\infty}\frac{\gamma^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$

Άρα $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \alpha\le 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \text{αν } \alpha>1 \end{cases}$

(β) $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}dx = \lim_{\gamma\to+\infty}\frac{e^{-\alpha\gamma}-1}{-\alpha}$ $(\alpha\neq 0)$

$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & \alpha > 0 \\ +\infty, & \alpha<0 \end{cases}$

Αν $\alpha=0$, τότε $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}dx = \lim_{\gamma\to+\infty}\gamma = +\infty$

Άρα $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}dx = \begin{cases} +\infty, & \alpha\le 0 \\ \frac{1}{\alpha}, & \alpha>0. \end{cases}$

Άσκηση Αποδείξτε ότι $\int_0^1\frac{1}{(1-x)^\alpha}dx = \begin{cases} +\infty, & \alpha\ge 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha<1 \end{cases}$

Άσκηση Έστω x_0 σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f (το x_0 μπορεί να είναι και το $+\infty$ ή το $-\infty$). Τότε

$\lim_{x\to x_0}f(x) = \alpha\in\mathbb{R}$ αν και μόνον αν, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε x,y στο πεδίο ορισμού της f με $0<|x-x_0|<\delta$ και $0<|y-x_0|<\delta$ να ισχύει ότι $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Αυτό λέγεται κριτήριο Cauchy για την ύπαρξη ορίου μιας συνάρτησης και είναι γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό. Με βάση αυτό αποδείξτε το κριτήριο Cauchy για σύγκλιση γενικευμένου ολοκληρώματος: το $\int_a^b f$ συγκλίνει (υποθέτουμε $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ και f είναι R-ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a,\gamma]$ με $a\le\gamma<b$) αν και μόνον αν, για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$ ώστε αν $b-\delta<x<y<b$ τότε $|\int_x^y f|<\varepsilon$.

Άσκηση. Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη και R-ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a,\gamma]$, $a\le\gamma<b$, και το $\int_a^b f = \lim_{\gamma\to b^-}\int_a^\gamma f$ συγκλίνει τότε η f είναι R-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

(Η σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος μπορεί να παραλειφθεί από τις υποθέσεις)

Στην περίπτωση $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ ανάλογος ορισμός, δηλαδή

$$\int_a^b f = \lim_{\gamma\to a^+}\int_\gamma^b f$$

, χρησιμοποιείται και η ορολογία είναι η ίδια. Τώρα $a\in\mathbb{R}$ ή $a=-\infty$.

Άσκηση. Αποδείξτε ότι $\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases}+\infty, & a\ge 1\\ \frac{1}{1-a}, & a<1\end{cases}$

Ακόμη, αν $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ τότε διαλέγουμε οποιοδήποτε δ με $a<\delta<b$ και ορίζουμε

$$\int_a^b f = \int_a^\delta f + \int_\delta^b f$$

συνδυάζοντας τους δύο προηγούμενους ορισμούς.

Βλέπουμε εύκολα ότι η επιλογή του δ δεν παίζει ρόλο ως προς το τελικό αποτέλεσμα. Δηλ., αν δ' είναι άλλη επιλογή τότε έχουμε:

$$\int_{\gamma_1}^{\delta'} f = \int_{\gamma_1}^{\delta} f + \int_\delta^{\delta'} f, \quad \int_{\delta'}^{\gamma_2} f = \int_{\delta}^{\gamma_2} f + \int_{\delta'}^{\delta} f$$

Άρα $\int_a^{\delta'} f = \lim_{\gamma_1\to a}\int_{\gamma_1}^{\delta'} f = \lim_{\gamma_1\to a}\int_{\gamma_1}^{\delta} f + \int_\delta^{\delta'} f = \int_a^\delta f + \int_\delta^{\delta'} f$

Ομοίως $\int_{\delta'}^b f = \lim_{\gamma_2\to b}\int_{\delta'}^{\gamma_2} f = \lim_{\gamma_2\to b}\int_\delta^{\gamma_2} f + \int_{\delta'}^{\delta} f = \int_\delta^b f + \int_{\delta'}^\delta f$.

Προσθέτοντας: $\int_a^{\delta'} f+\int_{\delta'}^b f = \int_a^\delta f + \int_\delta^b f$

Τώρα η τελική γενίκευση του ορισμού του γενικευμένου ολοκληρώματος: έστω συνάρτηση f η οποία ορίζεται στο

$$(x_0=a,x_1)\cup(x_1,x_2)\cup\dots\cup(x_k,x_{k+1})\cup\dots\cup(x_{n-1},x_n=b)$$

δηλ. στο ανοικτό (a,b) εκτός από πεπερασμένα σημεία $x_1<x_2<\dots<x_{n-1}$.

Ορίζουμε σαν γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο (a,b) το άθροισμα των γενικευμένων ολοκληρωμάτων της f στα (x_k, x_{k+1}) $k=0,\dots,n-1$.

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f$$

αν όλα αυτά τα ξεχωριστά γενικευμένα ολοκληρώματα συγκλίνουν.

<u>Άσκηση</u> Αποδείξτε ότι όλες οι στοιχειώδεις ιδιότητες του R-ολοκληρώματος ισχύουν και για το γενικευμένο ολοκλήρωμα:

(i) $\int_a^b (\mu f + \nu g) = \mu \int_a^b f + \nu \int_a^b g$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$

(ii) $\int_a^b f = \int_a^\gamma f + \int_\gamma^b f$, $a < \gamma < b$

<u>Θεώρημα</u> Έστω $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ με $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b)$. Αν το $\int_a^\gamma f$ είναι φραγμένη συνάρτηση του γ για $a \leq \gamma < b$ τότε το $\int_a^b f$ συγκλίνει. Αν το $\int_a^\gamma f$ δεν είναι φραγμένη συνάρτηση του γ τότε $\int_a^b f = +\infty$.

<u>Απόδειξη</u>. Αν $a \leq \gamma_1 < \gamma_2 < b$ τότε

$$\int_a^{\gamma_2} f = \int_a^{\gamma_1} f + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f \geq \int_a^{\gamma_1} f \quad , \text{ αφού } f \geq 0.$$

Άρα η $\int_a^\gamma f$ είναι αύξουσα συνάρτηση του γ για $a \leq \gamma < b$. Επομένως είτε είναι φραγμένη και το $\lim_{\gamma \to b-} \int_a^\gamma f$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ είτε δεν είναι φραγμένη και $\lim_{\gamma \to b-} \int_a^\gamma f = +\infty$. <u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Ορισμός</u> Αν $f: (a,x_1) \cup (x_1,x_2) \cup \dots \cup (x_{n-1}, b) \to \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε το $\int_a^b |f|$ συγκλίνει τότε λέμε ότι το $\int_a^b f$ <u>συγκλίνει απολύτως</u>.

<u>Πρόταση</u> Αν το $\int_a^b f$ συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει.

<u>Απόδειξη</u> Έστω κατ' αρχήν η περίπτωση $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ και $\int_a^b |f|$ συγκλίνει. Έχουμε ότι $0 \leq |f(x)| + f(x) \leq 2|f(x)|$.

Άρα $0 \leq \int_a^\gamma (|f(x)| + f(x))\,dx \leq 2\int_a^\gamma |f(x)|\,dx$, $a \leq \gamma < b$.

Από το προηγούμενο θεώρημα, το $\int_a^\gamma |f|$ είναι φραγμένη συνάρτηση του γ. Το ίδιο λοιπόν ισχύει και για το $\int_a^\gamma (|f(x)| + f(x))\,dx$. Άρα, πάλι από το προηγούμενο θεώρημα, το $\int_a^b (|f| + f)$ συγκλίνει.

Άρα το $\int_a^b f = \int_a^b (|f|+f) - \int_a^b |f|$ συγκλίνει.

Το προηγούμενο θεώρημα έχει ανάλογη διατύπωση στην περίπτωση $f:(a,b]\to\mathbb{R}$. Άρα η απόδειξη της πρότασης ισχύει και σ'αυτήν την περίπτωση. Θεωρώντας οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο δ ; $a<\delta<b$, η πρόταση αποδεικνύεται και στην περίπτωση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$.

Τέλος αποδεικνύουμε την γενική περίπτωση εργαζόμενοι σε κάθε (x_k, x_{k+1}) χωριστά. Ο.Ε.Δ.

<u>Παράδειγμα</u> Το $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει αλλά όχι απολύτως.

Έστω n φυσικός αριθμός.

$$\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \ge \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin x|\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)\longrightarrow+\infty, \text{ καθώς } n\to+\infty.$$

Άρα $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = +\infty$.

Έστω τώρα $\gamma\to+\infty$ και $n=\left[\frac{\gamma}{\pi}\right]$, δηλ. $n\pi\le\gamma<(n+1)\pi$.

(Άρα $n\to+\infty$).

$$\int_0^{\gamma}\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx + \dots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{\sin x}{x}dx + \int_{n\pi}^{\gamma}\frac{\sin x}{x}dx$$

Ο τελευταίος όρος δίνει:

$$\left|\int_{n\pi}^{\gamma}\frac{\sin x}{x}dx\right| \le \int_{n\pi}^{\gamma}\frac{|\sin x|}{x}dx \le \frac{1}{n\pi}\int_{n\pi}^{\gamma}|\sin x|\,dx \le \frac{1}{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|\,dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\longrightarrow 0$$

Μένει να δούμε αν το άθροισμα των n πρώτων όρων συγκλίνει. Παρατηρούμε ότι οι όροι αυτοί έχουν εναλλασσόμενα πρόσημα (γιατί;) και ότι, κατ'απόλυτη τιμή, φθίνουν:

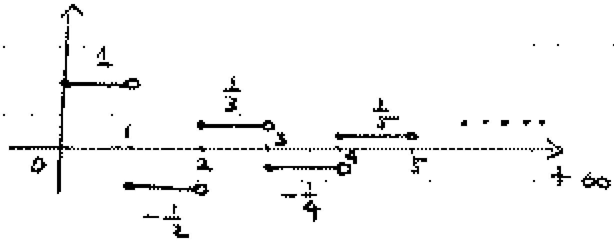
$$\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx\right| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx \ge \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin x|\,dx =$$

$$= \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi}|\sin x|\,dx \ge \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx = \left|\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi}\frac{\sin x}{x}\right|.$$

Άρα η σειρά τους συγκλίνει.

<u>Άσκηση</u> Βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε πλήρως τις ισότητες και ανισότητες στις τελευταίες γραμμές.

Άσκηση. Αποδείξτε ότι για την κλιμακωτή συνάρτηση (με άπειρα επίπεδα) f του διπλανού σχήματος το $\int_0^{+\infty} f$ συγκλίνει αλλά όχι απολύτως.



Άσκηση. Φτιάξτε κλιμακωτή συνάρτηση (με άπειρα επίπεδα) f στο $(0,1]$ για την οποία το $\int_0^1 f$ συγκλίνει αλλά όχι απολύτως. Μπορείτε να βρείτε συνεχή f στο $(0,1]$ με την ίδια ιδιότητα;

Θεώρημα σύγκρισης. Έστω $f,g:(a,x_1)\cup(x_1,x_2)\cup\dots\cup(x_{n-1},b)\longrightarrow\mathbb{R}$ με $|f(x)|\le g(x)$ για κάθε x. Αν το $\int_a^b g$ συγκλίνει τότε το $\int_a^b f$ συγκλίνει απολύτως.

Απόδειξη. Αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση $f,g:[a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$. Αν το $\int_a^b g$ συγκλίνει τότε, από το τελευταίο θεώρημα, το $\int_a^\gamma g$ είναι φραγμένη συνάρτηση του γ. Αφού $\int_a^\gamma |f|\le\int_a^\gamma g$, το $\int_a^\gamma|f|$ είναι επίσης φραγμένη συνάρτηση του γ. Άρα το $\int_a^b|f|$ συγκλίνει. Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα (α) Το $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$ συγκλίνει, αφού $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$ και το $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ συγκλίνει.

(β) Το $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει. Διότι:

$$\int_1^\gamma \frac{\sin x}{x}\,dx=\int_1^\gamma\frac{(-\cos x)'}{x}\,dx = -\frac{\cos\gamma}{\gamma}+\frac{\cos 1}{1}-\int_1^\gamma\frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

Άρα

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\lim_{\gamma\to\infty}\int_1^\gamma \frac{\sin x}{x}\,dx = \cos 1-\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Με άλλο τρόπο έχουμε ότι το $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει.

Άσκηση (α) Το $\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\,dx$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Το $\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$ δεν συγκλίνει.

(γ) Το $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{3+x^2}\,dx$ συγκλίνει απολύτως.

(δ) Το $\int_0^{1/2} \frac{\sin x}{x\log(\frac{1}{x})}\,dx$ συγκλίνει απολύτως.

(ε) Το $\int_1^{+\infty} \cos x\cdot \log x\, dx$ δεν συγκλίνει.

(στ) Τα $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$, $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ συγκλίνουν αλλά όχι απολύτως.

<u>Ορισμός</u>. Μια συνάρτηση $f:(a,x_1)\cup(x_1,x_2)\cup\dots\cup(x_{n-1},b)\to\mathbb{R}$ θα την λέμε <u>ολοκληρώσιμη</u> στο (a,b) αν το $\int_a^b f$ <u>συγκλίνει απολύτως</u>.

Λόγω της παρατήρησης της σελίδας 6 κάθε R-ολοκληρώσιμη f στο $[a,b]$ είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα με τον ορισμό που μόλις γράψαμε.

<u>Παραδείγματα</u>. Στο $(1,+\infty)$ η $\frac{\cos x}{x^2}$ είναι ολοκληρώσιμη, ενώ η $\frac{\sin x}{x}$ δεν είναι ολοκληρώσιμη αν και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει!

<u>Άσκηση</u>. Αν $f,g:(a,x_1)\cup(x_1,x_2)\cup\dots\cup(x_{n-1},b)\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες και $\nu,\mu\in\mathbb{R}$ τότε και η $\mu f+\nu g$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b(\mu f+\nu g)=\mu\int_a^b f+\nu\int_a^b g$.

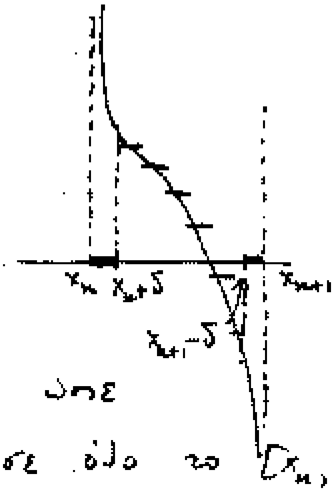
<u>Παρατήρηση</u>. Προσέξτε: αν f,g είναι ολοκληρώσιμες η $f\cdot g$ μπορεί να μην είναι ολοκληρώσιμη. Για παράδειγμα η $\frac{1}{\sqrt{x}}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,1)$, ενώ η $\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$ δεν είναι.

Η επόμενη πρόταση γενικεύει τα Πορίσματα 1 και 2 των σελίδων 2 και 3.

<u>Πρόταση</u>. Έστω $f:(a,x_1)\cup(x_1,x_2)\cup\dots\cup(x_{n-1},b)\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο (a,b). Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει κλιμακωτή συνάρτηση s και συνεχής συνάρτηση g, $s,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ώστε $\int_a^b|f-s|<\varepsilon$, $\int_a^b|f-g|<\varepsilon$.

<u>Απόδειξη</u>. Για κάθε k το $\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f|$ συγκλίνει. Άρα $\lim_{\delta\to 0}\int_{x_k+\delta}^{x_{k+1}-\delta}|f|=\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f|$. Κι έτσι υπάρχει δ ώστε

$$\int_{x_k}^{x_k+\delta}|f| + \int_{x_{k+1}-\delta}^{x_{k+1}}|f| = \int_{x_k}^{x_{k+1}}|f| - \int_{x_k+\delta}^{x_{k+1}-\delta}|f| < \frac{\varepsilon}{2n}.$$



Στο $[x_k+\delta, x_{k+1}-\delta]$ η f είναι R-ολοκληρώσιμη. Άρα, από το πόρισμα 1 (σελ 2) υπάρχει κλιμακωτή $s_k : [x_k+\delta, x_{k+1}-\delta] \to \mathbb{R}$ ώστε $\int_{x_k+\delta}^{x_{k+1}-\delta}|f-s_k| < \frac{\varepsilon}{2n}$. Επεκτείνουμε την s_k σε όλο το $[x_k, x_{k+1}]$ ορίζοντάς την $\equiv 0$ στα $[x_k, x_k+\delta)$, $(x_{k+1}-\delta, x_{k+1}]$.

Τότε $$\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f-s_k| = \int_{x_k}^{x_k+\delta}|f| + \int_{x_k+\delta}^{x_{k+1}-\delta}|f-s_k| + \int_{x_{k+1}-\delta}^{x_{k+1}}|f| < \frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{n}$$

Φτιάχνουμε έτσι μία s_k σε κάθε $[x_k, x_{k+1}]$. Όλες μαζί δίνουν μιά κλιμακωτή συνάρτηση $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε
$$\int_a^b |f-s| = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f-s_k| < n\cdot\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

Για να βρούμε συνεχή g, βρίσκουμε σύμφωνα με τα προηγούμενα πρώτα κλιμακωτή s ώστε $\int_a^b|f-s| < \frac{\varepsilon}{2}$ και μετά, ακριβώς όπως και στο πόρισμα 2 της σελ. 3, βρίσκουμε g συνεχή ώστε $\int_a^b|s-g| < \frac{\varepsilon}{2}$. Έτσι θα έχουμε
$$\int_a^b|f-g| \le \int_a^b|f-s| + \int_a^b|s-g| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$ <u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Παρατήρηση</u> Σύμφωνα με την παρατήρηση και την άσκηση της σελίδας 5 μπορούμε να βρούμε συνάρτηση g η οποία να έχει οποιονδήποτε αριθμό συνεχών παραγώγων και να δίνει $\int_a^b|f-g| < \varepsilon$

<u>Άσκηση</u> Έστω συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Θυμηθείτε το θεώρημα του Weierstrass: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ώστε $|g(x) - p(x)| \le \varepsilon$ $\forall\, x \in [a,b]$.

Με βάση αυτό αποδείξαμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ και κάθε ολοκληρώσιμη $f:(a,x_1)\cup(x_1,x_2)\cup\ldots\cup(x_{n-1},b)\to\mathbb{R}$ υπάρχει απειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $p(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ ώστε $\int_a^b|f-p|<\varepsilon$.

<u>Πρόταση</u> (α) Έστω $f:(a,x_1)\cup\ldots\cup(x_{n-1},b)\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο (a,b). Τότε η $F(x)=\int_a^x f$ είναι συνεχής στο $[a,b]$.

(β) Αν η f είναι συνεχής στο x τότε $F'(x)=f(x)$.

<u>Απόδειξη</u> (α). Έστω $x\in[a,b]$ και $\varepsilon>0$. Βρίσκουμε κλιμακωτή συνάρτηση $s:[a,b]\to\mathbb{R}$ ώστε $\int_a^b|f-s|<\varepsilon/3$.

Η s είναι R-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ άρα η $\int_a^x s$ είναι συνεχής συνάρτηση του x. Άρα υπάρχει $\delta>0$ ώστε

$$|y-x|<\delta \Rightarrow \left|\int_a^y s-\int_a^x s\right|<\varepsilon/3$$

Τότε όμως $\left|\int_a^y f-\int_a^x f\right|\le\left|\int_a^y f-\int_a^y s\right|+\left|\int_a^y s-\int_a^x s\right|+$

$$+\left|\int_a^x s-\int_a^x f\right|\le\int_a^y|f-s|+\frac{\varepsilon}{3}+\int_a^x|f-s|\le 2\cdot\int_a^b|f-s|+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon.$$

(β) Αν η f είναι συνεχής στο x τότε το x δεν ταυτίζεται με κανένα από τα $a,x_1,\ldots,x_{n-1},b$. Άρα για κάποιο k, $x_k<x<x_{k+1}$.

Έστω $\varepsilon>0$ και $\delta>0$ ώστε $|y-x|<\delta \Longrightarrow x_k<y<x_{k+1}$ και $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$.

Τότε $\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x))=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f$ και

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f-f(x))\right|\le\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f-f(x)|\le\frac{1}{h}\varepsilon h=\varepsilon$$

αν $|h|<\delta$.

Άρα $\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$. <u>Ο.Ε.Δ</u>

Γ. Σειρές αριθμών – σειρές συναρτήσεων

Ας ξαναθυμηθούμε ότι αν $|a_n| \le b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ τότε, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, συγκλίνει απολύτως και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (Σύγκριση σειρών).

Αν $a_n \ge 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ τότε: είτε τα μερικά αθροίσματα $s_n = a_1 + \dots + a_n$ είναι φραγμένα οπότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, είτε τα s_n δεν είναι φραγμένα οπότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

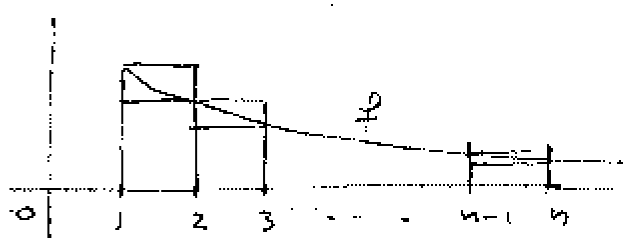
Επίσης ας θυμηθούμε το ολοκληρωτικό κριτήριο σύγκλισης σειράς: έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ θετική και φθίνουσα προς το 0. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνον αν το $\int_1^{+\infty} f$ συγκλίνει.

<u>Παράδειγμα</u> Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ συγκλίνει για $\alpha > 1$ και αποκλίνει για $0 < \alpha \le 1$ αφού το ίδιο ισχύει για το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$.

<u>Άσκηση</u> Τι έχετε να πείτε για την σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$;

<u>Απόδειξη του ολοκλ. κριτηρίου</u>

Συγκρίνοντας εμβαδά στο διπλανό σχήμα έχουμε:



$$\int_1^{n+1} f \le f(1) + \dots + f(n) \le f(1) + \int_1^n f$$

Αν το $\int_1^{\infty} f$ συγκλίνει, τότε το $\int_1^n f$ είναι φραγμένο καθώς το $n \to +\infty$. Άρα το $f(1) + \dots + f(n)$ είναι φραγμένο ως έτσι η $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει. Αντιστρόφως, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει τότε το $f(1) + \dots + f(n)$ είναι φραγμένο. Άρα το $\int_1^{n+1} f$ είναι φραγμένο καθώς το $n \to \infty$. Τότε το $\int_1^{\gamma} f$ είναι φραγμένο, αφού

$$\int_1^{\gamma} f \le \int_1^{[\gamma]+1} f .$$

Άρα το $\int_1^{\infty} f$ συγκλίνει. <u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Άσκηση</u> Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \ge 2$:

$$2\sqrt{n+1} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$$

και ότι η σειρά $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} + \dots$ συγκλίνει σε αριθμό α για τον οποίο ισχύει ότι $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi+1}{2}$.

<u>Άσκηση</u> Αν $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ και αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε

$\liminf_{n\to\infty} f(na_n) = 0$. Αν επιπλέον $a_n \downarrow$, τότε $na_n \to 0$.

Άθροιση κατά μέρη (Abel) Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$

Τότε $\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m$, $1 \le m \le n$

όπου $s_k = a_1 + \ldots + a_k$, $k \ge 1$, $s_0 = 0$.

Απόδειξη $a_m b_m + a_{m+1} b_{m+1} + \ldots + a_n b_n = (s_m - s_{m-1}) b_m + (s_{m+1} - s_m) b_{m+1}$

$+ \ldots + (s_n - s_{n-1}) b_n = s_m (b_m - b_{m+1}) + s_{m+1}(b_{m+1} - b_{m+2}) + \ldots$

$\ldots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n - s_{m-1} b_m$ Ο.Ε.Δ.

Όσα θα πούμε στη συνέχεια βασίζονται στο προηγούμενο πολύ απλό τύπο.

Παρατηρήστε την ομοιότητα με την ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\int_a^b f' g = -\int_a^b f g' + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Πόρισμα Έστω $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n \ge 0$ και

$m \le a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le M$.

Τότε $m b_1 \le \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le M b_1$.

Απόδειξη $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n \le \sum_{k=1}^{n-1} M (b_k - b_{k+1}) + M b_n$

$= M b_1$. Ομοίως βγαίνει και η άλλη ανισότητα. Ο.Ε.Δ.

Ο τύπος της άθροισης κατά μέρη και το πόρισμα έχουν ιδιαίτερες εφαρμογές.

Θεώρημα (Dirichlet) Έστω $b_n \downarrow 0$ και $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ φραγμένα. Δηλαδή $|s_n| \le M$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

Απόδειξη Εφαρμόζουμε το κριτήριο Cauchy. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $b_n \downarrow 0$ βρίσκουμε n_0 ώστε $b_{n_0} < \frac{\varepsilon}{2M}$. Τότε αν $n_0 \le m \le n$

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k b_k \right| \le 2M \cdot b_m \le 2M \cdot b_{n_0} < \varepsilon$$

Άρα η σειρά συγκλίνει. Εδώ εφαρμόσαμε το πόρισμα, αφού

$-2M \le a_m + a_{m+1} + \ldots + a_k = s_k - s_{m-1} \le 2M$, $m \le k \le n$.

Ο.Ε.Δ.

Θεώρημα (Abel) Έστω $b_n \downarrow b$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

Απόδειξη $\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b) + b\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Η τελευταία σειρά συγκλίνει. Η μεσαία συγκλίνει λόγω του Θεωρήματος Dirichlet, αφού $b_n - b \downarrow 0$ και $s_n = a_1 + \dots + a_n$ είναι φραγμένα λόγω της σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει. <u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Παράδειγμα</u> (Εναλλασσόμενα πρόσημα). Έστω $b_n \downarrow 0$. Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ συγκλίνει. Διότι, αν $a_n = (-1)^{n-1}$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} 1, & n = \text{περιττός} \\ 0, & n = \text{άρτιος}. \end{cases}$$

Όσον αφορά τις σειρές συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$, όπου $t \in A$ το κοινό πεδίο ορισμού των f_k (το A είναι συνήθως διάστημα ή ένωση διαστημάτων) καλό θα ήταν να θυμηθεί κανείς την διαφορά ανάμεσα στην κατά σημείον και στην ομοιόμορφη σύγκλιση:

(*) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) = f(t)$ <u>κατά σημείον στο A</u>, αν για κάθε $t \in A$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(t, \varepsilon)$ ώστε:

$$\left| f(t) - \sum_{k=1}^{n} f_k(t) \right| < \varepsilon \quad \text{για } n \geq n_0$$

(*) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) = f(t)$ <u>ομοιόμορφα στο A</u>, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε

$$\left| f(t) - \sum_{k=1}^{n} f_k(t) \right| < \varepsilon \quad \text{για } n \geq n_0 \text{ και για } t \in A.$$

Η ομοιόμορφη σύγκλιση συνεπάγεται την κατά σημείο σύγκλιση.

Υπάρχει το <u>κριτήριο Weierstrass</u>: Αν $|f_k(t)| \leq M_k$, $t \in A$, $k \in \mathbb{N}$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A.

Ακόμη ας θυμηθούμε:

(a) Αν κάθε f_k είναι συνεχής στο A και $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) = f(t)$ ομοιόμορφα στο A, τότε η f είναι συνεχής στο A.

(b) Αν κάθε f_k είναι R-ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) = f(t)$ ομοιόμορφα στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f είναι

R-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k$.

(γ) Αν κάθε f_k έχει συνεχή παράγωγο f_k' στο $[a,b]$ και $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t) = g(t)$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$ καθώς και $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t_0)$ συγκλίνει γιά τουλάχιστον ένα $t_0 \in [a,b]$, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$ σε κάποια συνάρτηση $f(t)$ και $f'(t) = g(t)$ (δηλαδή $\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t)$, $t \in [a,b]$)

<u>Θεώρημα (Dirichlet)</u> Έστω $b_n(t) \downarrow 0$ ομοιόμορφα στο A και $s_n(t) = a_1(t) + \dots + a_n(t)$ ομοιόμορφα φραγμένα στο A, δηλαδή γιά κάποιο M : $|s_n(t)| \le M$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in A$. Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) b_n(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A.

<u>Απόδειξη</u>. Ίδια με την απόδειξη του αντίστοιχου θεωρήματος γιά σειρές αριθμών. Η εξάρτηση του t δεν επηρεάζει την επιλογή του m_0 (έτσι ώστε $b_{m_0}(t) \le \varepsilon/2M$, $t \in A$) λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης $b_m(t) \downarrow 0$. Ομοίως:

$$-2M \le a_m(t) + \dots + a_k(t) \le 2M, \quad \text{γιά } m \le k \le n.$$

<u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Θεώρημα (Abel)</u> Έστω $b_n(t) \downarrow b(t)$, $b_n(t)$ ομοιόμορφα φραγμένα στο A, δηλαδή $|b_n(t)| \le M$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in A$. Επίσης έστω ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A. Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) b_n(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει m_0 ώστε: $m_0 \le m \le m'$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=m}^{m'} a_k(t) \right| < \varepsilon/3M, \quad t \in A.$$

Τότε, γιά $m_0 \le m \le n$, εφαρμόζοντας το κόρισμα της άθροισης κατά μέρη, παίρνουμε:

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k(t) b_k(t) \right| \le \left| \sum_{k=m}^{n} a_k(t)(b_k(t) - b(t)) \right| + \left| b(t) \sum_{k=m}^{n} a_k(t) \right|$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3M}(b_m(t) - b(t)) + |b(t)| \, \varepsilon/3M \le 3M \cdot \varepsilon/3M = \varepsilon.$$

Το κριτήριο Cauchy γιά ομοιόμορφη σύγκλιση συνεπάγεται τώρα την ομοιόμ. σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) b_n(t)$ στο A. <u>Ο.Ε.Δ.</u>

Άσκηση. Το θεώρημα Abel για σειρές αριθμών το πήραμε σαν πόρισμα του θεωρήματος Dirichlet. Τώρα, με τις συναρτήσεις, κάνατε ξεχωριστή απόδειξη. Γιατί;

Παρατήρηση. Πολλές φορές στην πράξη τα θεωρήματα Dirichlet και Abel εφαρμόζονται σε σειρές της μορφής

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot a_n(t)$$

όπου, είτε (Dirichlet) $a_1(t)+\dots+a_n(t)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένα για $t\in A$ και $b_n \downarrow 0$, είτε (Abel) η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $t\in A$ και $b_n \downarrow b$.

Σ' αυτές τις περιπτώσεις οι συναρτήσεις $b_n(t)$ παρουσιάζονται σαν σταθερές $b_n(t)\equiv b_n$ (και $b(t)\equiv b$).

Άσκηση. Έστω ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^x}$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $x\in[0,+\infty)$.

Άσκηση. Έστω ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και ότι $0\le \gamma_1\le \gamma_2\le \gamma_3\le \dots$. Αποδείξτε ότι η $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\gamma_k x}$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $x\in[0,+\infty)$ και ότι $\lim_{x\to 0+} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Άσκηση. Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $x\in\mathbb{R}$.

Άσκηση. Αν οι συναρτήσεις $f_k(x)$ είναι συνεχείς στο $[a,b]$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b)$ τότε η σειρά θα συγκλίνει και για $x=b$ και η σύγκλιση θα είναι ομοιόμορφη στο $[a,b]$.

Άσκηση. Η $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[-A,A]$ αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση. Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση. Αν για μία δυναμοσειρά ισχύει ότι $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ για $|x|\le\delta$, όπου $\delta>0$, τότε $a_n=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Δ. Πρώτο και δεύτερο θεώρημα μέσης τιμής ολοκληρωτικού λογισμού.

Πρώτο θεώρημα Έστω $f, \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ δύο R-ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και (i) $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$

(ii) $m \leq \varphi(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$.

(α) Τότε $m \int_a^b f \leq \int_a^b \varphi \cdot f \leq M \int_a^b f$.

(β) Αν, επιπλέον, η φ είναι συνεχής τότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$\int_a^b \varphi \cdot f = \varphi(\xi) \int_a^b f.$$

Απόδειξη (α) $m \leq \varphi(x) \leq M \implies m \cdot f(x) \leq \varphi(x) f(x) \leq M f(x)$, $\forall x \in [a,b]$. $\Rightarrow m \int_a^b f \leq \int_a^b \varphi f \leq M \int_a^b f$.

(β) Η (ii) ισχύει για $M = \max \varphi$, $m = \min \varphi$. Άρα

$$\min \varphi \cdot \int_a^b f \leq \int_a^b \varphi f \leq \max \varphi \cdot \int_a^b f.$$

Αν $\int_a^b f \neq 0$ τότε ο αριθμός $\int_a^b \varphi f / \int_a^b f$ βρίσκεται ανάμεσα στην μεγαλύτερη και στην μικρότερη τιμή της φ. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$\varphi(\xi) = \int_a^b \varphi f \Big/ \int_a^b f.$$

Αν $\int_a^b f = 0$ τότε η προηγούμενη ανισότητα δίνει $\int_a^b \varphi f = 0$ κι έτσι $\int_a^b \varphi f = \varphi(\xi) \int_a^b f$ για οποιοδήποτε ξ. **Ο.Ε.Δ.**

Δεύτερο θεώρημα Έστω $f, \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ δύο R-ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και: $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$ και $f \downarrow$ στο $[a,b]$. Τότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $\int_a^b f \varphi = f(a) \int_a^\xi \varphi$.

Πρώτη απόδειξη (με επιπλέον υποθέσεις) Υποθέτουμε επίσης ότι η f είναι συνεχής και έχει παράγωγο f' συνεχή στο $[a,b]$ και ότι η φ είναι συνεχής στο $[a,b]$.

Θεωρούμε $F(x) = \int_a^x \varphi$. Η F είναι παραγωγίσιμη και $F' = \varphi$.

Τότε $\int_a^b f \varphi = \int_a^b f F' = f(b) F(b) - f(a) F(a) - \int_a^b f' F =$

$= f(b) F(b) + \int_a^b (-f') \cdot F$.

Από το πρώτο θεώρημα, αφού $-f' \ge 0$ και F συνεχής, η τελευταία παράσταση είναι:

$$= f(b)F(b) + F(\xi')\int_a^b (-f') \qquad \text{για κάποιο } \xi' \in [a,b]$$

$$= f(b)F(b) + F(\xi')\big(f(a) - f(b)\big).$$

Τώρα, αν $f(a) \neq 0$:

$$= f(a)\left\{ \frac{f(b)}{f(a)} F(b) + \frac{f(a)-f(b)}{f(a)} F(\xi') \right\}$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{f(b)}{f(a)} \ge 0$, $\frac{f(a)-f(b)}{f(a)} \ge 0$ και ότι

$$\frac{f(b)}{f(a)} + \frac{f(a)-f(b)}{f(a)} = 1.$$

Άρα η αγκύλη είναι αριθμός ανάμεσα στα $F(b)$, $F(\xi')$ και, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει αριθμός ξ ώστε

$$\frac{f(b)}{f(a)} F(b) + \frac{f(a)-f(b)}{f(a)} F(\xi') = F(\xi).$$

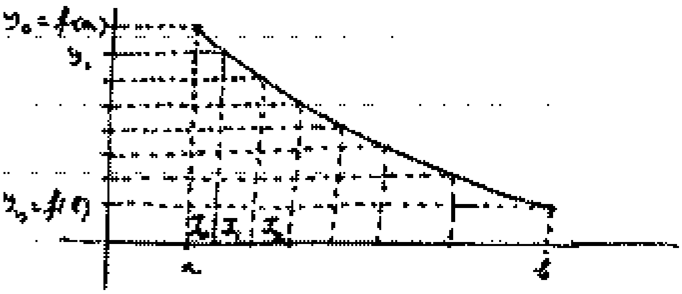
Άρα $\int_a^b f\varphi = f(a)F(\xi) = f(a)\int_a^\xi \varphi$.

Αν $f(a) = 0$, τότε $f \equiv 0$ και έτσι

$$\int_a^b f\varphi = 0 = f(a)\int_a^\xi \varphi \qquad \text{για οποιοδήποτε } \xi.$$

<u>Γενική απόδειξη</u>. Χωρίζουμε το πεδίο τιμών $[f(b), f(a)]$ της f σε n ίσα κομμάτια: $[y_1, y_0], [y_2, y_1], \dots, [y_n, y_{n-1}]$ όπου

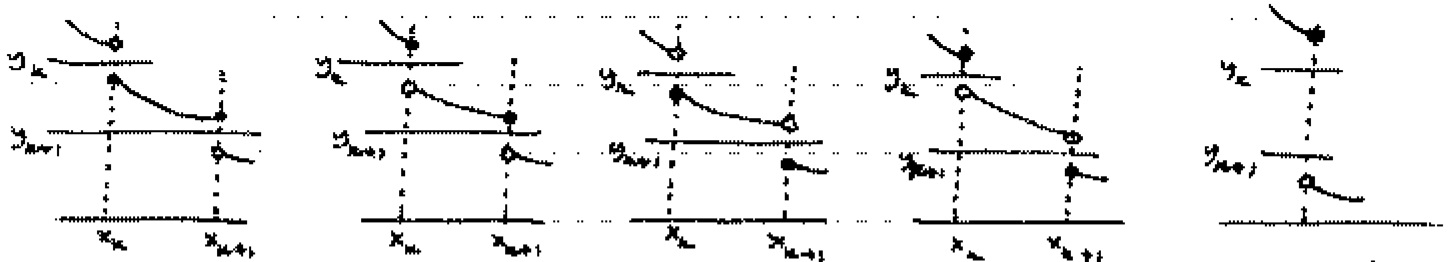
$$y_k = f(a) - k\cdot\frac{f(a)-f(b)}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$



Θεωρούμε τα σύνολα

$$I_k = \{x : y_{k+1} \le f(x) \le y_k\}.$$

Το καθένα I_k είτε είναι κενό είτε είναι διάστημα ανοικτό, κλειστό ή ημιανοικτό:



$I_k = [x_k, x_{k+1}]$ $\quad$ $I_k = (x_k, x_{k+1}]$ $\quad$ $I_k = [x_k, x_{k+1})$ $\quad$ $I_k = (x_k, x_{k+1})$ $\quad$ $I_k = \emptyset$

Και ακόμα τα $I_0, I_1, I_2, \dots, I_{n-1}$ είναι διαδοχικά και καλύπτουν το $[\alpha, \beta]$. Άρα:

$$\int_\alpha^\beta f\varphi = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{I_k} f\varphi = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{I_k} (f-y_k)\varphi + \sum_{k=0}^{n-1} y_k \int_{I_k} \varphi = A + B.$$

Στο διάστημα I_k : $y_{k+1} - y_k \le f(x) - y_k \le 0$, δηλαδή

$$|f(x) - y_k| \le \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{n}.$$

Άρα $|A| \le \sum_{k=0}^{n-1} \int_{I_k} |f-y_k||\varphi| \le \frac{f(\alpha)-f(\beta)}{n} \int_\alpha^\beta |\varphi|$.

Για το B εφαρμόζουμε το λήμμα της άθροισης κατά μέρη:

$$y_0 \ge y_1 \ge \dots \ge y_n \ge 0 \quad \text{και}$$

$$\min_x \int_\alpha^x \varphi \le \int_{I_0} \varphi, \ \int_{I_0} \varphi + \int_{I_1} \varphi, \dots, \int_{I_0}\varphi + \int_{I_1}\varphi + \dots + \int_{I_{n-1}} \varphi \le \max_x \int_\alpha^x \varphi.$$

Άρα $\quad y_0 \cdot \min_x \int_\alpha^x \varphi \le B \le y_0 \max_x \int_\alpha^x \varphi$

Άρα

$$-\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{n}\int_\alpha^\beta |\varphi| + f(\alpha) \min_x \int_\alpha^x \varphi \le \int_\alpha^\beta f\varphi \le \frac{f(\alpha)-f(\beta)}{n}\int_\alpha^\beta |\varphi| + f(\alpha) \cdot \max_x \int_\alpha^x \varphi$$

Αφήνουμε το $n \to \infty$:

$$f(\alpha) \cdot \min_x \int_\alpha^x \varphi \le \int_\alpha^\beta f\varphi \le f(\alpha) \cdot \max_x \int_\alpha^x \varphi$$

Αν τώρα $f(\alpha) \ne 0$, ο αριθμός $\int_\alpha^\beta f\varphi / f(\alpha)$ βρίσκεται ανάμεσα στο max και στο min της συνεχούς συνάρτησης $\int_\alpha^x \varphi$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει ξ ώστε

$$\int_\alpha^\beta f\varphi / f(\alpha) = \int_\alpha^\xi \varphi.$$

Αν όμως $f(\alpha) = 0$, τότε η τελευταία ανισότητα δίνει $\int_\alpha^\beta f\varphi = 0$ και έτσι $\int_\alpha^\beta f\varphi = 0 = f(\alpha)\int_\alpha^\xi \varphi$ για οποιοδήποτε ξ. <u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Εφαρμογή</u> Το $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ συγκλίνει.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $\gamma > 2/\varepsilon$. Τότε, αν $\gamma \le \gamma_1 < \gamma_2$:

$$\left| \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| \frac{1}{\gamma_1} \int_{\gamma_1}^{\xi} \sin x \, dx \right| = \frac{|\cos\gamma_1 - \cos\xi|}{\gamma_1} \le 2/\gamma_1 \le 2/\gamma < \varepsilon.$$

Από κριτήριο Cauchy το $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ συγκλίνει.

Άσκηση Γενίκευση της προηγούμενης εφαρμογής. Έστω $\varphi, f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις R-ολοκληρώσιμες σε κάθε διάστημα $[a,\gamma]$ $(a \le \gamma < \infty)$ και για τις οποίες ισχύει ότι (i) $f \downarrow 0$, και (ii) το $\int_a^x \varphi$ είναι φραγμένη συνάρτηση του x. Αποδείξτε ότι το $\int_a^{+\infty} \varphi f$ συγκλίνει.

Άσκηση Αν $\varphi, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι R-ολοκληρώσιμες και $f \downarrow$ τότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$\int_a^b f\varphi = f(a)\int_a^{\xi} \varphi + f(b)\int_{\xi}^b \varphi .$$

Αποδείξτε το σαν εφαρμογή του δεύτερου θεωρήματος. Αποδείξτε ότι και το δεύτερο θεώρημα είναι εφαρμογή αυτής της άσκησης.

<u>Τριγωνομετρική σειρά</u> ονομάζουμε κάθε σειρά της μορφής
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$
όπου τα $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Μία τριγωνομετρική σειρά είναι δυνατόν να συγκλίνει γιά όλα τα x ή να συγκλίνει γιά μερικά x και να αποκλίνει γιά τα υπόλοιπα x ή να αποκλίνει γιά όλα τα x.

Οι απλούστερες τριγωνομ. σειρές είναι τα <u>τριγωνομετρικά πολυώνυμα</u> δηλ. πεπερασμένα αθροίσματα
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$
Εδώ $a_k = b_k = 0$ αν $k \geq N+1$. Αν, επί πλέον, $|a_N|+|b_N|>0$ τότε το N λέγεται βαθμός του πολυωνύμου.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ μπορούμε να ξαναγράψουμε τα μερικά αθροίσματα μιας τριγ. σειράς ως εξής:
$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\right) \\ &= \sum_{k=-1}^{-n} \frac{a_{-k}+ib_{-k}}{2} e^{ikx} + \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - i b_k}{2} e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \end{aligned}$$

όπου
$$c_k = \begin{cases} \dfrac{a_k - i b_k}{2}, & k \geq 1 \\ \dfrac{a_0}{2}, & k = 0 \\ \dfrac{a_{-k} + i b_{-k}}{2}, & k \leq -1 \end{cases}$$
Έτσι παίρνουμε την λεγόμενη μιγαδική μορφή μιας τριγ. σειράς
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

<u>Παρατήρηση</u> Τέτοιου είδους μετασχηματισμοί είναι χρήσιμοι, διότι η τριγων. σειρά μετατρέπεται σε σειρά δυνάμεων του $z = e^{ix}$, και διευκολύνονται οι υπολογισμοί.

Αν σε μιά τριγ. σειρά $b_k = 0$ για $k \in \mathbb{N}$ τότε μιλάμε για **σειρά συνημιτόνων**, ενώ αν $a_k = 0$ για $k = 0, 1, 2, \dots$ τότε μιλάμε για **σειρά ημιτόνων**.

Αν η τριγ. σειρά συγκλίνει για κάποιο x, δηλ. $s_n(x) \to s(x)$, τότε συγκλίνει και για κάθε $x + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, και το όριο είναι το ίδιο: Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, λόγω περιοδικότητας των συναρτήσεων $\sin nx$, $\cos nx$,

$$s_n(x + k \cdot 2\pi) = s_n(x).$$

Άρα, αν $s_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} s(x)$, τότε $s_n(x + k\cdot 2\pi) \xrightarrow[n\to\infty]{} s(x)$.

Επομένως η συνάρτηση $s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ που ορίζεται στα x όπου η σειρά συγκλίνει, είναι περιοδική με περίοδο 2π και το πεδίο ορισμού της είναι σύνολο περιοδικό με περίοδο 2π (δηλαδή το κομμάτι του που είναι μέσα στο διάστημα $[k\cdot 2\pi, (k+1)\cdot 2\pi]$ είναι μεταφορά κατά $k \cdot 2\pi$ του κομματιού του μέσα στο $[0, 2\pi]$.)

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να εξετάσουμε την συμπεριφορά μιας τριγ. σειράς σε οποιοδήποτε διάστημα μήκους 2π, συνήθως το $[0, 2\pi]$ ή το $[-\pi, \pi]$.

Παραδείγματα.

1.
$$s_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}, & x \neq k\cdot 2\pi \\ n + \frac{1}{2}, & x = k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$t_n(x) = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \begin{cases} \dfrac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}, & x \neq k\cdot 2\pi \\ 0, & x = k\cdot 2\pi \end{cases}$$

Και οι δύο τύποι αποδεικνύονται αν πολλαπλασιάσουμε με $2\sin\frac{x}{2}$ και χρησιμοποιήσουμε τις ταυτότητες:

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\beta+\alpha) - \sin(\beta-\alpha)$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\beta-\alpha) - \cos(\beta+\alpha)$$

Ένας άλλος τρόπος είναι ο εξής:

$$s_n + i t_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos kx + i \sin kx) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} + i\,\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Εν τω μεταξύ οι τριγ. σειρές $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$, $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$ συγκλίνουν για κανένα x η πρώτη και μόνον για $x = m\pi$ η δεύτερη. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$\cos kx \not\to 0$ για όλα τα x

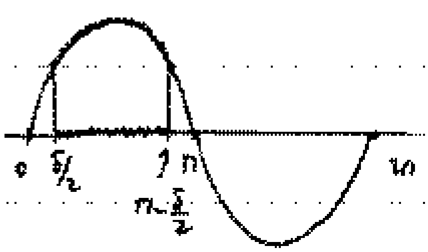
$\sin kx \to 0$ μόνον για $x = m\pi$.

(Διότι αν $\cos kx \to 0$, τότε $\cos 2kx \to 0$, δηλ. $2\cos^2 kx - 1 \to 0$, $\cos^2 kx \to \frac{1}{2}$, άτοπο. Όμοια, αν $x \neq m\pi$ και $\sin kx \to 0$, τότε $0 \leftarrow \sin(k+1)x = \sin kx \cdot \cos x + \cos kx \sin x$. Άρα $\sin x \cdot \cos kx \to 0$, $\cos kx \to 0$. Άτοπο, διότι $\sin^2 kx + \cos^2 kx = 1$)

<u>Σημαντική παρατήρηση</u>. Από τους τύπους για τα $s_n(x)$, $t_n(x)$ βρίσκουμε ότι

$$\boxed{\left|\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \le \frac{1}{2|\sin\frac{x}{2}|}, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}}$$

για $x \neq 2m\pi$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$.



Αν το x ανήκει σε ένα διάστημα της μορφής $[\delta, 2\pi - \delta]$, $0 < \delta < \pi$, τότε, όπως φαίνεται από το διπλανό σχήμα

$$\left|\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \le \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα τα μερικά αθροίσματα $s_n(x)$, $t_n(x)$ μένουν <u>ομοιόμορφα φραγμένα</u> σε διάστημα $[\delta, 2\pi - \delta]$, $0 < \delta < \pi$, παρά το ότι δεν συγκλίνουν για κανένα x σ' αυτό το διάστημα.

Όμως στο $(0,2\pi)$ δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένα, δηλ. δεν υπάρχει αριθμός M ώστε

$$\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|\le M \quad \text{ή} \quad \left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\le M$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε $x\in(0,2\pi)$.

Για παράδειγμα, στο πρώτο μερικό άθροισμα γράφω $x=\frac{\pi}{2n+1}$ και παίρνω:

$$s_n\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n+1}\right)}{2\sin\frac{\pi}{2(2n+1)}} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2(2n+1)}} \longrightarrow \infty$$

αν $n\to\infty$.

<u>Ορισμός</u> Αν για κάθε r, $0\le r<1$, η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n r^n$ συγκλίνει και $s=\lim_{r\to1-}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n r^n$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n$ είναι <u>Abel-αθροίσιμη</u> με <u>Α-άθροισμα</u> s.

Από το παράδειγμα $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ βλέπουμε ότι μπορεί μια σειρά να αποκλίνει και να είναι Abel-αθροίσιμη:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n r^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-r)^n = \frac{1}{1+r} \quad \text{και} \quad \lim_{r\to1-}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n r^n = \frac{1}{2}.$$

Έχουμε όμως το εξής βασικό:

<u>Θεώρημα Abel για δυναμοσειρές</u>: Αν η $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n=s$ συγκλίνει τότε είναι Abel-αθροίσιμη με Α-άθροισμα s.

<u>Απόδειξη</u> Θεωρούμε τις συναρτήσεις $b_n(r)=r^n$ για $r\in[0,1]$ και τις $a_n(r)\equiv\gamma_n$ στο $[0,1]$. Οι b_n φθίνουν καθώς το n αυξάνει και είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο $[0,1]$ αφού $|b_n(r)|=|r^n|\le 1$. Επί πλέον η $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n=s$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Από το Θεώρημα του Abel (σελ. 18) έχουμε ότι η $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n r^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r)\,b_n(r)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Αφού η $\gamma_n r^n$ είναι συνεχής συνάρτηση, η $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n r^n$ ορίζει συνεχή συνάρτηση. Άρα

$$\lim_{r\to1}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n 1^n = s$$

<u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Άσκηση</u>. Από την ισότητα $\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\dots$ για $|x|<1$ αποδείξτε ότι $\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$

Άσκηση Αποδείξτε το θεώρημα Abel για δυναμοσειρές απ' ευθείας.

Άσκηση Ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ είναι βαθμού n αν $|a_n|+|b_n|\neq 0$.
Τα τριγ. πολυώνυμα $\cos nx$, $\sin nx$ είναι βαθμού n και έχουν το καθένα $2n$ ρίζες στο διάστημα $[0,2\pi)$. Βρείτε αυτές τις ρίζες. Αποδείξτε ότι οποιοδήποτε τριγ. πολυώνυμο βαθμού n δεν έχει περισσότερες από $2n$ ρίζες στο $[0,2\pi)$.
(Υποδ: γράψτε $z=e^{ix}$, δηλ. $\cos kx=\frac{1}{2}(z^k+z^{-k})$, $\sin kx=\frac{1}{2i}(z^k-z^{-k})$ και αναγάγετε σε αλγεβρικό πολυώνυμο)

Ας δούμε τώρα αν οι σειρές $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\cos kx$, $\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx$ είναι Abel-αθροίσιμες. Αν μιμηθούμε τον δεύτερο υπολογισμό της σελ. 26 έχουμε:

$$s_n(r,x)+i\,t_n(r,x)=\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}r^k\cos kx\right)+i\sum_{k=1}^{n}r^k\sin kx=$$
$$=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}r^k e^{ikx}=-\frac{1}{2}+\frac{r^{n+2}\cos nx-r\cos x-r^{n+1}\cos(n+1)x+1}{1-2r\cos x+r^2}+$$
$$+i\,\frac{r^{n+2}\sin nx+r\sin x-r^{n+1}\sin(n+1)x}{1-2r\cos x+r^2}$$

Αφού $0\leq r<1$ παίρνουμε ότι:

$$s_n(r,x)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2},\qquad t_n(r,x)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}.$$

Δηλαδή

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}r^k\cos kx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\\&\sum_{k=1}^{\infty}r^k\sin kx=\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}\end{aligned}\quad,\quad 0\leq r<1}$$

Έτσι το A-άθροισμα της πρώτης σειράς είναι

$$\lim_{r\to 1-}\frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}=\begin{cases}0, & \text{αν } x\neq k\cdot 2\pi\\ +\infty, & \text{αν } x=k\cdot 2\pi\end{cases}$$

ενώ της δεύτερης

$$\lim_{r\to 1-}\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}=\begin{cases}\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}, & x\neq k\cdot 2\pi\\ 0, & x=k\cdot 2\pi\end{cases}$$

2. Το δεύτερο παράδειγμά μας είναι οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\cos kx \, , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\sin kx \, .$$

Για $x = m\cdot 2\pi$ η πρώτη αποκλίνει στο $+\infty$ ενώ η δεύτερη είναι 0. Άρα θα περιορισθούμε στο $0<x<2\pi$.

Λόγω της παρατήρησης της σελ. 26 και επειδή $\frac{1}{k} \downarrow 0$ η σύγκλιση των δύο σειρών στο $(0,2\pi)$ είναι άμεση εφαρμογή του θεωρήματος του Dirichlet. Επί πλέον αφού τα $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx$, $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$ είναι ομοιόμορφα φραγμένα στο $[\delta, 2\pi-\delta]$, $0<\delta<\pi$, η <u>ομοιόμορφη σύγκλιση</u> των δύο σειρών σε κάθε διάστημα της μορφής $[\delta, 2\pi-\delta]$ είναι απόρροια του θεωρήματος του Dirichlet (σελ. 18)

Άρα αν $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\cos kx$, $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\sin kx$ στο $(0,2\pi)$ τότε οι $f(x), g(x)$ είναι συνεχείς σε κάθε διάστημα $[\delta, 2\pi-\delta]$ $(0<\delta<\pi)$. Άρα θα είναι συνεχείς στο $(0,2\pi)$. (Διότι, έστω τυχόν x στο $(0,2\pi)$. Διαλέγουμε δ ώστε $0<\delta<x<2\pi-\delta<2\pi$. Οι f, g είναι συνεχείς στο $[\delta, 2\pi-\delta]$. Άρα θα είναι συνεχείς στο x. Αφού, λοιπόν, είναι συνεχείς στο τυχόν x του $(0,2\pi)$, θα είναι συνεχείς στο $(0,2\pi)$.)

Μένει να βρούμε, αν είναι δυνατόν, τις f, g. Ένας τρόπος είναι να εφαρμόσουμε το θεώρημα Abel για δυναμοσειρές. Θα υπολογίσουμε δηλ. πρώτα τις $\sum_{k=1}^{\infty} r^k \frac{1}{k}\cos kx$, $\sum_{k=1}^{\infty} r^k \frac{1}{k}\sin kx$ και μετά θα βρούμε τα όριά τους καθώς $r \to 1-$.

Σταθεροποιούμε ένα $r<1$ και βλέπουμε ότι η σύγκλιση στους τύπους της σελ. 28 είναι ομοιόμορφη στο $[0,2\pi]$ λόγω του κριτηρίου Weierstrass. Ολοκληρώνοντας κατά όρο την πρώτη σειρά:

$$\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k}\sin kx = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}\, dt =$$

$$= \operatorname{Arctan}\left(\frac{1-r}{1+r}\cot\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \quad , \qquad 0<x<2\pi .$$

(όπου αλλάζουμε μεταβλητή $s=\cot\frac{t}{2}$, και $\operatorname{Arctan} x = y$ σημαίνει $x=\tan y$ και $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$)

Επίσης, από την δεύτερη σειρά:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k}(1-\cos kx) = \int_0^x \frac{r\sin t}{1-2r\cos t+r^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\log(1-2r\cos x+r^2) - \frac{1}{2}\log(1-r)^2$$

Άρα $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k}\cos kx = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{1-2r\cos x+r^2}\right)$.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Abel για δυναμοσειρές έχουμε:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cos kx = \log\left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \quad , \qquad 0<x<2\pi \\ &\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin kx = \frac{\pi-x}{2} \quad , \qquad 0<x<2\pi \end{aligned}}$$

Αν στην πρώτη σειρά θέσουμε $x=\pi$ τότε παίρνουμε

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots = \log 2$$

και αν στην δεύτερη σειρά θέσουμε $x=\pi/2$ τότε

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots = \pi/4 .$$

3. Το τρίτο παράδειγμα είναι οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos kx \; , \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin kx$$

Κατ' αρχήν θα παρατηρήσουμε ότι

<u>Πρόταση</u> Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k$ συγκλίνει απολύτως τότε οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\cos kx$, $\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\sin kx$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη</u> Άμεση εφαρμογή του κριτηρίου Weierstrass. <u>Ο.Ε.Δ.</u>

Άρα, για παράδειγμα, σειρές της μορφής

$$\sum_{k=1}^{\infty}r^k\cos kx \; , \quad \sum_{k=1}^{\infty}r^k\sin kx \; , \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}\cos kx \; , \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}\sin kx$$

με $0\le r<1$, $\alpha>1$ είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσες στο $\mathbb{R}$ και ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$.

Επιπλέον μία πρόταση που ήδη χρησιμοποιήσαμε στο παράδειγμα 2.

Πρόταση. Αν $\gamma_k \downarrow 0$ τότε οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos kx$, $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sin kx$ συγκλίνουν για $x \in (0, 2\pi)$ και συγκλίνουν ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\delta, 2\pi - \delta]$ $(0 < \delta < \pi)$. Ορίζουν δε συνεχείς συναρτήσεις στο $(0, 2\pi)$.

Απόδειξη. Όπως κάναμε με $\gamma_k = \frac{1}{k}$ στο παράδειγμα 2, εφαρμόζουμε το θεώρημα Dirichlet και την παρατήρηση της σελίδας 26. Ο.Ε.Δ.

Άρα, για παράδειγμα, οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \cos kx$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sin kx$ με $0 < \alpha \leq 1$ συγκλίνουν σε συνεχείς συναρτήσεις στο $(0, 2\pi)$. Οι σειρές που μας ενδιαφέρουν στο τρίτο μας παράδειγμα καλύπτονται από την πρώτη πρόταση. Μένει να βρούμε την συγκεκριμένη μορφή του ορίου τους.

Από το δεύτερο παράδειγμα η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx = \frac{\pi - x}{2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha, \beta]$ αρκεί $0 < \alpha < \beta < 2\pi$.

Αν ολοκληρώσουμε κατά όρο έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (\cos k\alpha - \cos k\beta) = \frac{\pi\beta}{2} - \frac{\beta^2}{4} - \frac{\pi\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4}$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ (Weierstrass) και άρα θα είναι συνεχής συνάρτηση του β. Άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (\cos k\alpha - 1) = \lim_{\beta \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (\cos k\alpha - \cos k\beta) = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\pi\alpha}{2}$$

και $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos kx = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Μένει να υπολογίσουμε τον αριθμό $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Με $x = \pi$ παίρνουμε:

$$-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \dots = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) - \frac{\pi^2}{4}$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

Άρα $$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right)$$

$$\frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) = \frac{\pi^2}{8}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

Επομένως

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\cos kx = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \quad , \quad 0<x<2\pi}$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\sin kx = \int_0^x \log\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right) dt \quad , \quad 0<x<2\pi}$$

<u>Άσκηση</u> Αποδείξτε τον τελευταίο τύπο.

Το τελευταίο ολοκλήρωμα, δυστυχώς, δεν ανάγεται σε στοιχειώδεις συναρτήσεις!

<u>Άσκηση</u> Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}$ συγκλίνουν στο $(-\pi,\pi)$ και, για κάθε δ $0<\delta<\pi$, συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[-\pi+\delta, \pi-\delta]$. Αποδείξτε το και βρείτε τα όριά τους.

<u>Άσκηση</u> Βρείτε τα όρια των σειρών

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\sin 2nx$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\cos 2nx$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\sin nx$.

Βρείτε για ποιά x συγκλίνουν και σε ποιά διαστήματα συγκλίνουν ομοιόμορφα.

<u>Άσκηση</u> Αν $a_n \downarrow 0$, αναγκαία και ικανή συνθήκη για να συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ είναι $n a_n \longrightarrow 0$.

<u>Άσκηση</u> Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\log n}$ συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

<u>Άσκηση</u> Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx\,\sin^2 na = \begin{cases} \text{σταθερή}, & \text{για } 0<x<2a \\ 0, & \text{για } 2a<x<\pi \end{cases}$

<u>Άσκηση</u> Αποδείξτε ότι τα ζεύγη (x,y) του επιπέδου που ικανοποιούν την $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\sin nx\,\sin ny = 0$ αποτελούν δύο ορθογώνια συστήματα παράλληλων γραμμών που χωρίζουν το επίπεδο σε τετράγωνα εμβαδού π^2.

<u>Άσκηση</u> Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\sin ny\,\cos nx = 0$ ορίζει σημεία (x,y) στο επίπεδο που αποτελούν τις γραμμές $y=m\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$ μαζί με τόξα ελλείψεων που έχουν ημιάξονες π και $\pi/\sqrt{3}$ και που βρίσκονται (τα τόξα) μέσα σε

τετράγωνα εμβαδού $2\pi^2$. Ζωγραφίστε.

<u>Άσκηση</u> Αν το (x, y, z) βρίσκεται μέσα στο οκτάεδρο που γράφεται από τα επίπεδα $\pm x \pm y \pm z = \pi$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx \sin ny \sin nz}{n^3} = \frac{1}{2} xyz$$

<u>Άσκηση</u> Ζωγραφίστε τις καμπύλες που οι πολικές συντεταγμένες (r, θ) των σημείων τους ικανοποιούν την

$$\frac{r}{\alpha} = 1 + \frac{2m}{\pi} \sin\frac{\pi}{m} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nm\theta)}{1 - n^2 m^2} \right\}.$$

<u>Πρόταση</u> Υπάρχουν δύο αριθμοί c_1 και c_2 ώστε

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin kx \right| \le c_1 \quad , \quad \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cos kx \right| \le c_2 + \log \frac{1}{x}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $0 < x < 2\pi$.

<u>Απόδειξη</u> Αρκεί να θεωρήσουμε $0 < x \le \pi$, διότι αν $\pi < x < 2\pi$ τότε $\sin kx = -\sin k(2\pi - x)$, $\cos kx = \cos k(2\pi - x)$

και $0 < 2\pi - x < \pi$.

Έστω λοιπόν $0 < x \le \pi$.

Ορίζουμε $m = \left[\frac{1}{x}\right]$, δηλαδή $m \le \frac{1}{x} < m+1$, $m \in \mathbb{N}$.

Τότε $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin kx = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \sin kx + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k} \sin kx = A + B$

(Αν $n \le m$ τότε ο όρος B δεν υπάρχει.)

$$|A| \le \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} |\sin kx| \le \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} kx = mx \le 1$$

Στο άθροισμα B παρατηρούμε ότι τα $\frac{1}{k}$ φθίνουν και είναι θετικά και ότι τα μερικά αθροίσματα

$$\left| \sum_{k=m+1}^{\lambda} \sin kx \right| \le \left| \sum_{k=1}^{\lambda} \sin kx \right| + \left| \sum_{k=1}^{m} \sin kx \right| \le \frac{2}{\sin\frac{x}{2}}$$

για $\lambda = m+1, \dots, n$ λόγω της παρατήρησης στη σελ. 26.

Άρα από το λήμμα της σελίδας 16:

$$|B| \le \frac{1}{m+1} \cdot \frac{2}{\sin\frac{x}{2}} \le \frac{2}{(m+1)\frac{x}{\pi}} = \frac{2\pi}{(m+1)x} < 2\pi$$

(Χρησιμοποιούμε την στοιχειώδη ανισότητα $\sin y \ge \frac{2}{\pi} y$ όταν $0 < y \le \frac{\pi}{2}$.)

Άρα $\displaystyle\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin kx \right| \le |A| + |B| \le 1 + 2\pi = c_1$.

Γιά τα υπόλοιπα με τον ίδιο τρόπο:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\cos kx = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\cos kx + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k}\cos kx = A + B .$$

Ίδιοι υπολογισμοί μας δίνουν $|B| \leq \pi$.

Επί πλέον $|A| \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}|\cos kx| \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \leq 1+\log m$

(δες σελ. 15 με $f(x)=\frac{1}{x}$)

Άρα $|A| \leq 1+\log\frac{1}{x}$, και

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\cos kx\right| \leq |A|+|B| \leq \pi+1+\log\frac{1}{x} = c_2+\log\frac{1}{x} .$$

<u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

<u>Άσκηση</u> Γιά ποιά x συγκλίνει η τριγ. σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\log n}$;
Αν με $f(x)$ συμβολίσουμε το όριο της σειράς αυτής, είναι η $f(x)$ συνεχής στο πεδίο ορισμού της; Είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της;

<u>Άσκηση</u> Ίδιες ερωτήσεις γιά την τριγ. σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{(\log n)^2}$.

<u>Άσκηση</u> Γιά ποιά x ισχύει ότι

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n^\alpha}\cos nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\cos nx \quad ; \quad (\alpha>0)$$

<u>Άσκηση</u> Έστω $x \neq k\cdot 2\pi$ και $a_n \downarrow 0$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx+\alpha)$ συγκλίνει. Αν $a_n \downarrow A \neq 0$ τότε η σειρά αποκλίνει και περιγράψτε όσο πιό αναλυτικά μπορείτε την συμπεριφορά των μερικών αθροισμάτων της σειράς διακρίνοντας περιπτώσεις $\frac{x}{\pi}\in\mathbb{Q}$ και $\frac{x}{\pi}\notin\mathbb{Q}$.

<u>Άσκηση</u> Βρείτε τα αθροίσματα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha\cos nx}{a^2+n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin nx}{a^2+n^2}$, $a\in\mathbb{R}$.

<u>Άσκηση</u> Αν η σειρά $g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(c_\nu - c_{\nu+1})\sin(2\nu+1)x$, $c_0=0$, συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$ τότε η $g(x)$ είναι η παράγωγος της $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu}\sin 2\nu x$ στο $[a,b]\setminus\{2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

ΚΕΦ III   ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

<u>Ορισμός</u>. Έστω συνάρτηση $f: [0,2\pi) \to \mathbb{R}$. Θεωρούμε την f ορισμένη σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ σαν περιοδική με περίοδο 2π.
Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,2\pi)$, υπενθυμίζοντας ότι αυτό σημαίνει πως το <u>γενικευμένο</u> ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi}|f|$ συγκλίνει. Επειδή $|f(x)\cos kx| \le |f(x)|$ και $|f(x)\sin kx| \le |f(x)|$ το κριτήριο σύγκρισης ολοκληρωμάτων δίνει ότι τα $\int_0^{2\pi}|f(x)\sin kx|\,dx$, $\int_0^{2\pi}|f(x)\cos kx|\,dx$ συγκλίνουν.
Άρα ορίζονται οι αριθμοί:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx\ , \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

για $k=0,1,2,3,\ldots\ldots$ $\quad (b_0=0)$.

Οι αριθμοί αυτοί <u>ονομάζονται συντελεστές Fourier της f</u>.
Επίσης θεωρούμε την τριγωνομετρική σειρά

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

που φτιάχνεται από τους πιο πάνω ορισθέντες a_k, b_k.
Αυτή η σειρά ονομάζεται <u>σειρά Fourier της f</u> και συμβολίζεται $S(f)$. Επίσης γράφουμε

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \quad \text{ή} \quad f(x) \sim S(f)(x).$$

Άρα σειρά Fourier είναι μία τριγωνομ. σειρά που προέρχεται από κάποια συνάρτηση f με τον τρόπο που μόλις περιγράψαμε.
Οι σειρές Fourier είναι υποσύνολο των τριγωνομ. σειρών.

<u>Ερώτημα 1</u>. Είναι κάθε τριγωνομετρική σειρά σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης;

<u>Ερώτημα 2</u>. Γιατί χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\sim$ αντί για το σύμβολο της ισότητας $=$; Μήπως είναι δυνατόν για κάποια (ή και για όλα τα) x η $S(f)$ να μην συγκλίνει; Και μήπως, αν συγκλίνει για κάποιο x, είναι δυνατόν να ισχύει

$$f(x) \neq S(f)(x) \ ;$$

Ερώτημα 3. Μιά σειρά Fourier ορίζεται μονοσήμαντα αν δοθεί η συνάρτηση f από την οποία προέρχεται. Αν γνωρίζουμε ότι μιά τριγ. σειρά είναι σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης ορίζεται αυτή η συνάρτηση μονοσήμαντα; Δηλαδή είναι δυνατόν μία τριγωνομετρική σειρά να είναι σειρά Fourier δύο διαφορετικών συναρτήσεων;

Ερώτημα 4. Αν γνωρίζουμε ότι μιά τριγων. σειρά είναι σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης υπάρχει τρόπος να βρεθεί η συνάρτηση αυτή; Ή αλλιώς: Από μία f κατασκευάζουμε την σειρά Fourier της $S(f)$. Πώς από την $S(f)$ μπορούμε να επανακτήσουμε την f;

Τα ερωτήματα αυτά (και άλλα πολλά) απασχόλησαν τους μαθηματικούς (και φυσικούς!) στην ιστορία δύο περίπου αιώνων που έχει αυτός ο κλάδος των μαθηματικών.

Παράδειγμα 1. Οι πιό απλές τριγωνομ. σειρές είναι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα $P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$.

Ποιά είναι η σειρά Fourier της συνάρτησης $P(x)$. Η $P(x)$ είναι περιοδική (με περίοδο 2π) και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Πρέπει να βρούμε τους αριθμούς: $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(x)\cos mx\,dx$, $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(x)\sin mx\,dx$ για $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Ας θυμηθούμε τους βασικούς τύπους:

$$\boxed{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\lambda x \cos\mu x\,dx \\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\lambda x \sin\mu x\,dx \end{array}\right\} = \begin{cases} 1, & \lambda = \mu \neq 0 \\ 0, & \lambda \neq \mu \end{cases} \\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\lambda x \sin\mu x\,dx = 0 \end{array}}$$

Έχουμε λοιπόν ότι $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(x)\,dx = a_0$ και

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(x)\cos mx\,dx = \begin{cases} a_m, & 1 \le m \le N \\ 0, & m > N \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(x)\sin mx\,dx = \begin{cases} b_m, & 1 \le m \le N \\ 0, & m > N \end{cases}$$

Άρα η σειρά Fourier του $P(x)$ είναι το ίδιο το $P(x)$.

$$S(P)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Άρα, για τριγ. πολυώνυμο η σειρά Fourier συγκλίνει (αφού είναι πεπερασμένο άθροισμα) και ταυτίζεται με το πολυώνυμο.

<u>Παράδειγμα 2.</u> Τώρα θα πάρουμε μια συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται σαν όριο μιας <u>ομοιόμορφα συγκλίνουσας στο $\mathbb{R}$</u> τριγωνομ. σειράς

Δηλ. υποθέτουμε $\quad f(x) \overset{\text{ομ}}{=} \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

για $x \in \mathbb{R}$.

Πχ παράδειγμα οι συναρτήσεις

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}, \quad \frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}, \quad \frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}, \quad \int_0^x \log\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right)dt$$

που εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ή οι συναρτήσεις που ορίζονται από τις τριγωνομ. σειρές

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}\sin kx, \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}\cos kx, \qquad \alpha > 1.$$

Ποιά είναι η σειρά Fourier μιας τέτοιας f;

Ας υπολογίσουμε το $\quad \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx$.

Αν $\quad S_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ τότε

$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} S_n(x)\cos mx\,dx = a_m$, αρκεί $n \geq m$.

Όμως, λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης, για δοσμένο $\varepsilon > 0$ υπάρχει n όσο μεγάλο θέλουμε ($n \geq m$) ώστε

$$|S_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{για} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx - a_m\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S_n(x)\cos mx\,dx\right|$$
$$= \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x)-S_n(x))\cos mx\,dx\right|$$
$$\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)-S_n(x)|\,|\cos mx|\,dx$$
$$\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon\cdot 1\cdot dx$$
$$= 2\varepsilon.$$

Αν λοιπόν $\varepsilon \to 0$ παίρνουμε, $\quad \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx = a_m$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι: $\quad \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx\,dx = b_m$.

Άρα η σειρά Fourier της f είναι ταυτόσημη με την τριγωνομ. σειρά μέσω της οποίας ορίζεται η f.

Άρα και αυτή η $S(f)$ συγκλίνει γιά κάθε x στην $f(x)$.

Πριν προχωρήσουμε πρέπει να κάνουμε μιά παρατήρηση.

<u>Παρατήρηση 1</u>. Όπως είπαμε και στην αρχή του κεφαλαίου οι συναρτήσεις που εξετάζουμε είναι ορισμένες σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$ και περιοδικές με περίοδο 2π. Αν κάποια συνάρτηση $f(x)$ μας δίνεται ορισμένη σε διάστημα μήκους 2π, π.χ. το $[0,2\pi)$ ή το $[-\pi,\pi)$, τότε εμείς την θεωρούμε ορισμένη σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$ με περιοδική επέκτασή της. <u>Προσοχή</u>: μερικές φορές η συνάρτηση δίνεται ορισμένη στο $[0,2\pi]$. Αν $f(0)=f(2\pi)$ δεν υπάρχει πρόβλημα. Αν όμως $f(0)\neq f(2\pi)$ τότε η f αυτή δεν μπορεί να είναι περιοδική. Πριν λοιπόν την επεκτείνουμε περιοδικά πρέπει να επαναορίσουμε τις τιμές της στο 0 και στο 2π, ώστε να ταυτίζονται. Διαλέγουμε έναν αριθμό α (ο οποίος μπορεί να είναι ο $f(0)$ ή ο $f(2\pi)$ ή κάποιος τρίτος) και ορίζουμε $f(0)=f(2\pi)=\alpha$. Τα ίδια ισχύουν και γιά το $[-\pi,\pi]$.

<u>Παρατήρηση 2</u>. Πολλές φορές θα μας δίνεται μιά συνάρτηση η οποία είναι ορισμένη σε διάστημα μήκους 2π <u>εκτός</u> από <u>πεπερασμένου</u> πλήθους σημεία. Επειδή στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων δεν παίζουν ρόλο οι τιμές μιάς συνάρτησης σε πεπερασμένου πλήθους σημεία (με την έννοια ότι μπορούμε να αλλάξουμε τις τιμές της στα σημεία αυτά χωρίς να αλλάξει το ολοκλήρωμά της) μπορούμε να ορίσουμε, αν θέλουμε, αυθαίρετα τιμές της συνάρτησης στα σημεία αυτά (αρκεί βεβαίως η συνάρτηση να είναι περιοδική).

<u>Παρατήρηση 3</u>. Αν η f είναι περιοδική με περίοδο 2π τότε

$$(*)\quad \boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha+k\cdot 2\pi}^{\beta+k\cdot 2\pi} f(x)\,dx}\quad,\ \text{γιά κάθε } \alpha,\beta\in\mathbb{R} \text{ και } k\in\mathbb{Z}.$$

Διότι: $\displaystyle\int_{\alpha+k2\pi}^{\beta+k2\pi} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(y+k\cdot 2\pi)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(y)\,dy$.

Λήμμα: (**) $\boxed{\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\,dx = \int_{\beta}^{\beta+2\pi} f(x)\,dx}$.

Διότι: $\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\,dx = \int_{\beta}^{\beta+2\pi} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx - \int_{\alpha+2\pi}^{\beta+2\pi} f(x)\,dx = \int_{\beta}^{\beta+2\pi} f(x)\,dx$

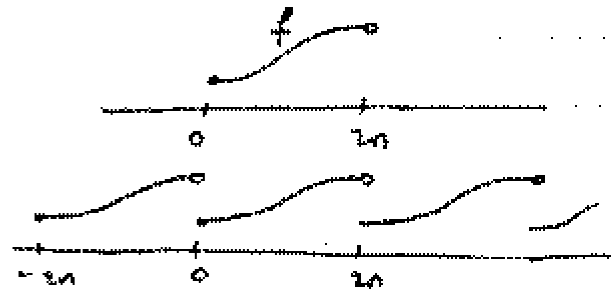
λόγω της (*).

Άμεση εφαρμογή της (**) είναι στον υπολογισμό των συντελεστών Fourier:

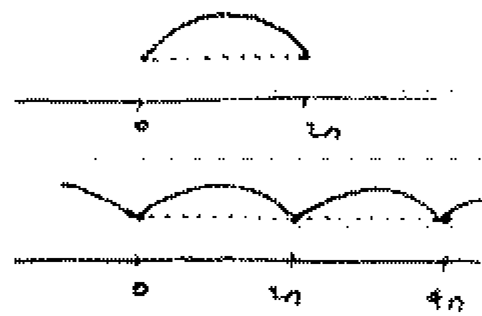
$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx.$$

Παρατήρηση 4. Όταν λέμε ότι μια περιοδική συνάρτηση f είναι συνεχής ή παραγωγίσιμη ή ότι έχει συνεχή παράγωγο εννοούμε ότι η f, ακόμη και αν μας δίνεται ορισμένη μόνο στο $[0, 2\pi)$ ή στο $[-\pi, \pi)$, αφού επεκταθεί περιοδικά σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$ έχει τις παραπάνω ιδιότητες σ' ολόκληρο το πεδίο ορισμού της δηλαδή στο $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα η συνάρτηση του επόμενου σχήματος είναι συνεχής στο $[0, 2\pi)$ αλλά δεν είναι συνεχής περιοδική συνάρτηση διότι η περιοδική επέκτασή της στο $\mathbb{R}$ δεν είναι συνεχής (παρουσιάζει άλματα στα σημεία $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$ κλπ) όπως φαίνεται από το δεύτερο σχήμα.



Ή η συνάρτηση στο τρίτο σχήμα είναι μεν συνεχής περιοδική αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη περιοδική, διότι, όπως φαίνεται στο τέταρτο σχήμα η περιοδική επέκτασή της δεν έχει παράγωγο (σχηματίζει "γωνία") στα σημεία $k\cdot 2\pi$. Κι όμως η αρχική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη



στο $[0,2\pi]$ αφού έχει παράγωγο σε κάθε σημείο του $(0,2\pi)$, δεξιά παράγωγο στο 0 και αριστερή παράγωγο στο 2π.

Μετά από αυτές τις παρατηρήσεις ας επιστρέψουμε στο παράδειγμα 2. Έχουμε λοιπόν ότι οι σειρές Fourier των συναρτήσεων

$$\frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}, \quad \frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}, \quad \frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}, \quad \int_0^x \log\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right)dt$$

είναι οι:

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} r^k\cos kx, \quad \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin kx, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos kx, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin kx$$

αντίστοιχα. Δηλαδή ότι:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\begin{Bmatrix}\cos kx\\ \sin kx\end{Bmatrix}dx = \begin{cases} r^k, \ k\geq 1, \quad \frac{1}{2}, \ k=0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}\begin{Bmatrix}\cos kx\\ \sin kx\end{Bmatrix}dx = \begin{cases} 0, \\ r^k \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}\right)\begin{Bmatrix}\cos kx\\ \sin kx\end{Bmatrix}dx = \begin{cases} 1/k^2 \\ 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^x \log\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right)dt \cdot \begin{Bmatrix}\cos kx\\ \sin kx\end{Bmatrix}dx = \begin{cases} 0 \\ 1/k^2 \end{cases}.$$

Από τους τέσσερις αυτούς τύπους οι δύο τελευταίοι βγαίνουν και με ολοκλήρωση κατά μέρη ενώ οι δύο πρώτοι είναι αρκετά δύσκολοι.

<u>Άσκηση</u> Αποδείξτε τους δύο τελευταίους τύπους.

<u>Άσκηση</u> Αποδείξτε τους δύο πρώτους τύπους "εύκολα" εφαρμόζοντας την μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων της μιγαδικής ανάλυσης.

<u>Παράδειγμα 3.</u> Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi-x}{2}, & 0<x<2\pi\\ 0, & x=0,2\pi.\end{cases}$

Μπορούμε να αποδείξουμε με απλή ολοκλήρωση κατά μέρη ότι

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\begin{Bmatrix}\cos kx\\ \sin kx\end{Bmatrix}dx = \begin{cases} 0 \\ 1/k \end{cases}$$

Άρα $f \sim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin kx$.

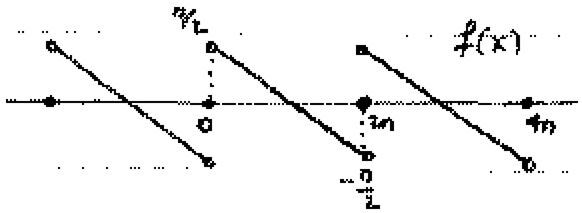
Ομοίως για την συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \log\left(\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right), & 0<x<2\pi \\ +\infty, & x=0,2\pi \end{cases}$

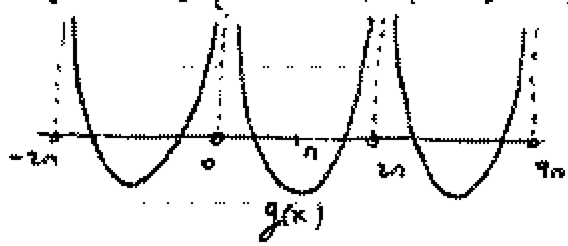
με ολοκλήρωση κατά μέρη μπορούμε να βρούμε ότι

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x) \begin{Bmatrix}\cos kx\\ \sin kx\end{Bmatrix} dx = \begin{cases} 1/k, & k\ge 1, \quad 0,\ k=0 \\ 0 \end{cases}.$$

Δηλαδή $\quad g \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\cos kx$.

Σ' αυτό το παράδειγμα δεν μπορούμε να μιμηθούμε αμέσως ό,τι κάναμε στο παράδειγμα 2: οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin kx$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cos kx$ συγκλίνουν στις συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$ αντίστοιχα στο $[0,2\pi]$ και στις περιοδικές τους επεκτάσεις σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$ (λόγω περιοδικότητος





των τριγ. σειρών. Συμβουλευτείτε την σχήματα της σελίδας 25)

Αν οι σειρές συνέκλιναν ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ στις $f(x)$, $g(x)$ αντίστοιχα τότε το παράδειγμα 2 θα έδινε ότι οι σειρές Fourier των f, g θα ήταν οι ίδιες οι σειρές. Αλλά οι τριγ. σειρές δεν συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Διότι αν ίσχυε αυτό τότε οι $f(x)$, $g(x)$ θα ήταν συνεχείς στο $\mathbb{R}$ το οποίο όμως δεν είναι αλήθεια καθώς φαίνεται από τα σχήματα.

<u>Άσκηση</u>. <u>Ορισμός</u>. Λέμε ότι μια σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ <u>συγκλίνει με φραγμένο τρόπο</u> σε συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα (α,β) αν συγκλίνει κατά σημείο στην $f(x)$ στο (α,β) και αν τα $s_n(x) = f_1(x)+\dots+f_n(x)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένα στο (α,β), δηλαδή υπάρχει αριθμός M ώστε

$$|s_n(x)| \le M \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \text{και} \quad \forall x\in(\alpha,\beta).$$

Αποδείξτε ότι αν (i) η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ συγκλίνει με φραγμένο τρόπο στην $f(x)$ στο (a,b), (ii) για κάθε $\delta>0$ η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)$ στο $[a+\delta, b-\delta]$ και (iii) η $g(x)$ είναι φραγμένη συνάρτηση στο (a,b), τότε

$$\int_a^b \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\Big) g(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\, g(x)\,dx .$$

<u>Άσκηση</u> Εφαρμόστε την προηγούμενη άσκηση για να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} \begin{Bmatrix} \cos mx \\ \sin mx \end{Bmatrix} dx = \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx\Big) \begin{Bmatrix} \cos mx \\ \sin mx \end{Bmatrix} dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \sin kx \begin{Bmatrix} \cos mx \\ \sin mx \end{Bmatrix} dx = \begin{cases} 0 \\ \frac{\pi}{m} \end{cases}$$

χρησιμοποιώντας την πρόταση της σελίδας 31 και την πρόταση της σελίδας 33.

<u>Άσκηση</u> Προσπαθήστε να λύσετε την προηγούμενη άσκηση με την συνάρτηση $g(x) = \log\left(\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right)$, $0<x<2\pi$.

Θα αναγκασθείτε να αποδείξετε κατάλληλη <u>παραλλαγή</u> της προ-προηγούμενης άσκησης !!

<u>Άσκηση</u> Ο πίνακας των επόμενων δύο σελίδων είναι από το βιβλίο του G. Folland "Fourier analysis and its applications". Στην πρώτη στήλη περιγράφονται οι συναρτήσεις στο $(-\pi,\pi)$ ή στο $(0,2\pi)$ (Λείπουν οι τιμές τους στα σημεία ασυνέχειάς τους). Στην δεύτερη στήλη είναι οι αντίστοιχες σειρές Fourier.

Επαληθεύστε.

<u>Πρόταση</u> (Πράξεις με σειρές Fourier) Αν $S(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ και $S(g) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k' \cos kx + b_k' \sin kx)$ τότε

$$S(\lambda f + \mu g) = \frac{\lambda a_0 + \mu a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu a_k') \cos kx + (\lambda b_k + \mu b_k') \sin kx$$

όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Δηλαδή $S(\lambda f + \mu g) = \lambda S(f) + \mu S(g)$.

<u>Απόδειξη</u>. $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\lambda f(x) + \mu g(x)) \cos kx\,dx = \lambda \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\,dx + \mu \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x) \cos kx\,dx = \lambda a_k + \mu a_k'$.

Ομοίως για ημίτονα. <u>Ο.Ε.Δ.</u>

Πρόταση Έστω ότι η f είναι περιοδική συνεχής με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$. Αν $S(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ τότε $S(f') = \sum_{k=1}^{\infty}(kb_k \cos kx - ka_k \sin kx)$.

Δηλαδή $S(f') = S(f)'$.

Απόδειξη $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{ f(2\pi)\cos k2\pi - f(0)\cos k\cdot 0 + k\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \right\} = kb_k$, αφού $f(2\pi) = f(0)$.

Ομοίως για ημίτονα. Ο.Ε.Δ.

Έστω τώρα μιά συνάρτηση f περιοδική και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα της f: $F(x) = \int_0^x f$.

Η συνάρτηση $F(x) - \frac{a_0}{2}x$ είναι περιοδική, όπου $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$ είναι ο "μηδενικός" συντελεστής Fourier της $f(x)$. Πράγματι: $F(2\pi) - \frac{a_0}{2}2\pi = \int_0^{2\pi} f - \int_0^{2\pi} f = 0 = F(0) - \frac{a_0}{2}\cdot 0$.

Επιπλέον η $F(x) - \frac{a_0}{2}x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Η επόμενη πρόταση μας δίνει την σειρά Fourier της $F(x) - \frac{a_0}{2}x$.

Πρόταση Έστω ότι η f είναι συνεχής περιοδική. Έστω $F(x) = \int_0^x f$. Αν $S(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ τότε

$$F(x) - \frac{a_0}{2}x \sim c + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{b_k}{k}\cos kx + \frac{a_k}{k}\sin kx\right)$$

όπου c είναι κατάλληλη σταθερά.

Απόδειξη Η παράγωγος της $F(x) - \frac{a_0}{2}x$ είναι η $f(x) - \frac{a_0}{2}$. Αν υποθέσουμε ότι $F(x) - \frac{a_0}{2}x \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k' \cos kx + b_k' \sin kx)$ τότε, από την προηγούμενη πρόταση:

$$f(x) - \frac{a_0}{2} = \left(F(x) - \frac{a_0}{2}x\right)' \sim \sum_{k=1}^{\infty}(kb_k' \cos kx - ka_k' \sin kx)$$

Δηλαδή, για $k \geq 1$: $a_k = kb_k'$, $b_k = -ka_k'$.

Άρα, για $k \geq 1$: $a_k' = -\frac{b_k}{k}$, $b_k' = \frac{a_k}{k}$.

Η a_0' είναι σταθερά που πρέπει να υπολογισθεί ξεχωριστά:

$a_0' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(F(x) - \frac{a_0}{2}x\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)dx - \frac{\pi}{2}a_0$. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση Από τις συναρτήσεις που είδαμε αποδείξτε ότι οι μόνες που έχουν συνεχή παράγωγο είναι οι 5, 17 και υπολογίστε την σειρά Fourier των παραγώγων τους.

<u>Άσκηση</u> Βρείτε από τον πίνακα τις συνεχείς περιοδικές συναρτήσεις και εφαρμόστε σ' αυτές την τελευταία πρόταση.

Κατόπιν θα δούμε μερικά αποτελέσματα για την συμπεριφορά των συντελεστών Fourier μιας συνάρτησης.

<u>Πρόταση</u> (α) Έστω ότι η f είναι περιοδική με συνεχή παράγωγο τάξης $n \geq 1$. Τότε υπάρχει αριθμός M, εξαρτώμενος από την f, ώστε $|a_m|, |b_m| \leq M/m^n$, $m = 1, 2, 3, \dots$

(β) Έστω ότι η f είναι φθίνουσα (ή αύξουσα) και φραγμένη στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Τότε υπάρχει αριθμός M, εξαρτώμενος από την f, ώστε $|a_m|, |b_m| \leq \frac{M}{m}$, $m = 1, 2, 3, \dots$

<u>Απόδειξη</u> (α) Έστω ότι $n = 1$, δηλαδή η $f'(x)$ είναι συνεχής περιοδική συνάρτηση. Τότε

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx = \frac{1}{\pi m} \int_0^{2\pi} f(x) (\sin mx)' dx =$$
$$= -\frac{1}{\pi m} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin mx \, dx$$

Αφού η f' είναι συνεχής είναι και φραγμένη, δηλ. υπάρχει N ώστε $|f'(x)| \leq N$ $\forall x \in [0, 2\pi]$. Άρα

$$|a_m| \leq \frac{1}{\pi m} \int_0^{2\pi} |f'(x)| |\sin mx| \, dx \leq \frac{N \cdot 2\pi}{\pi m} = \frac{2N}{m}$$

Το ίδιο έχουμε για το b_m, και έτσι η πρόταση αποδείχτηκε για $n = 1$ με $M = 2N$.

Αν $n = 2$ τότε εφαρμόζουμε ξανά ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$a_m = -\frac{1}{\pi m} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin mx \, dx = \frac{1}{\pi m^2} \int_0^{2\pi} f'(x) (\cos mx)' dx$$
$$= -\frac{1}{\pi m^2} \int_0^{2\pi} f''(x) \cos mx \, dx$$

Αφού η f'' είναι συνεχής είναι και φραγμένη, άρα υπάρχει N ώστε $|f''(x)| \leq N$ $\forall x \in [0, 2\pi]$. Άρα

$$|a_m| \leq \frac{1}{\pi m^2} \int_0^{2\pi} |f''(x)| |\cos mx| \, dx \leq \frac{2\pi \cdot N}{\pi m^2} = \frac{2N}{m^2}.$$

Είναι λοιπόν προφανές πώς θα χειριστούμε τις περιπτώσεις $n = 3, 4, \dots$

(β) Αφού η f είναι φθίνουσα και φραγμένη, υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $c = \lim_{x\to 2\pi-} f(x)$. Επί πλέον $f(x) \geq c$, $0 \leq x \leq 2\pi$. Άρα η $f(x)-c$ είναι φθίνουσα και μη-αρνητική στο $[0, 2\pi)$. Εφαρμόζουμε το δεύτερο θεώρημα μέσης τιμής του απειροστικού λογισμού (σελ. 20):

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x)-c)\cos mx\,dx + c\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos mx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x)-c)\cos mx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}(f(0)-c)\int_0^{\xi}\cos mx\,dx, \quad 0 \leq \xi \leq 2\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}(f(0)-c)\frac{\sin m\xi}{m}$$

Άρα $|a_m| \leq \dfrac{f(0)-c}{\pi m}$.

Ομοίως για το b_m. Άρα η πρόταση αποδείχθηκε με $M = \dfrac{f(0)-c}{\pi}$.

Ο.Ε.Δ.

__Άσκηση__ Επαληθεύσατε το (β) της τελευταίας πρότασης στις συναρτήσεις 1, 3, 4, 6, 7, 18, 19, 20 του πίνακα. Επίσης το (α) στις συναρτήσεις 5, 17 του πίνακα.

__Άσκηση__ Έστω ότι $\ell \in \mathbb{N}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ell}(|a_n|+|b_n|) < \infty$. Αν $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$, αποδείξτε ότι η $f(x)$ είναι ℓ-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη.

__Άσκηση__ Αν $|a_n|, |b_n| \leq \frac{M}{n^k}$, $n \in \mathbb{N}$ όπου $k > 2$ και αν $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ αποδείξτε ότι η $f(x)$ είναι ℓ-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, όπου

$$\ell = \begin{cases} k-2, & k \in \mathbb{N} \\ [k]-1, & k \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

__Άσκηση__ Κοιτάξτε πάλι προσεκτικά την απόδειξη του (α) της τελευταίας πρότασης και αποδείξτε την εξής γενίκευση: Έστω ότι η f έχει συνεχείς παραγώγους τάξης n στο $[0, 2\pi]$ (δηλ. υπάρχουν οι δεξιές παράγωγοι στο 0 και οι αριστερές παράγωγοι στο 2π μέχρι και τάξη n: $f_+(0), f_+^{(1)}(0), \dots, f_+^{(n)}(0)$, $f_-(2\pi), f_-^{(1)}(2\pi), \dots, f_-^{(n)}(2\pi)$)

Επί πλέον έστω ότι για k περιττό $\leq n-1$ ισχύει ότι $f_+^{(k)}(0) = f_-^{(k)}(2\pi)$. Τότε $|\alpha_m| \leq \frac{M}{m^n}$ $m = 1, 2, 3, \ldots$
Αν δε και k άρτιο $\leq n-1$ ισχύει ότι
$f_+^{(k)}(0) = f_-^{(k)}(2\pi)$, τότε $|\beta_m| \leq \frac{M}{m^n}$ $m = 1, 2, 3, \ldots$
Τι γίνεται αν αντί για το $[0, 2\pi]$ έχουμε το διάστημα $[-\pi, \pi]$;
Επαληθεύσατε στις περιπτώσεις 1, 3, 5, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 20 του πίνακα.

<u>Άσκηση</u> Είναι δυνατόν μία συνάρτηση $f(x)$ να έχει δεύτερη παράγωγο συνεχή στο $\mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι η σειρά Fourier της f είναι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \cos nx$;

<u>Ορισμός</u> Ένα σύνολο συναρτήσεων $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ορισμένων στο $\mathbb{R}$, συνεχών και περιοδικών (με περίοδο 2π) ονομάζεται <u>ορθογώνιο</u> αν καμμία φ_n δεν είναι $\equiv 0$ και
$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(x)\, \varphi_m(x)\, dx = 0 \quad \text{για } n \neq m.$$
Παράδειγμα: το σύνολο συναρτήσεων $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos kx, \sin kx, \ldots\}$ αποτελεί ορθογώνιο σύνολο.
Ονομάζεται <u>τριγωνομετρικό σύστημα</u> συναρτήσεων.

<u>Ορισμός</u> Ένα ορθογώνιο σύνολο συναρτήσεων $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ονομάζεται <u>πλήρες</u> αν ισχύει το εξής:
f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και περιοδική με περίοδο 2π και
$$\int_0^{2\pi} f(x)\, \varphi_n(x)\, dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies f \equiv 0.$$
Δηλ. το $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ είναι πλήρες αν είναι αδύνατον να προστεθεί μία ακόμη συνάρτηση $f(x)$ και το καινούργιο σύνολο να είναι επίσης ορθογώνιο.

<u>Θεώρημα</u> Έστω συναρτήσεις f, g στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 2π. Αν $S(f) = S(g)$ τότε οι f, g ταυτίζονται σε κάθε διάστημα στο οποίο είναι και οι δύο συνεχείς.

<u>Πόρισμα</u> Το τριγωνομετρικό σύστημα είναι πλήρες.

<u>Απόδειξη του πορίσματος</u> Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 2π.

Έστω $\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx = 0$, $k = 0,1,2,3,\dots$

Τότε $S(f) = 0$. Θεωρούμε και την τετριμμένη μηδενική συνάρτηση 0.

Προφανώς $S(0) = 0$. Άρα $S(f) = S(0)$. Από το θεώρημα, και αφού οι $f, 0$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, $f \equiv 0$. <u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Απόδειξη του θεωρήματος</u> Έστω $I = (\alpha, \beta)$ διάστημα στο οποίο οι f, g είναι συνεχείς. Θεωρούμε την $\varphi = f - g$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\varphi \equiv 0$ στο I γνωρίζοντας ότι $S(\varphi) = S(f) - S(g) = 0$.

$S(\varphi) = 0$ σημαίνει ότι $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x)\sin kx\,dx = 0$ για κάθε $k = 0,1,2,3,\dots$.

Έστω οποιοδήποτε τριγωνομ. πολυώνυμο

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

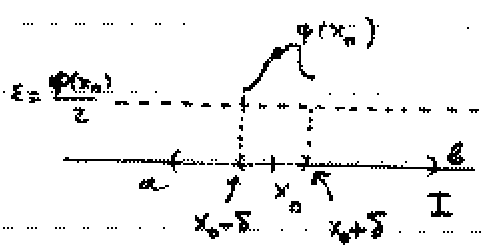
Τότε

$$\int_0^{2\pi}\varphi(x)P(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\varphi(x)\,dx + \sum_{k=1}^{N}\left(a_k\int_0^{2\pi}\varphi(x)\cos kx\,dx + b_k\int_0^{2\pi}\varphi(x)\sin kx\,dx\right) = 0.$$

Άρα $S(\varphi) = 0$ συνεπάγεται ότι $\int_0^{2\pi}\varphi(x)P(x)\,dx = 0$ για κάθε τριγ. πολυώνυμο $P(x)$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\varphi \not\equiv 0$ στο I. Θα φτάσουμε σε άτοπο κατασκευάζοντας κάποιο τριγ. πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο θα ισχύει $\int_0^{2\pi}\varphi(x)P(x)\,dx \neq 0$.

Αφού $\varphi \not\equiv 0$ στο I υπάρχει σημείο x_0 του $I = (\alpha,\beta)$ ώστε $\varphi(x_0) \neq 0$.

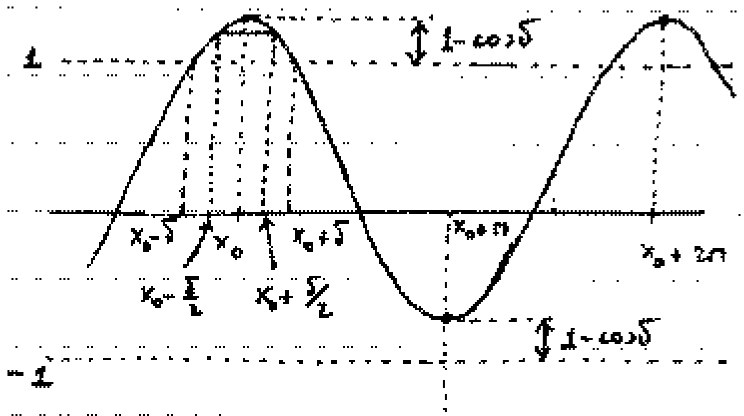


Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\varphi(x_0) > 0$. Λόγω συνέχειας της φ, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \implies \varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(x) < \varphi(x_0) + \varepsilon \quad \text{με } \varepsilon = \frac{\varphi(x_0)}{2} > 0.$$

$$\implies \varphi(x) > \frac{\varphi(x_0)}{2}$$

Χρησιμοποιούμε τώρα το εξής τέχνασμα του Lebesgue. Θεωρούμε την συνάρτηση $Q(x) = \cos(x-x_0) + 1 - \cos\delta$. Το γράφημά της φαίνεται στο σχήμα.



Ειδικότερα:

(i) $|Q(x)| \le 1$ έξω από το διάστημα $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ (και τις περιοδικές επαναλήψεις του)

(ii) $Q(x) > 1$ μέσα στο διάστημα $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ (και τις περιοδικές επαναλήψεις του)

(iii) $Q(x) > \cos(\frac{\delta}{2}) + 1 - \cos\delta = \rho > 1$ μέσα στο διάστημα $(x_0-\frac{\delta}{2}, x_0+\frac{\delta}{2})$ (και τις περιοδικές επαναλήψεις του).

Το $Q(x) = 1-\cos\delta + \cos x_0 \cdot \cos x + \sin x_0 \cdot \sin x$ είναι τριγωνομ. πολυώνυμο. Άρα κάθε δύναμή του $(Q(x))^n$ είναι επίσης τριγωνομ. πολυώνυμο (γιατί;)

Έστω τώρα $P(x) = (Q(x))^n$. Τότε

$$\int_0^{2\pi} \phi(x)P(x)\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\phi(x)P(x)\,dx + \int_{x_0+\delta}^{x_0-\delta+2\pi}\phi(x)P(x)\,dx = A+B.$$

Τότε: $|B| \le \int_{x_0+\delta}^{x_0-\delta+2\pi}|\phi(x)|\,|Q(x)|^n\,dx \le \int_{x_0+\delta}^{x_0-\delta+2\pi}|\phi(x)|\,dx$, λόγω της (i).

Άρα $|B| \le \int_0^{2\pi}|\phi(x)|\,dx$.

Ακόμη: $A \ge \int_{x_0-\delta/2}^{x_0+\delta/2}\phi(x)P(x)\,dx$, αφού $\phi, P \ge 0$ στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

$A \ge \int_{x_0-\delta/2}^{x_0+\delta/2}\frac{\phi(x_0)}{2}\cdot\rho^n\,dx$, λόγω της (iii).

$A \ge \delta\cdot\frac{\phi(x_0)}{2}\cdot\rho^n$.

Άρα $\int_0^{2\pi}\phi(x)P(x)\,dx = A+B \ge A-|B| \ge \delta\cdot\frac{\phi(x_0)}{2}\cdot\rho^n - \int_0^{2\pi}|\phi(x)|\,dx$.

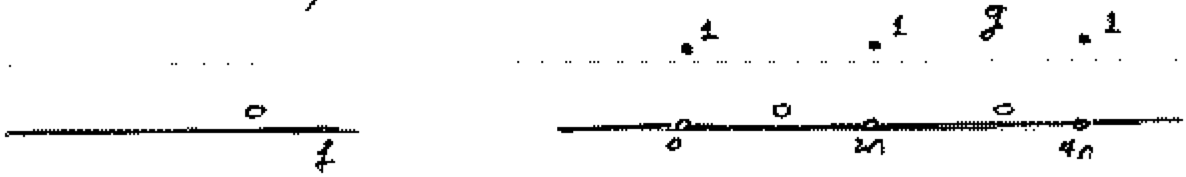
Επειδή $\rho^n \to \infty$ καθώς $n\to\infty$ $(\rho>1)$, αρκεί να πάρουμε η αρνητική μερίδα ώστε το $P(x) = (Q(x))^n$ να δώσει

$$\int_0^{2\pi} \phi(x)\, P(x)\, dx > 0 .$$

Ο.Ε.Δ.

Γενικά δεν ισχύει η συνεπαγωγή $S(f) = S(g) \Rightarrow f \equiv g$.
Για παράδειγμα αν $f \equiv 0$ στο $\mathbb{R}$ και

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 2\pi \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$



τότε $S(f) = 0 = S(g)$. Αλλά $f \not\equiv g$. Οι f, g διαφέρουν μόνο σε ένα σημείο, το 0 (και τις περιοδικές επαναλήψεις του: $k \cdot 2\pi$), και ταυτίζονται στα κοινά διαστήματα συνέχειας τους $(0, 2\pi)$, $(2\pi, 4\pi)$, ... κλπ. χωρίς να έρχονται σε αντίθεση με το θεώρημα.

Και, βέβαια, αν έχουμε οποιαδήποτε f και αλλάζουμε τις τιμές της σε *πεπερασμένου* πλήθους σημεία τότε παίρνουμε διαφορετική συνάρτηση με *ίδια* σειρά Fourier. Αφού οι τιμές της f σε πεπερασμένου πλήθους σημεία δεν επηρεάζουν τον υπολογισμό των συντελεστών Fourier a_n, b_n της f.

Άρα στο *ερώτημα 3* της σελίδας 36 η απάντηση είναι *ναι*. Είναι δυνατόν δύο διαφορετικές συναρτήσεις f, g να έχουν την ίδια σειρά Fourier. Αλλά το θεώρημα δείχνει ότι οι f, g δεν μπορεί να είναι "πολύ" διαφορετικές: όπου είναι συνεχείς και οι δύο, ταυτίζονται.

Η πιο ικανοποιητική απάντηση δίδεται μόνο στο πλαίσιο της θεωρίας του *μέτρου Lebesgue*: Αν $S(f) = S(g)$ τότε οι f, g ταυτίζονται *σχεδόν παντού* στο $\mathbb{R}$.

Από το θεώρημα έχουμε σαν πόρισμα την εξής χρήσιμη ισοδυναμία.

<u>Πόρισμα</u> $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, όπου η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ $\iff$

$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, όπου η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ (σε κάποια συνάρτηση) και f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη.</u> "$\Longrightarrow$". Αυτό είναι το παράδειγμα 2 της σελ. 37: αν η $f(x)$ είναι όριο μιάς ομοιόμορφα συγκλίνουσας τριγωνομ. σειράς τότε η σειρά Fourier της f είναι η ίδια τριγ. σειρά και (προφανώς, λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης) η f είναι συνεχής.

"$\Longleftarrow$". Έστω $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ και έστω ότι η τριγ. σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ σε συνάρτηση $g(x)$: $g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$.

Το παράδειγμα 2 της σελ. 37 λέει τότε ότι

$$S(g) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = S(f).$$

Αφού f, g είναι και οι δύο συνεχείς στο $\mathbb{R}$, το θεώρημα δίνει ότι $f \equiv g$. Άρα $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

<u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Παρατήρηση</u> Είναι πολύ σημαντικό να έχουμε ξεκαθαρίσει την διαφορά ανάμεσα στις σχέσεις:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Ο πρώτος τύπος λέει ότι η τριγ. σειρά δεξιά είναι η σειρά Fourier της f. Δηλαδή μόνο ότι η σχέση ανάμεσα στα a_k, b_k και την f είναι:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\, dx$$

Δεν υπονοείται τίποτε γιά την σύγκλιση της σειράς. Απλώς, έχοντας την $f(x)$, υπολογίζουμε τα a_k, b_k και γράφουμε τυπικά την σειρά.

Ο δεύτερος τύπος λέει ότι γιά το συγκεκριμένο x η τριγωνομ. σειρά δεξιά συγκλίνει και μάλιστα το όριό της είναι η τιμή της f στο x. Ο δεύτερος τύπος έρχεται συνήθως μαζί με το σύνολο των x γιά τα οποία ισχύει η σύγκλιση.
Επιπλέον ο δεύτερος τύπος δεν σημαίνει ότι η τριγ. σειρά είναι η σειρά Fourier της $f(x)$.

Παράδειγμα γιά το πρόσημο. Θυμηθείτε τον τύπο

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\cos kx = f(x)$$

όπου $f(x)$ είναι η συνάρτηση $\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}$ στο $[0, 2\pi]$ επεκτεταμένη περιοδικά στο $\mathbb{R}$.

Ξεκινήσαμε από την τριγ. σειρά και αποδείξαμε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)$. Άρα η σειρά Fourier της f είναι η ίδια σειρά.

Αντιστρόφως, μπορούμε να ξεκινήσουμε από την $f(x)$ (η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$), να υπολογίσουμε εύκολα την σειρά Fourier της: $S(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\cos kx$
και επειδή η $S(f)$ (λόγω κριτηρίου Weierstrass) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\cos kx = f(x) \quad \text{στο } \mathbb{R}.$$

<u>Άσκηση</u> Έστω f συνεχής και περιοδική με περίοδο 2π. Γνωρίζουμε ότι η σειρά Fourier της f είναι η $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^3+5n} + \frac{\sin nx}{n^{3/2}}\right)$.
Αποδείξτε ότι $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^3+5n} + \frac{\sin nx}{n^{3/2}}\right)$ γιά κάθε x.

<u>Άσκηση</u> Είναι δυνατόν η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\sin kx$ να είναι σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης η οποία είναι συνεχής σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$ και περιοδική με περίοδο 2π;

ΚΕΦ. IV   ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ RIEMANN – LEBESGUE

Ίσως το πιο βασικό στην θεωρία που εξετάζουμε είναι το
<u>Θεώρημα Riemann – Lebesgue</u> : Έστω συνάρτηση f περιοδική με περίοδο 2π και ολοκληρώσιμη στο $[0,2\pi)$. Τότε, καθώς $\lambda \to \pm\infty$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos\lambda x\,dx \longrightarrow 0 \ , \qquad \int_0^{2\pi} f(x)\sin\lambda x\,dx \longrightarrow 0 .$$

Ας πάρουμε κατ' αρχήν μια ειδική περίπτωση : $f(x)$ είναι κλιμακωτή συνάρτηση, δηλαδή υπάρχουν $0=x_0<x_1<\dots<x_k<x_{k+1}<\dots<x_n=2\pi$ και $f(x)\equiv c_k$ στο (x_k,x_{k+1}). (Οι τιμές της f στα x_k δεν ενδιαφέρουν διότι δεν επηρεάζουν τα ολοκληρώματα). Τότε

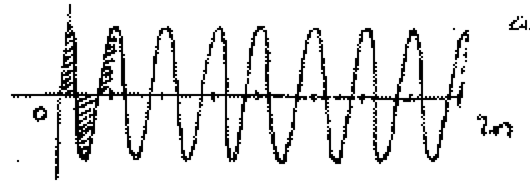
$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\cos\lambda x\,dx\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_{x_k}^{x_{k+1}}\cos\lambda x\,dx\right| =$$
$$= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{c_k}{\lambda}\left\{\sin(\lambda x_{k+1})-\sin(\lambda x_k)\right\}\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\frac{|c_k|}{|\lambda|}\cdot 2$$
$$= \frac{2}{|\lambda|}\sum_{k=0}^{n-1}|c_k| \longrightarrow 0 \ , \quad \lambda\to\pm\infty .$$

Άρα $\int_0^{2\pi} f(x)\cos\lambda x\,dx \longrightarrow 0$ αν $\lambda \to \pm\infty$. Και ομοίως εξετάζουμε την περίπτωση του ημιτόνου.

Με έναν απλό υπολογισμό, λοιπόν, ξεμπερδέψαμε με την περίπτωση μιας κλιμακωτής συνάρτησης. Ποιά όμως είναι η βαθύτερη αιτία που δημιουργεί αυτό το φαινόμενο;

Αν μας ρωτήσει κανείς γιατί $\int_0^{2\pi}\cos mx\,dx = 0$; μπορούμε να πούμε $\int_0^{2\pi}\cos mx\,dx = \frac{1}{m}\int_0^{2\pi}(\sin mx)'\,dx = \frac{1}{m}\left[\sin(m2\pi)-\sin(m0)\right] = 0$.

Μπορούμε όμως να δώσουμε και δεύτερη απάντηση : Η συνάρτηση $\cos mx$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi/m$. Και σε κάθε περίοδο το εμβαδό ανάμεσα στον οριζόντιο άξονα και στο γράφημά της είναι λόγω συμμετρίας μηδέν. Άρα το συνολικό εμβαδόν είναι μηδέν.



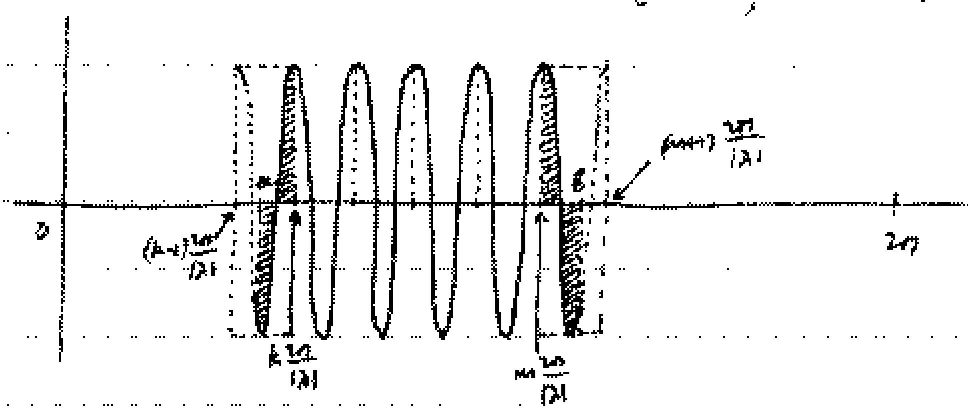
cos mx

Η δεύτερη απάντηση είναι καλύτερη από την άποψη ότι δίνει εποπτική κατανόηση της ισότητας $\int_0^{2\pi}\cos mx\,dx = 0$.

Στην περίπτωση που εξετάζουμε θα δώσουμε μιά τέτοια δεύτερη απόδειξη στο γιατί $\int_0^{2\pi} f(x)\cos\lambda x \xrightarrow[\lambda\to\pm\infty]{} 0$ για κλιμακωτή f.

Για απλούστευση ας θεωρήσουμε την $f(x)=\begin{cases}1, & a<x<b\\ 0, & 0\le x\le a,\ b<x\le 2\pi.\end{cases}$

Η $\cos\lambda x$ έχει περίοδο $2\pi/|\lambda|$. Αρχίζοντας από το 0 παίρνουμε διαδοχικά διαστήματα μήκους $2\pi/|\lambda|$. Αν το $|\lambda|$ είναι μεγάλο τότε τα a, b θα πέσουν μέσα σε δύο διαφορετικά τέτοια διαστήματα. Έχουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν ανάμεσα στον άξονα x και το γράφημα της $f(x)\cos\lambda x = \begin{cases}\cos\lambda x, & a<x<b\\ 0, & 0\le x\le a,\ b<x\le 2\pi.\end{cases}$



Το εμβαδό σε μία περίοδο που βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο (a, b) είναι μηδέν. Μένουν έτσι δύο εμβαδά (τα γραμμοσκιασμένα στο σχήμα): από το a μέχρι το αμέσως επόμενο πολλαπλάσιο του $\frac{2\pi}{|\lambda|}$ και από το b μέχρι το αμέσως προηγούμενο πολλαπλάσιο του $\frac{2\pi}{|\lambda|}$. Αυτά όμως βρίσκονται μέσα σε δύο ορθογώνια με βάση $\frac{2\pi}{|\lambda|}$ και ύψος 2 το καθένα.
Άρα είναι μικρότερα από $\frac{4\pi}{|\lambda|}$ το καθένα.
Άρα $\left|\int_0^{2\pi} f(x)\cos\lambda x\,dx\right| \le \frac{8\pi}{|\lambda|} \to 0$ καθώς $\lambda\to\pm\infty$.

Τώρα είναι εύκολο να περάσουμε σε γενικότερες κλιμακωτές συναρτήσεις $f(x)\equiv c_k$ στο (x_k, x_{k+1}), όπου $0=x_0<x_1<\dots<x_n=2\pi$.
Διότι μόλις δείξαμε για $a=x_k$, $b=x_{k+1}$ ότι

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\cos\lambda x\,dx \longrightarrow 0.$$

Άρα αθροίζοντας πεπερασμένους όρους

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos\lambda x\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\int_{x_k}^{x_{k+1}}\cos\lambda x\,dx \longrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} c_k\cdot 0 = 0.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει με δύο τρόπους το

<u>Λήμμα</u>. Αν f είναι κλιμακωτή συνάρτηση στο $[0,2\pi]$ τότε

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos\lambda x \longrightarrow 0, \quad \int_0^{2\pi} f(x)\sin\lambda x\, dx \longrightarrow 0 \qquad \text{γιά } \lambda \to \pm\infty .$$

<u>Πρώτη απόδειξη</u> του Θ. Riemann-Lebesgue. Έστω f ολοκληρώσιμη και $\varepsilon>0$. Βρίσκουμε κλιμακωτή συνάρτηση g ώστε

$$\int_0^{2\pi}|f(x)-g(x)|\,dx < \varepsilon/2 .$$

Βάσει του λήμματος υπάρχει λ_0 τέτοιο ώστε

$$|\lambda|>\lambda_0 \Rightarrow \left|\int_0^{2\pi} g(x)\cos\lambda x\, dx\right| < \varepsilon/2 .$$

Άρα, αν $|\lambda|>\lambda_0$, $\left|\int_0^{2\pi} f(x)\cos\lambda x\, dx\right| =$

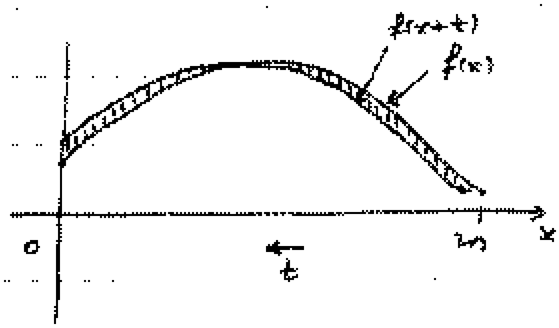
$$= \left|\int_0^{2\pi}(f(x)-g(x))\cos\lambda x\, dx + \int_0^{2\pi} g(x)\cos\lambda x\, dx\right| \le$$

$$\le \int_0^{2\pi}|f(x)-g(x)|\,dx + \left|\int_0^{2\pi} g(x)\cos\lambda x\, dx\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

Δηλ. $\int_0^{2\pi} f(x)\cos\lambda x\, dx \longrightarrow 0$ γιά $\lambda \to \pm\infty$. <u>Ο.Ε.Δ.</u>

Το ακόλουθο είναι αρκετά βασικό

<u>Λήμμα</u> Αν f ολοκληρώσιμη στο $[0,2\pi]$ τότε $\int_0^{2\pi}|f(x)-f(x+t)|\,dt \to 0$ καθώς $t\to 0$.



<u>Απόδειξη</u> (α) Έστω ότι η f είναι συνεχής. Από ομοιόμορφη συνέχεια, γιά $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon/2\pi$$

Άρα, αν $|t|<\delta$ έχουμε

$$|x-(x+t)| = |t| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x+t)| < \varepsilon/2\pi \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi}|f(x)-f(x+t)|\,dx < 2\pi\cdot\frac{\varepsilon}{2\pi} = \varepsilon .$$

Άρα, γιά f συνεχή στο $[0,2\pi]$, αποδείξαμε το ζητούμενο.

(β) Έστω ότι f ολοκληρώσιμη. Τότε γιά $\varepsilon>0$ υπάρχει g συνεχής ώστε $\int_0^{2\pi}|f(x)-g(x)|\,dx < \varepsilon/3$.

Λόγω του (α) υπάρχει $\delta>0$ ώστε

$$|t|<\delta \Rightarrow \int_0^{2\pi} |g(x)-g(x+t)|\,dx < \varepsilon/3 .$$

Άρα, για $|t|<\delta$

$$\int_0^{2\pi}|f(x)-f(x+t)|\,dx \le \int_0^{2\pi}|f(x)-g(x)|\,dx + \int_0^{2\pi}|g(x)-g(x+t)|\,dx + \int_0^{2\pi}|g(x+t)-f(x+t)|\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi}|f(x)-g(x)|\,dx + \int_0^{2\pi}|g(x)-g(x+t)|\,dx + \int_0^{2\pi}|g(x)-f(x)|\,dx$$

(Λόγω περιοδικότητας της $g-f$)

$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

<u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Δεύτερη απόδειξη</u> του Θ. Riemann-Lebesgue: Με απλή αλλαγή μεταβλητής παίρνουμε

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin\lambda x\,dx = \int_{-\pi/\lambda}^{2\pi-\pi/\lambda} f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\sin\lambda\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)dx = -\int_{-\pi/\lambda}^{2\pi-\pi/\lambda} f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\sin\lambda x\,dx$$

$$= -\int_0^{2\pi} f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\sin\lambda x\,dx \qquad \text{(λόγω περιοδικότητας)}$$

Άρα

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin\lambda x\,dx\right| = \left|\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(x)\sin\lambda x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\sin\lambda x\,dx\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi}\left\{f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right\}\sin\lambda x\,dx\right| \le \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left|f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right|dx$$

Αν τώρα $\lambda \to \pm\infty$ τότε $\frac{\pi}{\lambda} \to 0$ και από το προηγούμενο λήμμα έχουμε το ζητούμενο. <u>Ο.Ε.Δ.</u>

Προσέξτε πόσο συστηματική χρήση κάναμε (δύο φορές) της πρότασης στη σελίδα 12. Γενικά, αν θέλουμε να αποδείξουμε μιαν ιδιότητα ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι χρήσιμο να την αποδείξουμε για κλιμακωτές ή συνεχείς συναρτήσεις πρώτα και κατόπιν να περάσουμε στις ολοκληρώσιμες αρκεί να υπάρχει "κάτι" που να συνδέει αυτές τις δύο κατηγορίες συναρτήσεων. Στην περίπτωση των ολοκληρωσίμων αυτό το "κάτι" είναι πολλές φορές η πρόταση της σελ. 12.

Τώρα μπορούμε να δώσουμε απάντηση στο ερώτημα 1 της σελ. 35.

Είναι κάθε τριγ. σειρά σειρά Fourier; Όχι. Διότι αν

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

τότε $a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx \longrightarrow 0$, $k \to +\infty$

και $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \longrightarrow 0$, $k \to +\infty$

από το Θεώρημα Riemann-Lebesgue.

Άρα η τριγωνομ. σειρά

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\cos nx + \frac{n}{n+1}\sin nx\right)$$

δεν είναι σειρά Fourier καμμιάς συνάρτησης, αφού $\frac{n}{n+1} = b_n \not\longrightarrow 0$.

<u>Άσκηση</u> Αποδείξτε το πρώτο λήμμα της σελ 54 για συνεχή συνάρτηση (αντί για ολοκληρώσιμη) με παρόμοιο γεωμετρικό τρόπο.

Επίσης αποδείξτε το δεύτερο λήμμα της σελ 54 για ολοκληρώσιμη συνάρτηση (αντί για συνεχή).

<u>Άσκηση</u> Έστω g, f ολοκληρώσιμες στο $[0, 2\pi)$, 2π-περιοδικές και η g είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,g(nt)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\,dt$$

Ειδική περίπτωση αυτού του αποτελέσματος είναι το Θεωρ. Riemann-Lebesgue!

ΚΕΦ. V ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΩΝ FOURIER

Έχουμε ορίσει την σειρά Fourier μιάς συνάρτησης χωρίς, μέχρι στιγμής, να μας απασχολήσει ιδιαίτερα αν αυτή συγκλίνει και ποιό είναι το όριό της. Τό μόνο που γνωρίζουμε προς αυτήν την κατεύθυνση είναι ότι, αν $P(x)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, τότε $S(P)(x) \equiv P(x)$ και ότι, αν η σειρά Fourier μιας συνεχούς περιοδικής συνάρτησης f συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ τότε το όριό της είναι $f(x)$ γιά κάθε x. Θυμηθείτε το θεώρημα 6 (σελ 35) και τά παραδείγματα 1 (σελ 36) και 2 (σελ 37) καθώς και το πόρισμα (σελ 50) με την παρατήρηση και το παράδειγμα που το ακολουθούν.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε πιό συστηματικά με αυτό το ζήτημα. Δηλαδή, δεδομένης συνάρτησης f περιοδικής και σημείου x, θα δούμε κάτω από ποιές συνθήκες η $S(f)(x)$ συγκλίνει σε κάποιο όριο και πότε αυτό το όριο είναι το $f(x)$.

Έστω λοιπόν $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$ γιά $n=0,1,2,\dots$, και

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

η σειρά Fourier της f.

Αν $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ τότε

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\left(\cos kx\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt + \sin kx\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kx\cos kt + \sin kx\sin kt)\right\}dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right\}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-t)}{2\sin\frac{x-t}{2}}\,dt$$

και με αλλαγή $x-t \to t$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-x}^{2\pi-x} f(x+t)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

Άρα

$$(1)\qquad S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

Από την εξίσωση (1) με αλλαγή μεταβλητής $t \to -t$ έχουμε

(2) $$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

Προσθέτουμε τις σχέσεις (1) και (2) και παίρνουμε

(3) $$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

Τώρα ας θυμηθούμε την ταυτότητα

$$\frac{1}{2}+\cos t+\dots+\cos nt = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

Αν ολοκληρώσουμε στο $(-\pi,\pi)$ έχουμε

(4) $$\pi = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

Άρα για $A\in\mathbb{R}$:

(5) $$A = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

Αφαιρώντας τις (3) και (5) παίρνουμε

(6) $$S_n(x)-A = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-A\right\}\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

Τώρα παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μέσα στο τελευταίο ολοκλήρωμα είναι άρτια συνάρτηση του t. Άρα

(7) $$S_n(x)-A = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left\{\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-A\right\}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

<u>Θεώρημα Dini</u>. Έστω f περιοδική με περίοδο 2π και ολοκληρώσιμη στο $[0,2\pi)$. Αν ο αριθμός A είναι τέτοιος ώστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{0}^{\pi}\frac{\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-A\right|}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

συγκλίνει, τότε η σειρά Fourier της f στο σημείο x συγκλίνει και έχει όριο A. Δηλαδή $S_n(x)\longrightarrow A$, $n\to\infty$ ή, ισοδύναμα,

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) = A$$

<u>Απόδειξη</u>. Ονομάζουμε $g(t)$ το πηλίκο $\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\Big/ 2\sin\frac{t}{2}$ για $0<t\le\pi$. Η υπόθεση είναι ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,\pi]$. Από το θεώρημα Riemann-Lebesgue

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} g(t)\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt \longrightarrow 0 \quad,\quad n\to\infty.$$

δηλαδή, λόγω της σχέσης (7), $S_n(x) \to A$ <u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Παρατήρηση 1.</u> Έστω δ με $0<\delta<\pi$. Τότε η συνθήκη

"το $\int_0^\pi \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - A\right| / 2\sin\frac{t}{2}\, dt$ συγκλίνει" είναι

ισοδύναμη με την συνθήκη "το $\int_0^\delta \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - A\right| / 2\sin\frac{t}{2}\, dt$

συγκλίνει".

Αυτό ισχύει διότι μπορούμε να μεταβούμε από το ένα ολοκλήρωμα στο άλλο με αφαίρεση ή πρόσθεση (αντίστοιχα) του ολοκληρώματος

$$\int_\delta^\pi \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - A\right| \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt .$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει διότι στο διάστημα $[\delta,\pi]$

$2\sin\frac{t}{2} \ge 2\sin\frac{\delta}{2}$ και έτσι το ολοκλήρωμα είναι

$$\le \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}} \int_\delta^\pi \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - A\right| dt < +\infty .$$

<u>Παρατήρηση 2.</u> Η συνθήκη "το $\int_0^\delta \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - A\right| / 2\sin\frac{t}{2}\, dt$

συγκλίνει" είναι ισοδύναμη με την συνθήκη

"το $\int_0^\delta \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - A\right| / t\, dt$ συγκλίνει"

Διότι, χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$\frac{1}{\pi} t \le \sin\frac{t}{2} \le t/2 \qquad \text{για} \quad 0 < t \le \pi ,$$

παίρνουμε

$$\int_0^\delta \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - A\right| / t\, dt \le \int_0^\delta \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - A\right| / 2\sin\frac{t}{2}\, dt \le \frac{\pi}{2} \int_0^\delta \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - A\right| / t\, dt$$

και έτσι τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα.

Μετά λοιπόν από τις δύο αυτές παρατηρήσεις η συνθήκη του θεωρήματος Dini μπορεί να αντικατασταθεί από την:

<u>Συνθήκη Dini</u>: ο αριθμός A είναι τέτοιος ώστε, για κάποιο δ με $0<\delta\le\pi$, το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\delta \frac{\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - A\right|}{t}\, dt$$

συγκλίνει".

Το θεώρημα Dini είναι αρκετά γενικό. Στην επόμενη πρόταση θα περιγράψουμε, σαν εφαρμογή του θεωρ. Dini, καταστάσεις οι οποίες εμφανίζονται συχνότατα στην πράξη. Κυρίως εμφανίζεται η περίπτωση όπου η f έχει, στο σημείο x, αριστερό και δεξιό όριο: $f(x-)$, $f(x+)$.

$$f(x-) = \lim_{t\to 0+} f(x-t) \quad , \quad f(x+) = \lim_{t\to 0+} f(x+t).$$

<u>Πρόταση</u> Έστω f περιοδική με περίοδο 2π και ολοκληρώσιμη στο $[0,2\pi)$. Έστω ότι στο σημείο x η f έχει πλευρικά όρια $f(x+)$, $f(x-)$ τα οποία είναι πραγματικοί αριθμοί.

(α) Αν υπάρχει δ με $0<\delta\le\pi$ και συνάρτηση $\varepsilon(t)\ge 0$ ορισμένη στο $(0,\delta]$ με την ιδιότητα: το $\int_0^\delta \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt$ συγκλίνει και αν $|f(x+t)-f(x+)|$, $|f(x-t)-f(x-)| \le \varepsilon(t)$, $0<t\le\delta$, τότε η σειρά Fourier της f στο x συγκλίνει στον αριθμό $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

(β) Αν για κάποιο $\alpha>0$ ισχύει ότι
$$|f(x+t)-f(x+)|,\ |f(x-t)-f(x-)| \le M t^{\alpha}, \quad 0<t\le\delta$$
τότε η σειρά Fourier της f στο x συγκλίνει στον $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

(γ) Αν η f έχει πλευρικές παραγώγους στο x, δηλαδή τα όρια
$$f'(x+) = \lim_{t\to 0+} \frac{f(x+t)-f(x+)}{t}, \quad f'(x-) = \lim_{t\to 0+} \frac{f(x-t)-f(x-)}{-t}$$
είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε η σειρά Fourier της f στο x συγκλίνει στον αριθμό $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

<u>Απόδειξη</u> (α) Με τριγωνική ανισότητα έχουμε
$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \frac{f(x+)+f(x-)}{2}\right| \le \frac{1}{2}|f(x+t)-f(x+)| +$$
$$+\frac{1}{2}|f(x-t)-f(x-)| \le \frac{1}{2}\varepsilon(t)+\frac{1}{2}\varepsilon(t) = \varepsilon(t)$$
για $0<t\le\delta$.

Άρα, αν $A = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$, τότε
$$\int_0^\delta \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - A\right| \cdot \frac{1}{t}\,dt \le \int_0^\delta \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt < +\infty$$

Επομένως η συνθήκη Dini ικανοποιείται και έτσι

$$S_n(x) \longrightarrow A = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}, \quad n\to\infty$$

(β) Άμεση συνέπεια του (α), διότι για $\varepsilon(t) = Mt^{\alpha}$, $\alpha>0$

$$\int_0^{\delta} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt = M\int_0^{\delta} \frac{1}{t^{1-\alpha}}\,dt \quad \text{συγκλίνει.}$$

(γ) Αφού το όριο $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{f(x+t)-f(x+)}{t}$ είναι πραγματικός αριθμός, το πηλίκο $\dfrac{f(x+t)-f(x+)}{t}$ θα είναι φραγμένο για αρκετά μικρό t.

Δηλ. υπάρχει δ_1 με $0<\delta_1\le\pi$ και $M_1>0$ ώστε:

$$\left|\frac{f(x+t)-f(x+)}{t}\right| \le M_1 \quad \text{για} \quad 0<t\le\delta_1 .$$

Ομοίως, υπάρχει δ_2 με $0<\delta_2\le\pi$ και $M_2>0$ ώστε:

$$\left|\frac{f(x-t)-f(x-)}{-t}\right| \le M_2 \quad \text{για} \quad 0<t\le\delta_2$$

Αν $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ και $M=\max(M_1,M_2)$ τότε

$$|f(x+t)-f(x+)|,\ |f(x-t)-f(x-)| \le Mt \quad \text{για} \quad 0<t\le\delta .$$

Άρα το αποτέλεσμα είναι άμεσο πόρισμα του (β) με $\alpha=1$.

<u>Ο.Ε.Δ.</u>

Το μέρος (γ) είναι το πιο χρήσιμο αφού συνήθως οι συναρτήσεις είναι κατά τμήματα ομαλές.

<u>Ορισμός</u>. Μια συνάρτηση f περιοδική με περίοδο 2π ονομάζεται <u>κατά τμήματα ομαλή</u> αν υπάρχουν πεπερασμένα σημεία $x_0=0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=2\pi$ έτσι ώστε η f σε κάθε διάστημα (x_k, x_{k+1}) να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη και σε κάθε x_k να έχει πλευρικά όρια και πλευρικές παραγώγους: $f(x_k+)$, $f(x_k-)$, $f'(x_k+)$, $f'(x_k-)$.

<u>Παρατήρηση</u>. Λόγω περιοδικότητας: $f(0+)=f(2\pi+)$, $f(0-)=f(2\pi-)$, $f'(0+)=f'(2\pi+)$, $f'(0-)=f'(2\pi-)$.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν μια f η οποία είναι κατά τμήματα ομαλή. Αν το x δεν είναι κανένα από τα x_k τότε η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο x. Δηλαδή

$$f(x+)=f(x-)=f(x) \quad \text{και} \quad f'(x+)=f'(x-)=f'(x).$$

Από το (γ) της πρότασης : $S(f)(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2} = f(x)$.

Αν το x είναι κάποιο από τα x_k, $x = x_k$, τότε πάλι το (γ) της πρότασης δίνει ότι : $S(f)(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$

Άρα έχουμε το

Πόρισμα Αν η f είναι κατά τμήματα ομαλή και περιοδική με περίοδο 2π τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

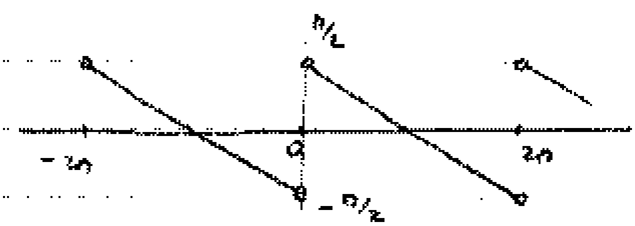
$$S(f)(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$$

όπου, αν το x είναι σημείο συνέχειας της f, τότε $S(f)(x) = f(x)$.

Παραδείγματα

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $0 < x < 2\pi$, περιοδικά επεκτεταμένη έξω από το $(0, 2\pi)$. Στο 0 και στο 2π δεν ορίζονται οι τιμές της f.

Στο $(0, 2\pi)$ η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.



Στο 0 έχει πλευρικά όρια και πλευρικές παραγώγους : $f(0+) = \frac{\pi}{2}$, $f(0-) = -\frac{\pi}{2}$

$f'(0+) = f'(0-) = -\frac{1}{2}$.

Λόγω περιοδικότητας $f(2\pi+) = \frac{\pi}{2}$, $f(2\pi-) = -\frac{\pi}{2}$, $f'(2\pi+) = f'(2\pi-) = -\frac{1}{2}$.

Άρα η f είναι κατά τμήματα ομαλή και σύμφωνα με το πόρισμα

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = S(f)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx$$

Αν $0 < x < 2\pi$ τότε $\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = f(x) = \frac{\pi - x}{2}$,

ενώ αν $x = 0$ τότε $\frac{f(0+)+f(0-)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} + (-\frac{\pi}{2})}{2} = 0$.

Άρα

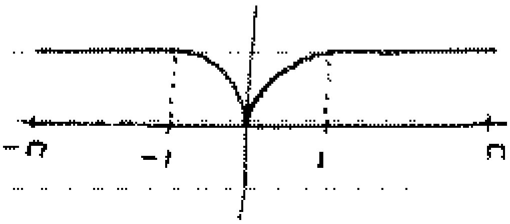
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & 0 < x < 2\pi \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Επαληθεύουμε έτσι ένα ήδη γνωστό αποτέλεσμα.

2. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να χειριστούμε τις σειρές Fourier όλων των μέχρι στιγμής παραδειγμάτων.

3. Η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 1\le |x|\le \pi \\ \sqrt{|x|}, & |x|\le 1 \end{cases}$$



δεν έχει πλευρικές παραγώγους για $x=0$. Όμως

$$|f(0+t)-f(0)| = |f(t)-f(0)| = \sqrt{t} = t^{1/2}$$

$$|f(0-t)-f(0)| = t^{1/2}$$

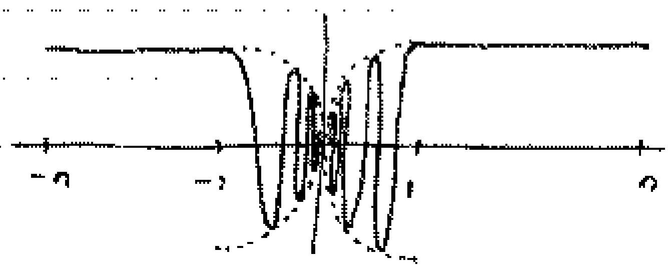
για $0<t<1$.

Άρα, λόγω του (β) της πρότασης στη σελ 60 (με $\alpha=\frac{1}{2}$, $M=1$, $\delta=1$) η σειρά Fourier της f για $x=0$ συγκλίνει στο $f(0)=0$.

<u>Άσκηση</u> Βρείτε αν η σειρά Fourier της f αυτής συγκλίνει και σε ποιό όριο αν $x\neq 0$ (ειδικότερα αν $x=\pm1$ και $x=\pm\pi$).

4. Η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 1\le |x|\le \pi \\ \sqrt{|x|}\,\sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{|x|}}\right), & |x|\le 1 \end{cases}$$



ικανοποιεί τις ανισότητες

$$|f(0+t)-f(0)| = |f(t)| \le \sqrt{t}$$

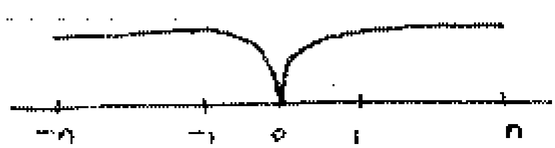
$$|f(0-t)-f(0)| \le \sqrt{t}$$

για $0<t<1$.

Άρα, πάλι λόγω του (β) της πρότασης της σελ 60, η σειρά Fourier της f για $x=0$ συγκλίνει στο $f(0)=0$.

5. Η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \frac{1}{2}\le |x|\le \pi \\ \dfrac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{|x|}\right)}, & |x|\le \frac{1}{2} \end{cases}$$



ικανοποιεί την $|f(0\pm t)-f(0)| = \dfrac{\log 2}{\log\frac{1}{|t|}}$, $0<t<\frac{1}{2}$,

αλλά για $\varepsilon(t) := \dfrac{\log 2}{\log\frac{1}{|t|}}$ ισχύει ότι

$$\int_0^{1/2} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt = \log 2 \int_0^{1/2} \frac{1}{t\log\frac{1}{t}}\,dt = \log 2 \int_{\log 2}^{\infty} \frac{dx}{x} = +\infty .$$

Άρα η πρόταση της σελ. 60 δεν συμπεραίνει τίποτε για την σύγκλιση της σειράς Fourier της f στο $x=0$.

Ούτε όμως και το ίδιο το θεώρημα Dini, αν και πιο γενικό, καλύπτει αυτήν την περίπτωση. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει $A \in \mathbb{R}$ ώστε το $\int_0^{1/2} \left|\frac{f(0+t)+f(0-t)}{2} - A\right| \frac{1}{t}\, dt$ συγκλίνει.

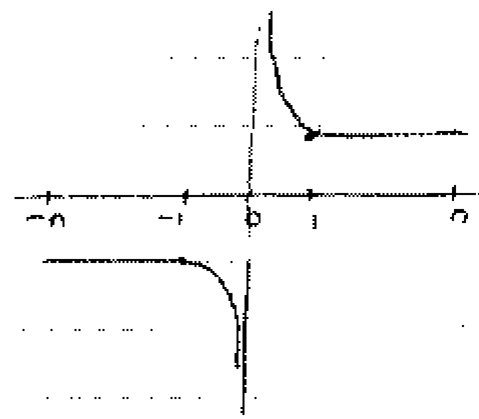
Παρατηρούμε ότι $\frac{f(0+t)+f(0-t)}{2} \to 0$ για $t \to 0+$.

Άρα αναγκαστικά $A=0$. Όμως για $A=0$,

$$\int_0^{1/2} \left|\frac{f(0+t)+f(0-t)}{2}\right| \frac{1}{t}\, dt = \log 2 \int_0^{1/2} \frac{1}{t \log \frac{1}{t}}\, dt = +\infty .$$ Άτοπο.

6. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|^{3/2}}, & 0<|x|\le 1 \\ 1, & 1 \le x < \pi \\ -1, & -\pi < x \le -1 \end{cases}$$



για $x=0$, δεν έχει ούτε πλευρικά όρια. Άρα η πρόταση της σελίδας 60 δεν συμπεραίνει τίποτε για την σύγκλιση της σειράς Fourier της f στο $x=0$.

Όμως $\frac{f(0+t)+f(0-t)}{2} = 0$, αφού η f είναι περιττή!

Άρα το θεώρημα Dini, με $A=0$, δίνει

$$\int_0^{\pi} \left|\frac{f(0+t)+f(0-t)}{2} - 0\right| \frac{1}{t}\, dt = 0$$

και η σειρά Fourier της f, για $x=0$, συγκλίνει στο 0.

<u>Άσκηση</u> Στα παραδείγματα 4, 5, 6 εξετάστε την σύγκλιση της σειράς Fourier της f για $x \neq 0$.

<u>Άσκηση</u> Εξετάστε όλες τις συναρτήσεις του πίνακα ως προς την σύγκλιση των σειρών Fourier τους για κάθε x.

<u>Άσκηση</u> Υπολογίστε την σειρά Fourier της $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0<x<\pi/2 \\ -\sin x, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$ αν υποτεθεί ότι η f είναι περιοδική με περίοδο 2π και άρτια. Εξετάστε την σειρά αυτή ως προς την σύγκλισή της για κάθε x.

Υπολογισμός του ολοκληρώματος : $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}}$

Ξεκινάμε από τον τύπο $\pi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt$ τον οποίο αποδείξαμε στην σελ. 58 (τύπος (4)). Η συνάρτηση είναι άρτια, άρα : $\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\, dt + \int_0^{\pi} \sin(n+\tfrac{1}{2})t \left\{ \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right\} dt$$

Η συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$ είναι συνεχής στο $(0,\pi]$. Επί πλέον $\lim_{t\to 0+} f(t) = 0$. Άρα, αν ορίσουμε $f(0)=0$, η συνάρτηση f γίνεται συνεχής στο $[0,\pi]$. Επομένως το Θεώρημα Riemann–Lebesgue λέει ότι $\int_0^{\pi} \sin(n+\frac{1}{2})t \left\{ \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right\} dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Άρα

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\, dt .$$

Με αλλαγή μεταβλητής $(n+\frac{1}{2})t \to t$ παίρνουμε

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\, dt = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt .$$

Άρα

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt .$$

Παρατήρηση Αν δεν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρ. Riemann–Lebesgue (λόγω της δύσκολης απόδειξής του) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ και

$$f'(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} - \frac{\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}}, & 0 < t \le \pi \\ \frac{1}{24}, & t = 0 \end{cases}$$

Δηλ. η f' είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και επομένως φραγμένη.

$|f'(t)| \le M$, $0 \le t \le \pi$

Άρα $\left| \int_0^{\pi} \sin(n+\frac{1}{2})t \cdot f(t)\, dt \right| = \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \left| \int_0^{\pi} \left(\cos(n+\frac{1}{2})t\right)' f(t)\, dt \right| =$

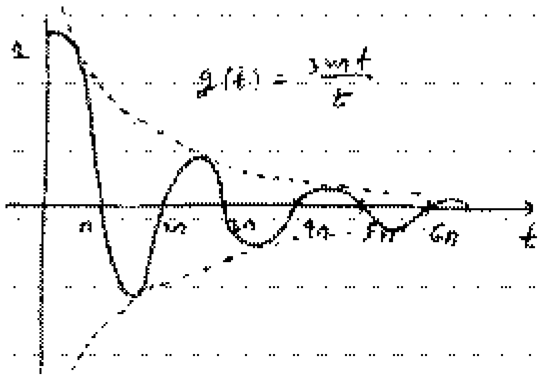
$$= \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \left| \left\{ \cancelto{0}{\cos(n+\tfrac{1}{2})\pi}\, f(\pi) - \cos(n+\tfrac{1}{2})0 \cdot \cancelto{0}{f(0)} - \int_0^{\pi} \cos(n+\tfrac{1}{2})t \cdot f'(t)\, dt \right\} \right|$$

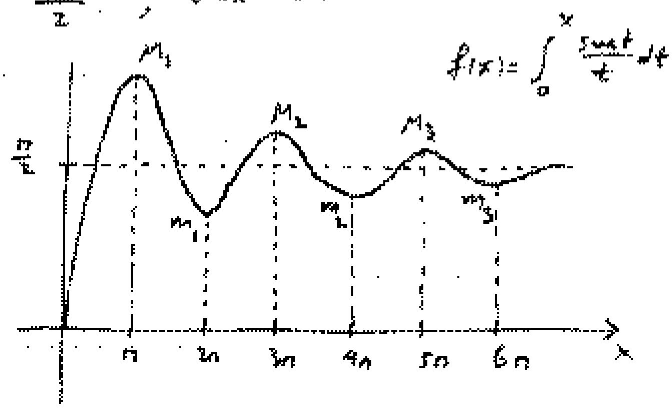
$$\leq \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{\pi} |f'(t)|\,dt \leq \frac{M\pi}{n+\frac{1}{2}} \longrightarrow 0, \quad n\to\infty$$

όπου M είναι άνω φράγμα της $|f'(t)|$ στο $[0,\pi]$.

Άσκηση. Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$.

Φαινόμενο Gibbs για την συνάρτηση : $\frac{\pi-x}{2}$, $0<x<2\pi$





Κατ' αρχήν θα μελετήσουμε την συνάρτηση $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.

Γνωρίζουμε ήδη ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$. Επιπλέον

$$f'(x) = g(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Άρα, λόγω προσήμου της $g(x)$, η f είναι αύξουσα στα διαστήματα $(2k\pi,(2k+1)\pi)$ και φθίνουσα στα $((2k+1)\pi,(2k+2)\pi)$. Στα σημεία $k\pi$ παρουσιάζει ακρότατα. Τοπικό μέγιστο αν k = περιττός, τοπικό ελάχιστο αν k = άρτιος. Εύκολα μπορεί κανείς να αποδείξει ότι, καθώς το k αυξάνει, η ποσότητα $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt$ γίνεται κατ' απόλυτη τιμή. Πράγματι, η ποσότητα αυτή εκφράζει ένα εμβαδό όπως φαίνεται στο πάνω αριστερό σχήμα. Είναι θετική όταν το k = άρτιος, διότι το $\sin t$ είναι θετικό στο $(k\pi,(k+1)\pi)$. Δηλαδή

$$\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt\right| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt, \quad k = \text{άρτιος}.$$

Όταν το k = περιττός τότε το ολοκλήρωμα είναι αρνητικό, διότι το $\sin t$ είναι αρνητικό στο $(k\pi,(k+1)\pi)$. Άρα

$$\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt\right| = -\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,dt, \quad k = \text{περιττός}.$$

Άρα σε κάθε περίπτωση

$$\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt\right| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,dt \qquad k\in\mathbb{N}.$$

Τότε όμως :

$$\left|\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| = \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \overset{t\to t+\pi}{=} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t-\pi)|}{t-\pi}\,dt = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t-\pi}\,dt$$

$$> \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt\right|$$

Άρα, προφανώς, η ακολουθία $\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt\right|$ φθίνει.

Έστω τώρα $M_1, M_2, M_3, \ldots$ τα τοπικά μέγιστα της $f(x)$ για $x=\pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ και $m_1, m_2, m_3, \ldots$ τα τοπικά ελάχιστα της $f(x)$ για $x = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$

$$M_1 = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

$$m_1 = M_1 - \left|\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| > 0$$

$$M_2 = M_1 - \left|\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| + \left|\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| < M_1$$

$$m_2 = m_1 + \left|\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| - \left|\int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| > m_1$$

$$M_3 = M_2 - \left|\int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| + \left|\int_{4\pi}^{5\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| < M_2$$

$$m_3 = m_2 + \left|\int_{4\pi}^{5\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| - \left|\int_{5\pi}^{6\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| > m_2$$

Και γενικά, τα M_k φθίνουν ενώ τα m_k αυξάνουν όπως φαίνεται και στο δεξιό σχήμα της προηγούμενης σελίδας.

Άρα το M_1 είναι το ολικό μέγιστο της $f(x)$ στο $[0,+\infty)$ ενώ το 0 είναι το ολικό ελάχιστο. Άρα

$$\boxed{0 \le \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \le \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt, \quad 0 \le x < \infty.}$$

Επιπλέον $\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,dt = f(y) - f(x)$. Όμως $0 \le f(y), f(x) \le M_1$

$\Rightarrow |f(y) - f(x)| \le M_1$

Άρα
$$\boxed{\left|\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \le \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt, \quad 0 \le x, y < \infty}$$

Τώρα πρόκειται να εξετάσουμε προσεκτικά την συμπεριφορά των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier της συνάρτησης $\frac{\pi - x}{2}$, $0 < x < 2\pi$.

$$S_n(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αρκεί να περιοριστούμε στο διάστημα $0 < x < \pi$, αφού το γράφημα της $S_n(x)$ είναι συμμετρικό ως προς το σημείο $(\pi, 0)$ στο επίπεδο.

Παρατηρούμε ότι: $S_n(x) = \int_0^x (\cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt)\,dt =$

$$= \int_0^x \left(\frac{\sin(n+\frac12)t}{2\sin\frac t2} - \frac12 \right) dt = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin(n+\frac12)t}{2\sin\frac t2}\,dt .$$

Και τώρα επαναλαμβάνουμε το τρύκ που χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό του $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ στην σελίδα 6Γ.

$$S_n(x) = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin(n+\frac12)t}{t}\,dt + \int_0^x \sin(n+\tfrac12)t \cdot \left\{ \frac{1}{2\sin\frac t2} - \frac1t \right\} dt .$$

Ονομάζουμε $A_n(x)$ το τελευταίο ολοκλήρωμα και $f(t) = \frac{1}{2\sin\frac t2} - \frac1t$.

Τότε, σύμφωνα με την παρατήρηση στην σελίδα 6Γ:

$$|A_n(x)| = \frac{1}{n+\frac12} \left| \int_0^x \left(\cos(n+\tfrac12)t\right)' f(t)\,dt \right| =$$

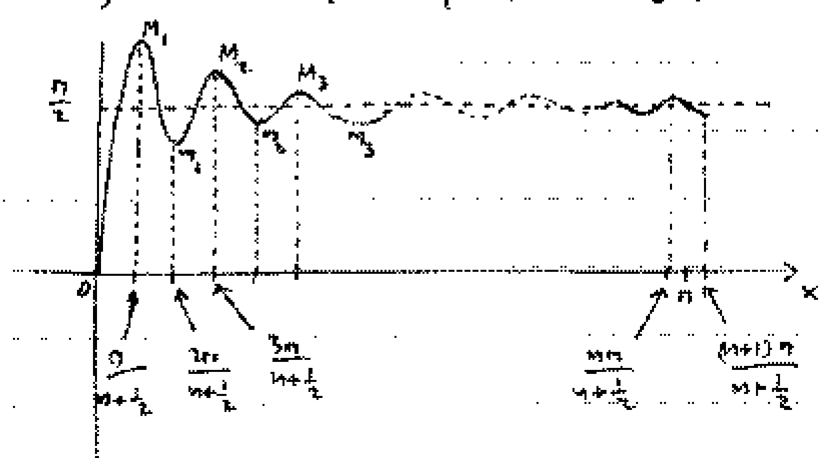
$$= \frac{1}{n+\frac12} \left| \cos(n+\tfrac12)x \cdot f(x) - \cos(n+\tfrac12)0 \cdot \cancel{f(0)}^{\,0} - \int_0^x \cos(n+\tfrac12)t \cdot f'(t)\,dt \right|$$

$$\le \frac{1}{n+\frac12} \left\{ |f(x)| + \int_0^x |f'(t)|\,dt \right\} \le \frac{M + Mx}{n+\frac12} \le \frac{(\pi+1)M}{n+\frac12}$$

όπου M είναι άνω φράγμα της $|f(x)|$ στο $[0,\pi]$.

Άρα $|A_n(x)| \le \frac{c}{n+\frac12}$, c σταθερός αριθμός ανεξάρτητος από το x και από το n.

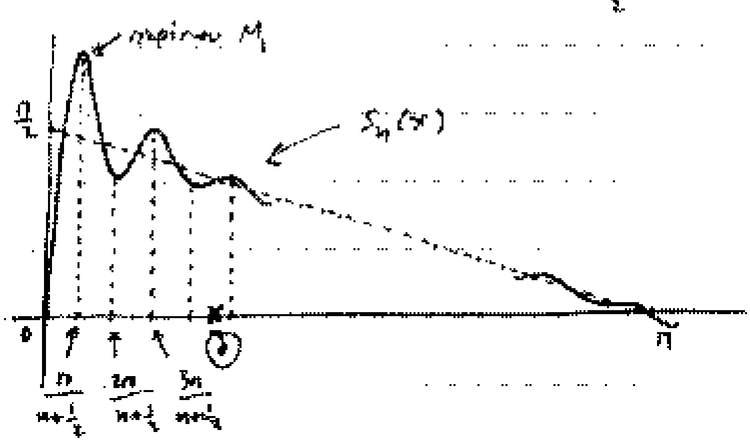
Το γράφημα της $\int_0^{(n+\frac12)x} \frac{\sin t}{t}\,dt$ είναι το διπλανό.



Αρχίζοντας από το $x=0$, στα διαδοχικά διαστήματα μήκους $\frac{\pi}{n+\frac12}$ αυξάνει και φθίνει.

Το π είναι το κέντρο του διαστήματος $\left(\frac{n\pi}{n+\frac12}, \frac{(n+1)\pi}{n+\frac12} \right)$. Το μέγιστο εμφανίζεται στο $x = \frac{\pi}{n+\frac12}$ και είναι $M_1 = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt$.

Αν τώρα προσθέσουμε το γράφημα της $-\frac{x}{2}$ τότε παίρνουμε το διπλανό σχήμα.



Παρατηρούμε τώρα ότι

$$S_n\left(\frac{\pi}{n+\frac12}\right) = -\frac{\pi}{2(n+\frac12)} + M_1 + A_n\left(\frac{\pi}{n+\frac12}\right).$$

Αλλά $-\frac{\pi}{2(n+\frac{1}{2})} \to 0$ και $\left|A_n\left(\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}\right)\right| \le \frac{c}{n+\frac{1}{2}} \to 0$

Άρα $S_n\left(\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}\right) \to M_1 = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt$.

Από την άλλη μεριά, αν σταθεροποιήσουμε ένα $\delta>0$ και κοιτάξουμε τι γίνεται στο διάστημα $[\delta,\pi]$, παρατηρούμε ότι οι "μεγάλες κορυφές" του γραφήματος πέφτουν έξω από το $[\delta,\pi]$ και μέσα στο $(0,\delta)$. Διότι, αν το n είναι πολύ μεγάλο, χρειαζόμαστε περίπου $k=\delta/\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}$ διαστήματα μήκους $\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}$ για να καλύψουμε το $[0,\delta)$.

Έτσι, κοντά στο δ θα βρίσκεται το ακέραιο πολλαπλάσιο $k\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}$, όπου το k είναι αρκετά μεγάλο, και γι' αυτό τούτου οι αποστάσεις των κορυφών από το γράφημα της $\frac{\pi-x}{2}$ είναι αμελητέο.

Άρα στο $[\delta,\pi]$ το $S_n(x)$ συγκλίνει, $n\to\infty$, ομοιόμορφα στο $\frac{\pi-x}{2}$ (Αυτό το γνωρίζουμε ήδη) Αλλά στο $(0,\pi]$ το γράφημα της $S_n(x)$ ανεβαίνει μέχρι το ύψος M_1 (περίπου) που είναι σταθερός αριθμός γνήσια μεγαλύτερος από το $\pi/2$!

Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται φαινόμενο Gibbs και παρατηρείται σε κάθε συνάρτηση η οποία είναι κατά τμήματα μονότονη και ακριβώς στα σημεία όπου η συνάρτηση παρουσιάζει άλματα.

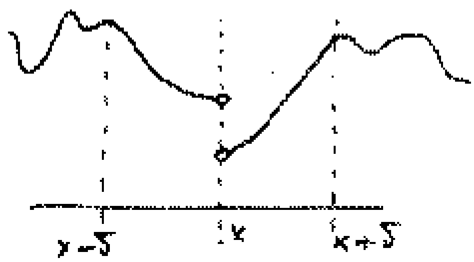
Άσκηση Αποδείξτε ότι, αν $0<x<\pi$, τότε

$$0<\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\dots+\frac{1}{n}\sin nx < \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt \quad , n\in\mathbb{N}$$

Άσκηση Πως μοιάζουν τα γραφήματα των μερικών αθροισμάτων $S_n(x)$ της σειράς Fourier της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} 1 & , 0<x<\pi \\ -1 & , \pi<x<2\pi \end{cases}$ για μεγάλα $n\in\mathbb{N}$;

Μέχρι στιγμής έχουμε δεί ένα θεώρημα, το θεώρημα Dini, το οποίο μας λέει ότι κάτω από ορισμένες συνθήκες η σειρά Fourier μιας συνάρτησης $f(x)$ σε ένα σημείο x συγκλίνει σε κάποιον αριθμό A. Τώρα θα δούμε ένα δεύτερο θεώρημα τέτοιου τύπου.

Θεώρημα Dirichlet Έστω f περιοδική με περίοδο 2π και ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi)$. Έστω $x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f είναι μονότονη και φραγμένη στο $(x, x+\delta]$ καθώς και στο $[x-\delta, x)$. Τότε η σειρά Fourier της f στο x συγκλίνει στο $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.



Παρατήρηση Είναι γνωστό ότι αν μια συνάρτηση f είναι φραγμένη και μονότονη στο διάστημα $(x, x+\delta]$ τότε το $f(x+)$ υπάρχει. Ομοίως για το $f(x-)$. Άρα οι υποθέσεις του θεωρήματος εγγυώνται την ύπαρξη του $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

Λήμμα (άλλη μορφή του δεύτερου θεωρήματος μέσης τιμής ολοκληρ. λογισμού.) Έστω $f, \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ όπου η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και η φ αύξουσα και μη-αρνητική στο $[a,b]$. Τότε

$$\int_a^b f\varphi = \varphi(b) \int_\xi^b f \qquad \text{με κάποιο } \xi, \quad a \le \xi \le b.$$

Απόδειξη Έστω $g(x) = f(-x)$, $\psi(x) = \varphi(-x)$. Αυτές είναι ορισμένες στο $[-b, -a]$ και, προφανώς, η ψ είναι φθίνουσα και μη-αρνητική στο $[-b,-a]$. Άρα, από το δεύτερο θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού, έχουμε $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\varphi(-x)\,dx =$

$$= \int_{-b}^{-a} g(x)\psi(x)\,dx = \psi(-b)\int_{-b}^{-\xi} g(x)\,dx = \varphi(b)\int_{-b}^{-\xi} f(-x)\,dx = \varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

<u>Ο.Ε.Δ.</u>

Απόδειξη του θεωρήματος. Εφαρμόζουμε τον τύπο (7) της σελ. 58 με $A = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$:

$$s_n(x) - \frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left\{(f(x+t)+f(x-t)) - (f(x+)+f(x-))\right\} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \{f(x+t) - f(x+)\} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \{f(x-t) - f(x-)\} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

Για να αποδείξουμε ότι $s_n(x) \longrightarrow \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ αρκεί να αποδείξουμε ότι τα δύο τελευταία ολοκληρώματα τείνουν στο 0.

Θα το κάνουμε για το πρώτο ολοκλήρωμα. Για το δεύτερο η απόδειξη είναι ανάλογη.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{f(x+t)-f(x+)\}\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\rho}\{f(x+t)-f(x+)\}\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\rho}^{\pi}\{f(x+t)-f(x+)\}\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt .$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα στο $(x, x+\delta]$.

Κατ' αρχήν, για $\varepsilon>0$, επιλέγουμε αριθμό ρ ώστε

$0<\rho\le\delta$ και

$$0<t\le\rho \Rightarrow 0\le f(x+t)-f(x+)\le\varepsilon .$$

Τότε, λόγω του λήμματος, υπάρχει ξ, $0\le\xi\le\rho$, ώστε:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\rho}\{f(x+t)-f(x+)\}\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{\pi}\{f(x+\rho)-f(x+)\}\int_{\xi}^{\rho}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

Επί πλέον:

$$\left|\int_{\xi}^{\rho}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right| \le \left|\int_{\xi}^{\rho}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\,dt\right| + \left|\int_{\xi}^{\rho}\sin(n+\tfrac{1}{2})t\left\{\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right\}dt\right|$$

$$\le \left|\int_{\xi(n+\frac{1}{2})}^{\rho(n+\frac{1}{2})}\frac{\sin t}{t}\,dt\right| + \int_{\xi}^{\rho}\left|\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right|dt$$

Ο πρώτος όρος φράσσεται από τον αριθμό $\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt$ (από §7)

Ο δεύτερος όρος φράσσεται από τον αριθμό $\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right|dt$ (η συνάρτηση $\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}$ είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ όπως είδαμε στην §5)

Άρα

$$\left|\int_{\xi}^{\rho}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right| \le \text{σταθερά } C .$$

Και έτσι $\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\rho}\{f(x+t)-f(x+)\}\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right| \le \frac{C}{\pi}\{f(x+\rho)-f(x+)\}$

$$\le \frac{C}{\pi}\varepsilon$$

Στο διάστημα $[\rho,\pi]$ η συνάρτηση $\frac{f(x+t)-f(x+)}{2\sin\frac{t}{2}}$ είναι ολοκληρώσιμη (αφού ο παρονομαστής δεν πλησιάζει το 0:

$2\sin\frac{\rho}{2}\le 2\sin\frac{t}{2}\le 2$ για $\rho\le t\le\pi$)

Άρα το θεώρημα Riemann-Lebesgue δίνει ότι

$$\frac{1}{\pi}\int_{\rho}^{\pi}\{f(x+t)-f(x+)\}\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \longrightarrow 0\,, \quad n\to\infty .$$

Έτσι, υπάρχει n_0 ώστε

$$n\geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{\pi}\int_{\rho}^{\pi}\{f(x+t)-f(x+)\}\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right| \leq \varepsilon$$

Άρα $n\geq n_0 \Rightarrow$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\{f(x+t)-f(x+)\}\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\rho}\{f(x+t)-f(x+)\}\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{\pi}\int_{\rho}^{\pi}\{f(x+t)-f(x+)\}\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right|$$

$$\leq \frac{c}{\pi}\varepsilon+\varepsilon = \left(\frac{c}{\pi}+1\right)\varepsilon .$$

<u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Ορισμός</u> Μια συνάρτηση f περιοδική με περίοδο 2π ονομάζεται <u>κατά τμήματα μονότονη</u> αν υπάρχουν $x_0=0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=2\pi$ ώστε η f να είναι φραγμένη και μονότονη σε κάθε διάστημα (x_k, x_{k+1}).

<u>Πόρισμα του Θεωρ. Dirichlet</u> Αν η f είναι κατά τμήματα μονότονη τότε, για κάθε x, η σειρά Fourier της f στο x συγκλίνει στον αριθμό $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

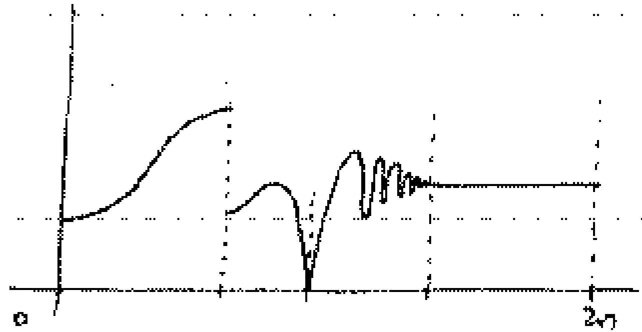
<u>Παραδείγματα</u> Τα παρ. 1 στη 6.2 και 3 στη 6.3 καλύπτονται και από το θεώρ. Dirichlet. Το παράδειγμα 4, για $x=0$, δεν καλύπτεται από το θεωρ. Dirichlet αφού η f δεν είναι μονότονη ούτε από δεξιά ούτε από αριστερά του $x=0$. Το παράδειγμα 5, για $x=0$, ενώ δεν προσεγγίζεται με το θεώρ. Dini, καλύπτεται από το θεωρ. Dirichlet και έχουμε

$$S_n(f)(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0)=0 .$$

Το παράδ. 6, για $x=0$, δεν καλύπτεται ούτε από το Θεώρ. Dirichlet αφού η f δεν είναι φραγμένη στο 0.

<u>Άσκηση</u> Αποδείξτε ότι το Θεώρ. Dirichlet καλύπτει <u>όλες</u> τις συναρτήσεις του πίνακα και για κάθε x.

<u>Άσκηση</u> Το γράφημα μιας συνάρτησης f, περιοδικής με περίοδο 2π, φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Θέλουμε να εξετάσουμε την σύγκλιση της σειράς Fourier της f. Για ποιά x εφαρμόζεται σίγουρα το Θεώρημα Dini; Για ποιά x εφαρμόζεται σίγουρα το Θεώρημα Dirichlet;



ΚΕΦ. VI ΑΘΡΟΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΣΕΙΡΩΝ FOURIER

Το πρώτο πρόβλημα που αντιμετωπίζει κανείς όταν εξετάζει σειρές αριθμών ή συναρτήσεων είναι η σύγκλισή τους. Ειδικά για σειρές Fourier ή τριγ. σειρές το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: δεδομένου x, συγκλίνει η σειρά $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$;

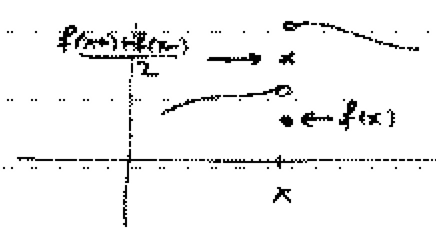
Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε αρκετά το πρόβλημα αυτό. Σε πολλές εφαρμογές γνωρίζουμε τους συντελεστές Fourier a_n, b_n μιας συνάρτησης f χωρίς όμως να γνωρίζουμε την ίδια την συνάρτηση. Και αντιμετωπίζουμε το ερώτημα 4 στην σελίδα 36: Πώς βρίσκουμε την f αν γνωρίζουμε την σειρά Fourier της;

Στις περιπτώσεις που εφαρμόζεται το θεώρημα Dini ή το θεώρημα Dirichlet του προηγούμενου κεφαλαίου, από την σειρά Fourier της f μπορούμε να βρούμε τους μέσους όρους $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$:

$$S_n(f)(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που η σειρά Fourier της f, τουλάχιστον σε ορισμένα x, δεν συγκλίνει. Είναι τότε δυνατόν να βρούμε την τιμή του $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ από την σειρά Fourier της f;

<u>Παρατήρηση</u> Αν θέλουμε να "βρούμε" μιά συνάρτηση f φαίνεται ότι για κάθε x πρέπει να βρούμε το $f(x)$.



Οι μέθοδοι των θεωρημάτων Dini και Dirichlet αναγνωρίζουν το $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ (όπου εφαρμόζονται). Σε όλες όμως τις περιπτώσεις που εμφανίζονται στην πράξη τούτο αρκεί, διότι, είτε το x είναι σημείο συνέχειας της f, οπότε $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=f(x)$. Είτε, η f έχει <u>πολύ λίγα</u> σημεία ασυνέχειας, ας πούμε πεπερασμένου πλήθους, οπότε οι τιμές της f στα μεμονωμένα αυτά σημεία δεν παίζουν ρόλο (για υπολογισμό ολοκληρωμάτων για παράδειγμα). Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι η τιμή της f σε ένα τέτοιο σημείο ασυνέχειας x είναι η $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$, αν ανάγκη αλλάζοντας την οποιαδήποτε προϋπάρχουσα $f(x)$.

Ας θυμηθούμε τώρα τον ορισμό της Abel-αθροισιμότητας μιας σειράς καθώς και το θεώρημα Abel για δυναμοσειρές στην σελ. 27.

Για σειρές Fourier ισχύει το εξής πολύ σημαντικό

Θεώρημα. Έστω 2π-περιοδική συνάρτηση f ολοκληρώσιμη στο $[0,2\pi)$ και έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν η f έχει πλευρικά όρια στο x, $f(x+), f(x-)$, τότε η σειρά Fourier της f είναι Abel-αθροίσιμη στο x και έχει A-άθροισμα ίσο με $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$. Δηλαδή:

$$\lim_{r\to 1-} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$$

Παρατηρήσεις 1. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό:

$$f(r,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n, \quad 0 \le r < 1.$$

Οπότε το θεώρημα διατυπώνεται: $f(r,x) \xrightarrow[r\to 1-]{} \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$

2. Η μόνη υπόθεση στο θεώρημα είναι ότι

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$$

Ενώ στο θεώρημα Diní (με $A = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$) χρειαζόμαστε ισχυρότερη υπόθεση:

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \frac{f(x+)+f(x-)}{2} \right| \cdot \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt \quad \text{συγκλίνει}.$$

Από την άλλη μεριά το θεώρημα Dini δίνει ισχυρότερο αποτέλεσμα: ότι η σειρά Fourier συγκλίνει. Ενώ το τελευταίο θεώρημα δίνει ότι η σειρά Fourier είναι Abel-αθροίσιμη.

3. Αφού οι συντελεστές Fourier a_n, b_n κάθε f είναι φραγμένοι ($|a_n| = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx\right| \le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$, $|b_n| \le \ldots$), έχουμε από το κριτήριο Weierstrass ότι η σειρά που ορίζει την $f(r,x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $x \in \mathbb{R}$ και για σταθερό $r<1$.

Απόδειξη του θεωρήματος

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}(\cos nt\cos nx + \sin nt\sin nx)\, r^n\right\} dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos n(x-t)\cdot r^n\right\} dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos nt\cdot r^n\right\} dt$$

Από την σελίδα 28 έχουμε ότι

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos nt\cdot r^n \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}$$

ομοιόμορφα για $t\in\mathbb{R}$ και για σταθερό $r<1$. (Κριτήριο Weierstrass)

Άρα, για $\varepsilon>0$, υπάρχει n_0, ώστε $N\geq n_0 \Rightarrow$

$$\left|\frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2} - \left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos nt\cdot r^n\right)\right| \leq \varepsilon$$

Τότε όμως, για $N\geq n_0$ έχουμε

$$\left|\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} r^n(a_n\cos nx + b_n\sin nx) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos nt\cdot r^n - \frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\right\}dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(x+t)|\cdot\varepsilon\,dt = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|\,dt.$$

Αν λοιπόν $\varepsilon\to 0$ έχουμε ότι

$$\boxed{f(r,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\,r^n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt}$$

Με αλλαγή $t\to -t$ παίρνουμε

$$f(r,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt$$

Προσθέτοντας κατά μέλη

$$f(r,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt$$

και επειδή η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα είναι άρτια:

(1) $$f(r,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt$$

Ο πρώτος τύπος της σελ. 28 με ολοκλήρωση κατά όρο (λόγω ομ. σύγκλισης)

(2) δίνει $\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt = \pi$ ή

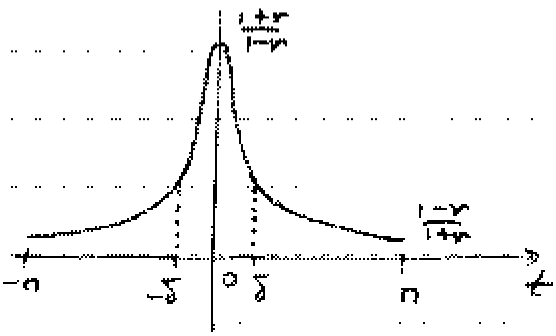
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt = 1.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της τελευταίας ισότητας με τον αριθμό $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ και αφαιρέσουμε από την ισότητα (1):

(3) $$f(r,x) - \frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \frac{f(x+)+f(x-)}{2}\right\}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt$$

Στην (3) θα βασίσουμε την απόδειξη του $f(r,x)\xrightarrow[r\to 1]{}\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

Το ολοκλήρωμα που βρίσκεται στο κάτω πλαίσιο της προηγούμενης σελίδας ονομάζεται <u>ολοκλήρωμα Poisson</u> της συνάρτησης f.



Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}$ είναι άρτια συνάρτηση του t, ότι είναι γνήσια φθίνουσα στο διάστημα $[0,\pi]$ με μέγιστη τιμή $\frac{1+r}{1-r}$ στο $t=0$ και ελάχιστη τιμή $\frac{1-r}{1+r}$ στο $t=\pi$. Το εμβαδόν κάτω από το γράφημά της στο $[-\pi,\pi]$ είναι 2π όπως φαίνεται από την ισότητα (2).

Επιπλέον, αν κρατήσουμε σταθερό $\delta>0$, τότε στο διάστημα $[\delta,\pi]$ η συνάρτηση τείνει ομοιόμορφα στο 0 καθώς $r\to 1-$. Πράγματι:

(4) $$0\le \frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\le \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2} \quad \text{για} \quad \delta\le t\le \pi$$

και $$\frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2}\xrightarrow[r\to 1-]{}\frac{0}{2(1-\cos\delta)}=0$$

Από τον τύπο (3) παίρνουμε:

$$\left|f(r,x)-\frac{f(x+)+f(x-)}{2}\right|\le \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-\frac{f(x+)+f(x-)}{2}\right|\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-\frac{f(x+)+f(x-)}{2}\right|\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt .$$

Το δ το διαλέγουμε ώστε

$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-\frac{f(x+)+f(x-)}{2}\right|\le \varepsilon/2 \quad \text{για} \quad 0<t\le\delta .$$

Τότε το πρώτο ολοκλήρωμα είναι

$$\le \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt \le \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt=\frac{\varepsilon}{2}$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα, λόγω της (4), είναι

$$\le \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-\frac{f(x+)+f(x-)}{2}\right|dt$$

Επειδή $\frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2}\to 0$ για $r\to 1-$, βρίσκουμε r_0 ώστε για $r_0\le r<1$ το δεύτερο ολοκλήρωμα να είναι $\le \varepsilon/2$.

Άρα, για $r_0 \le r < 1$,

$$\left| f(r,x) - \frac{f(x+)+f(x-)}{2} \right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$ Ο.Ε.Δ.

Πόρισμα. Αν η f είναι 2π-περιοδική και συνεχής στο σημείο x τότε $f(r,x) \xrightarrow[r\to 1^-]{} f(x)$. Δηλαδή, η σειρά Fourier της f είναι Abel-αθροίσιμη στο x με Α-άθροισμα $f(x)$.

Σαν εφαρμογή μπορούμε να δώσουμε δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος της σελίδας 76. Πράγματι έστω $S(f) = S(g)$ και x σημείο συνέχειας των f, g: Αφού $S(f) = S(g)$ έπεται ότι

$$f(r,x) = g(r,x)$$

Άρα $$f(x) = \lim_{r\to 1^-} f(r,x) = \lim_{r \to 1^-} g(r,x) = g(x).$$

Άσκηση. Η σειρά Fourier της συνάρτησης της σελ. 73, σε ποιά x είναι Abel-αθροίσιμη;

Το θεώρημα που μόλις αποδείξαμε είναι πολύ χρήσιμο διότι επιτρέπει να βρίσκουμε τους μέσους όρους $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$, στα σημεία x όπου η f έχει πλευρικά όρια, αν γνωρίζουμε την σειρά Fourier της f.

Ένας άλλος τρόπος, πέρα από την Abel-αθροισιμότητα, για να χειριζόμαστε σειρές που δεν συγκλίνουν (ή που δεν γνωρίζουμε αν συγκλίνουν) είναι να ελέγξουμε αν είναι Cesaro-αθροίσιμες.

Ορισμός. Μία ακολουθία $\{\gamma_n\}$ είναι Cesaro-συγκλίνουσα αν η ακολουθία $\beta_n = \frac{\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n}{n}$ των μέσων όρων συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό: $\beta_n \to \beta$. Το β ονομάζεται Cesaro-όριο της $\{\gamma_n\}$.

Πρόταση. Αν η $\{\gamma_n\}$ συγκλίνει, $\gamma_n \to \gamma$, τότε είναι Cesaro-συγκλίνουσα και έχει Cesaro-όριο γ.

Απόδειξη. Έστω $\gamma_n \to \gamma$. Θα δείξουμε ότι $\frac{\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n}{n} \to \gamma$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_1 ώστε

$$n \ge n_1 \Longrightarrow |\gamma_n - \gamma| < \varepsilon/2 .$$

Γράφουμε :

$$\left|\frac{\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n}{n}-\gamma\right| = \left|\frac{(\gamma_1-\gamma)+(\gamma_2-\gamma)+\dots+(\gamma_n-\gamma)}{n}\right| \le$$

$$\le \frac{|\gamma_1-\gamma|+\dots+|\gamma_{n_1-1}-\gamma|}{n} + \frac{|\gamma_{n_1}-\gamma|+\dots+|\gamma_n-\gamma|}{n}$$

$$\le \frac{|\gamma_1-\gamma|+\dots+|\gamma_{n_1-1}-\gamma|}{n} + \frac{n-n_1+1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\le \frac{|\gamma_1-\gamma|+\dots+|\gamma_{n_1-1}-\gamma|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Στην τελευταία γραμμή το κλάσμα τείνει στο 0 καθώς $n\to\infty$.

Άρα υπάρχει $n_0 \ge n_1$ ώστε

$$n\ge n_0 \implies \frac{|\gamma_1-\gamma|+\dots+|\gamma_{n_1-1}-\gamma|}{n} \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Άρα, αν $n\ge n_0$ τότε $\left|\frac{\gamma_1+\dots+\gamma_n}{n}-\gamma\right| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. <u>Ο.Ε.Δ.</u>

Υπάρχουν παραδείγματα ακολουθιών που δεν είναι συγκλίνουσες αλλά είναι Cesaro-συγκλίνουσες. Ένα παράδειγμα: $\gamma_n=(-1)^n$.

$$\frac{\gamma_1+\dots+\gamma_n}{n} = \begin{cases} 0, & n \text{ άρτιος} \\ -\frac{1}{n}, & n \text{ περιττός.}\end{cases}$$

Δηλ. $\frac{\gamma_1+\dots+\gamma_n}{n}\longrightarrow 0$, αλλά γ_n δεν συγκλίνει.

<u>Ορισμός</u> Μιά σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ονομάζεται <u>Cesaro-αθροίσιμη</u> αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $s_n=a_0+\dots+a_n$ είναι Cesaro-συγκλίνουσα, δηλ.

$\frac{s_0+s_1+\dots+s_n}{n+1}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Ο αριθμός αυτός ονομάζεται <u>Cesaro-άθροισμα</u> της σειράς.

<u>Πρόταση</u> Αν μιά σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε είναι Cesaro-αθροίσιμη και το Cesaro-άθροισμά της ταυτίζεται με το κανονικό άθροισμά της.

<u>Απόδειξη</u> Αν $s=\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ τότε $s_n\to s$. Από την προηγούμενη πρόταση: $\frac{s_0+s_1+\dots+s_n}{n+1}\longrightarrow s$. <u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Παράδειγμα</u> Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ έχει Cesaro-άθροισμα $\frac{1}{2}$ ενώ δεν συγκλίνει: $s_n=\begin{cases}1, & n=\text{άρτιος}\\ 0, & n=\text{περιττός.}\end{cases}$

Άρα $\frac{s_0+\dots+s_n}{n+1} = \left.\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{1}{2(n+1)}, & n \text{ άρτιο}\\ \frac{1}{2}, & n=\text{περιττός}\end{cases}\right\} \longrightarrow \frac{1}{2}$

Άσκηση. Η σειρά $1+0-1+1+0-1+\dots$ έχει Cesaro-άθροισμα $\frac{2}{3}$.

Άσκηση. Οι σειρές $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\dots$

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\dots$$

είναι Cesaro-αθροίσιμες, για $x\neq k2\pi$, και έχουν Cesaro-άθροισμα $\frac{1}{2}\cot(\frac{x}{2})$ η πρώτη και 0 η δεύτερη.

Άσκηση. Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ είναι Cesaro-αθροίσιμη τότε $\frac{s_n}{n}\to 0$. (όπου, φυσικά, $s_n=a_1+\dots+a_n$)

Άσκηση. (α) Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ είναι Cesaro-αθροίσιμη. Τότε η σειρά συγκλίνει αν και μόνον αν $\frac{a_1+2a_2+\dots+na_n}{n}\to 0$.

(Υπόδ: $\frac{s_1+\dots+s_n}{n}=s_n-\frac{a_1+2a_2+\dots+na_n}{n}$)

(β) Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ είναι Cesaro-αθροίσιμη. Αν $na_n\to 0$ τότε η σειρά συγκλίνει. (Tauber)

Άσκηση (α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ είναι Cesaro-αθροίσιμη αν και μόνον αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t_n}{n(n+1)}$ συγκλίνει, όπου ορίζουμε $t_n=a_1+2a_2+\dots+na_n$.

(β) Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ είναι Cesaro-αθροίσιμη και $|na_n|\leq M$ $\forall n\in\mathbb{N}$ τότε η σειρά συγκλίνει (Hardy)

Άσκηση. Μια σειρά θετικών όρων συγκλίνει αν και μόνον αν είναι Cesaro-αθροίσιμη.

(Fejer)

Θεώρημα. Έστω f 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη στο $[0,2\pi)$. Αν για κάποιο σημείο x τα πλευρικά όρια $f(x+)$, $f(x-)$ υπάρχουν, τότε η σειρά Fourier της f είναι Cesaro-αθροίσιμη στο x και έχει Cesaro-άθροισμα $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

Απόδειξη. Έστω $f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$, και $s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$.

Γνωρίζουμε (σελ 58, τύπος (3)) ότι

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

Άρα $$\frac{s_0(x)+\dots+s_n(x)}{n+1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k=0}^{n}\sin(k+\tfrac12)t\cdot dt$$

Το άθροισμα $\sum_{k=0}^{n} \sin(k+\frac12)t$ υπολογίζεται αν το πολλαπλασιάσουμε με $2\sin\frac{t}{2}$ και εφαρμόσουμε τον τύπο $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$.

Παίρνουμε τότε: $$2\sin\frac{t}{2}\cdot \sum_{k=0}^{n} \sin(k+\tfrac12)t = \sum_{k=0}^{n}(\cos kt - \cos(k+1)t) =$$
$$= 1-\cos(n+1)t = 2\sin^2\left(\tfrac{n+1}{2}\right)t .$$

Άρα $$\frac{s_0(x)+\dots+s_n(x)}{n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt$$

και, επειδή η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα είναι άρτια:

$$\boxed{\frac{s_0(x)+\dots+s_n(x)}{n+1} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\cdot\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt}$$

Η συνάρτηση $K_n(t) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

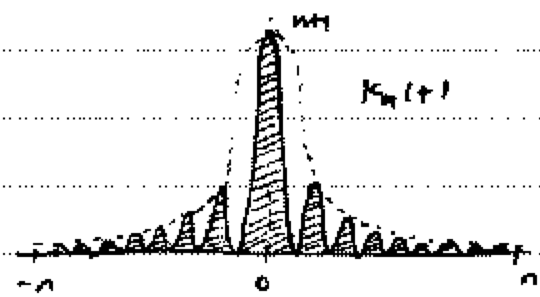
(α) είναι μη-αρνητική : $K_n(t)\ge 0$

(β) είναι άρτια : $K_n(t)=K_n(-t)$,

(γ) το εμβαδόν κάτω από το γράφημά της είναι 2π διότι
$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\frac{\sin^2(\frac{n+1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt = \frac{1}{n+1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\left(\sum_{k=0}^{n}\sin(k+\tfrac12)t\right)dt$$
$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(k+\frac12)t}{\sin\frac{t}{2}}dt = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}2\pi = 2\pi.$$

(δ) Αν σταθεροποιήσουμε ένα αυθαίρετο δ, $0<\delta<\pi$, τότε στο διάστημα (δ,π) η $K_n(t)$ τείνει ομοιόμορφα στο 0 καθώς $n\to\infty$. Αυτό φαίνεται από: $0\le K_n(t)\le \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{(\sin\frac{t}{2})^2}\le\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{(\sin\frac{\delta}{2})^2}$, $\delta\le t\le\pi$.

Δηλαδή $0\le\max_{\delta\le t\le\pi}K_n(t)\le\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{(\sin\frac{\delta}{2})^2}\longrightarrow 0$, $n\to\infty$.



Τώρα, από τον τύπο μέσα στο πλαίσιο και από το (γ) έχουμε:
$$\frac{s_0(x)+\dots+s_n(x)}{n+1} - \frac{f(x+)+f(x-)}{2} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left\{\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-\frac{f(x+)+f(x-)}{2}\right\}K_n(t)dt$$

Δοσμένου $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε :

$$0<t<\delta \Rightarrow \left| \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \frac{f(x+)+f(x-)}{2} \right| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Τότε έχουμε

$$\left| \frac{s_0(x)+\dots+s_n(x)}{n+1} - \frac{f(x+)+f(x-)}{2} \right| \le \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \left| \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \frac{f(x+)+f(x-)}{2} \right| K_n(t)\,dt$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \left| \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \frac{f(x+)+f(x-)}{2} \right| K_n(t)\,dt$$
$$= A+B.$$

$$A \le \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^\delta K_n(t)\,dt \le \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^\pi K_n(t)\,dt = \frac{\varepsilon}{2}$$

Για το δ που βρήκαμε παρατηρούμε ότι

$$B \le \frac{1}{\pi}\max_{\delta\le t\le\pi} K_n(t)\cdot\int_\delta^\pi \left| \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \frac{f(x+)+f(x-)}{2} \right| dt \longrightarrow 0$$

καθώς $n\to\infty$.

Άρα, διαλέγουμε n_0 ώστε : $n\ge n_0 \Rightarrow 0\le B\le \varepsilon/2$

Τελικά, $n\ge n_0 \Rightarrow$

$$\left| \frac{s_0(x)+\dots+s_n(x)}{n+1} - \frac{f(x+)+f(x-)}{2} \right| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \qquad \underline{\text{Ο.Ε.Δ.}}$$

Το $\frac{s_0(x)+\dots+s_n(x)}{n+1}$ συμβολίζεται συνήθως $\sigma_n(x)$ ή $\sigma_n(f,x)$ και ονομάζεται <u>Cesàro-μέσος</u> (n-οστός) της f στο x ή n-οστό <u>C-1 άθροισμα</u> της f στο x. Το $\sigma_n(x)$ είναι τριγων. πολυώνυμο αφού είναι γραμμ. συνδυασμός των τριγ. πολυωνύμων $s_0(x),\dots,s_n(x)$.

Έχουμε, λοιπόν, άλλον έναν τρόπο να βρίσκουμε το $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ από την σειρά Fourier της f στις περιπτώσεις που η σειρά Fourier δεν (γνωρίζουμε αν) συγκλίνει.

<u>Πόρισμα</u> Αν η f είναι συνεχής στο x τότε $\sigma_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

Έχουμε έτσι μιά τρίτη απόδειξη του θεωρήματος της σελ. 46.

Αν $S(f)=S(g)$ τότε $\sigma_n(f)=\sigma_n(g)$. Άρα, αν το x είναι κοινό σημείο συνέχειας των f,g, τότε

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f)(x)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n(g)(x)=g(x).$$

<u>Θεώρημα (Weierstrass).</u> Αν η f είναι 2π-περιοδική και συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε, γιά κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει τριγ. πολυώνυμο $T(x)$

ώστε ; $\quad |f(x)-T(x)| \le \varepsilon \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη</u> Θα δείξουμε ότι, γιά $\varepsilon>0$, υπάρχει n_0 ώστε

$$n\ge n_0 \Rightarrow |f(x)-\sigma_n(x)| \le \varepsilon \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Δηλ. ότι γιά f συνεχή στο $\mathbb{R}$ τα $\{\sigma_n(x)\}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ στην f.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο στο τέλος της σελ. 81 :

$$|\sigma_n(x)-f(x)| \le \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\right| K_n(t)\,dt \; +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\right| K_n(t)\,dt$$
$$= A+B$$

Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$ (γιατί;). Άρα γιά $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε

$$0\le t\le \delta \Rightarrow |f(x\pm t)-f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το δ παίρνουμε :

$$A \le \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{|f(x+t)-f(x)|+|f(x-t)-f(x)|}{2}K_n(t)\,dt \le \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}K_n(t)\,dt$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}K_n(t)\,dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αφού η f είναι συνεχής θα είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$ (γιατί;) δηλαδή $\quad |f(x)|\le M \quad \forall x\in\mathbb{R}$. Τότε

$$B \le 2M\cdot\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}K_n(t)\,dt \le 2M\cdot\max_{\delta\le t\le\pi}K_n(t) \le 2M\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2}$$

Διαλέγουμε τώρα n_0 ώστε

$$n\ge n_0 \Rightarrow B \le 2M\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2} \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Άρα, $n\ge n_0 \Rightarrow$

$$|\sigma_n(x)-f(x)| \le A+B \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$ <u>Ο.Ε.Δ.</u>

Το θεώρημα αυτό γιά 2π-περιοδικές συναρτήσεις και τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι αντίστοιχο με το θεώρημα του Weierstrass γιά συνεχείς συναρτήσεις σε κλειστό φραγμένο διάστημα και αλγεβρικά πολυώνυμα.

<u>Άσκηση</u> Έστω ότι η 2π-περιοδική συνάρτηση f, ολοκληρώσιμη στο $[0,2\pi]$,

είναι φραγμένη και ότι $m \le f(x) \le M$, $x \in \mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι : $m \le \sigma_n(x) \le M$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

(Υπόδ: χρησιμοποιείστε τον τύπο στο πλαίσιο της σελ. 81)

<u>Άσκηση</u> (Θεωρήματα για την <u>τάξη προσέγγισης</u> μιας συνάρτησης f από τους Cesaro-μέσους $\sigma_n(x)$ της σειράς Fourier της)

(α) Αποδείξτε ότι $K_n(t) \le \min\left(n+1, \frac{\pi^2}{(n+1)t^2}\right)$ για $0 < t \le \pi$.

(β) Αν $0 < \alpha \le 1$ και η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz-α στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $|f(x) - f(y)| \le K|x-y|^\alpha$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

τότε :
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\sigma_n(x) - f(x)| \le \begin{cases} c \cdot \frac{1}{n^\alpha} , & 0 < \alpha < 1 \\ c \cdot \frac{\log n}{n} , & \alpha = 1 \end{cases}$$

<u>Άσκηση</u> Για ποιά x είναι η σειρά Fourier της f της σελ. 73 σίγουρα Cesaro-αθροίσιμη;

ΚΕΦ. VII Η ΕΥΚΛΕΙΔΙΑ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ $\mathcal{L}^2[0,2\pi)$ ΚΑΙ ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί των πραγματικών αριθμών.

<u>Ορισμός</u>. Μια συνάρτηση $\langle x,y\rangle$ δύο μεταβλητών $x,y\in V$ ονομάζεται <u>εσωτερικό γινόμενο</u> στον V αν

(α) $\langle x,y\rangle \in \mathbb{R} \quad \forall\, x,y\in V$

(β) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle \quad \forall\, x,y\in V$

(γ) $\langle \lambda x_1+\mu x_2 , y\rangle = \lambda\langle x_1,y\rangle + \mu\langle x_2,y\rangle \quad \forall\, x_1,x_2,y\in V$ και $\forall\, \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

(δ) $\langle x,x\rangle \geq 0 \quad \forall\, x\in V$ και $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$.

Τότε ο V λέγεται <u>χώρος με εσωτερικό γινόμενο</u> ή <u>Ευκλείδιος χώρος</u>.

Απόρροια του (β) και του (γ) είναι η (γ')

(γ') $\langle x, \lambda y_1+\mu y_2\rangle = \lambda\langle x,y_1\rangle + \mu\langle x,y_2\rangle$

Με επαγωγή η (γ) γενικεύεται σε

$\langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j , y\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x_j , y\rangle$

και παρόμοια γενικεύεται η (γ')

Συνδυάζοντας σύνολα τις γενικεύσεις αυτές των (γ), (γ') παίρνουμε:

$$\langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j , \sum_{k=1}^{m} \mu_k y_k \rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \lambda_j \mu_k \langle x_j , y_k\rangle$$

<u>Παραδείγματα</u>

1. $V=\mathbb{R}^n$. Αν $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ ορίζουμε (ως γνωστόν): $\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$.
   Οι ιδιότητες (α) – (δ) είναι γνωστές και το $\langle x,y\rangle$ είναι το γνωστό μας Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο.
2. $V=\ell^2$ είναι ο χώρος όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών
   $x=(x_1,x_2,\dots\dots)$
   με την ιδιότητα: $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < +\infty$.
   Ο V είναι διανυσματικός χώρος με την συνήθη πρόσθεση ακολουθιών

και τον συνήθη πολλαπλασιασμό ακολουθίας με πραγματικό αριθμό:

$$(x_1,x_2,\dots)+(y_1,y_2,\dots)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots)$$

$$\lambda(x_1,x_2,\dots)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots)$$

Πρέπει, βέβαια, να αποδείξουμε ότι οι προκύπτουσες ακολουθίες είναι στον ℓ^2:

(i) Αν $x=(x_1,x_2,\dots)\in\ell^2$, $y=(y_1,y_2,\dots)\in\ell^2$ τότε

$$\sum_{j=1}^{\infty}(x_j+y_j)^2 \le 2\sum_{j=1}^{\infty}x_j^2+2\sum_{j=1}^{\infty}y_j^2<+\infty .$$

Άρα $x+y\in\ell^2$.

(ii) Αν $x=(x_1,x_2,\dots)\in\ell^2$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda x_j)^2=\lambda^2\sum_{j=1}^{\infty}x_j^2<+\infty$$

Άρα $\lambda x\in\ell^2$

Κατόπιν εύκολα αποδεικνύουμε (και το παραλείπουμε) ότι οι αριθμητικές πράξεις στον ℓ^2 ικανοποιούν τις απαιτούμενες ιδιότητες ώστε ο ℓ^2 να αποτελεί διαν. χώρο.

Στον ℓ^2 ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle x,y\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}x_j y_j \quad , \text{ όπου } x=(x_1,x_2,\dots),\ y=(y_1,y_2,\dots)\in\ell^2$$

Θα ελέγξουμε τις ιδιότητες (α)—(δ):

(α) Η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty}x_j y_j$ συγκλίνει διότι συγκλίνει απολύτως

$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_j y_j| \le \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}x_j^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}y_j^2<+\infty .$$

Άρα το $\langle x,y\rangle$ είναι πραγματικός αριθμός.

(β) Προφανές.

(γ) $$\langle\lambda x_1+\mu x_2,y\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda x_{j1}+\mu x_{j2})y_j=\lambda\sum_{j=1}^{\infty}x_{j1}y_j+\mu\sum_{j=1}^{\infty}x_{j2}y_j$$
$$=\lambda\langle x_1,y\rangle+\mu\langle x_2,y\rangle$$

(δ) $\langle x,x\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}x_j^2\ge 0$,

$$0=\langle x,x\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}x_j^2 \Leftrightarrow x_j=0\ \ \forall j\in\mathbb{N} \Leftrightarrow x=0=(0,0,0,\dots)$$

3. $V=\mathcal{L}^2[a,b]$ όπου το $[a,b]$ είναι διάστημα του $\mathbb{R}$

(Είναι δυνατόν το a να είναι $-\infty$ ή το b να είναι $+\infty$

η και τα δύο να $-\infty, +\infty$ αντίστοιχα.)

Στοιχεία του $\mathcal{L}^2[a,b]$ είναι όλες οι συναρτήσεις

$$f:[a,b]\to\mathbb{R}$$

οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και τα τετράγωνά τους f^2 είναι επίσης ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[a,b]$.

$$\mathcal{L}^2[a,b]=\{f:[a,b]\to\mathbb{R} \;/\; f, f^2 \text{ ολοκληρώσιμες στο } [a,b]\}.$$

Αν μια f είναι R-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ τότε η f^2 είναι αυτομάτως R-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Για παράδειγμα όλες οι συνεχείς συναρτήσεις καθώς και οι κατά τμήματα συνεχείς ή οι κατά τμήματα μονότονες και φραγμένες συναρτήσεις είναι στον χώρο $\mathcal{L}^2[a,b]$, αν το $[a,b]$ είναι φραγμένο διάστημα.

Το παράδειγμα $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0<x\leq 1\end{cases}$

δείχνει ότι είναι δυνατόν μια f να είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ χωρίς η f^2 να είναι ολοκληρώσιμη. Άρα οι συναρτήσεις που "απειρίζονται" σε (μεμονωμένα) σημεία του $[a,b]$ θέλουν προσοχή στην αγορά την κατάταξή τους στον χώρο $\mathcal{L}^2[a,b]$.

Κατόπιν ορίζουμε πράξεις στον χώρο $\mathcal{L}^2[a,b]$.

$(f+g)(t)=f(t)+g(t)$, $\quad a\leq t\leq b$

$(\lambda f)(t)=\lambda\cdot f(t)$, $\quad a\leq t\leq b$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι, αν $f,g\in\mathcal{L}^2[a,b]$, τότε $f+g$ και $\lambda f\in\mathcal{L}^2[a,b]$.

(i) $\displaystyle\int_a^b |(f+g)(t)|\,dt=\int_a^b |f(t)+g(t)|\,dt\leq\int_a^b |f(t)|\,dt+\int_a^b |g(t)|\,dt<$
$<+\infty$. Άρα η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη.

$\displaystyle\int_a^b |(f+g)(t)|^2\,dt=\int_a^b |f(t)+g(t)|^2\,dt\leq 2\int_a^b |f(t)|^2\,dt+2\int_a^b |g(t)|^2\,dt$
$<+\infty$. Άρα η $(f+g)^2$ είναι ολοκληρώσιμη.

Άρα $f+g\in\mathcal{L}^2[a,b]$.

(ii) $\displaystyle\int_a^b |(\lambda f)(t)|\,dt=|\lambda|\int_a^b |f(t)|\,dt<+\infty$.

Άρα η λf είναι ολοκληρώσιμη.

$$\int_a^b |(\lambda f)(t)|^2 dt = \lambda^2 \int_a^b |f(t)|^2 dt < +\infty .$$

Άρα η $(\lambda f)^2$ είναι ολοκληρώσιμη.

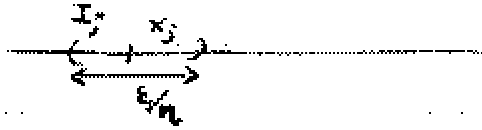
Άρα $\lambda f \in \mathcal{L}^2[a,b]$.

Πριν προχωρήσουμε θα κάνουμε μια μικρή παρένθεση για να ασχοληθούμε λίγο με μια καινούργια έννοια της οποίας η κανονική θέση βρίσκεται στην λεγόμενη "Θεωρία μέτρου Lebesgue".

<u>Ορισμός</u>. Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ λέμε ότι <u>έχει μέτρο μηδέν</u> ή ότι <u>είναι μέτρου μηδέν</u> αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν αριθμήσιμα ανοικτά διαστήματα των οποίων η ένωση καλύπτει το A και των οποίων το συνολικό μήκος είναι μικρότερο του ε.

<u>Παραδείγματα</u>. 1. Αν το A είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ τότε το A έχει μέτρο μηδέν. Διότι, για τυχόν $\varepsilon > 0$, θεωρούμε τα ανοικτά διαστήματα

$I_j = \left(x_j - \frac{\varepsilon}{2n} , x_j + \frac{\varepsilon}{2n} \right)$



τα οποία καλύπτουν το A και έχουν συνολικό μήκος $n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$

2. Αν το A είναι το κενό σύνολο, $A = \emptyset$, τότε το A έχει μέτρο 0. Διότι κάθε διάστημα μήκους ε καλύπτει το A.

3. Αν το A είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $A = \{x_1, x_2, \dots\}$, τότε το A έχει μέτρο μηδέν. Διότι, για τυχόν $\varepsilon > 0$, θεωρούμε το διάστημα $I_j = (x_j - \varepsilon/2^{j+1} , x_j + \varepsilon/2^{j+1})$ μήκους $2 \cdot \varepsilon/2^{j+1} = \varepsilon/2^j$. Τότε η ένωση των I_j καλύπτει το A και το συνολικό μήκος τους είναι $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon/2^j = \varepsilon$.

Για παράδειγμα όλοι οι ρητοί, $\mathbb{Q}$, είναι μέτρου μηδέν.

4. Ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$ με $a < b$ <u>δεν</u> είναι μέτρου μηδέν. Έστω ότι το $[a,b]$ καλύπτεται από την ένωση ανοικτών διαστημάτων $I_1, I_2, I_3, \dots$. Επειδή το $[a,b]$

είναι συμπαγές σύνολο υπάρχουν πεπερασμένα από τα διαστήματα αυτά, έστω τα $I_1, I_2, \dots, I_n$, τα οποία καλύπτουν το $[a,b]$. Μα τότε είναι προφανές ότι το συνολικό μήκος των $I_1, \dots, I_n$ πρέπει να υπερβαίνει το $b-a$.

<u>Άσκηση</u>. Αποδείξτε τον τελευταίο ισχυρισμό.

Άρα, αν τα $I_1, I_2, \dots$ καλύπτουν το $[a,b]$ το συνολικό μήκος τους δεν είναι δυνατόν να γίνει μικρότερο της θετικής ποσότητας $b-a$.

Ποιά, όμως, είναι η σημασία της έννοιας του <u>συνόλου μέτρου μηδέν</u>. Υπάρχει μιά σημαντική πρόταση η οποία λέει τα εξής.

<u>Πρόταση</u> (Lebesgue) Μιά συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη είναι R-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνον αν το σύνολο $A=\{x\in[a,b] : f \text{ δεν είναι συνεχής στο } x\}$, δηλ. το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f, είναι μέτρου μηδέν.

Δεν θα αποδείξουμε εδώ αυτήν την πρόταση ούτε και την επόμενη. Γιά λεπτομέρειες μπορεί κανείς να ανατρέξει στο [1] της βιβλιογραφίας.

<u>Πρόταση</u> Έστω R-ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ώστε $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $\int_a^b f(x)dx = 0$

(ii) Το σύνολο $A=\{x\in[a,b] : f(x)>0\}$ έχει μέτρο μηδέν.

Θυμηθείτε ότι κάθε συνάρτηση που είναι κανονικά μηδέν, εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία, έχει R-ολοκλήρωμα μηδέν. Αυτό έρχεται και σαν πόρισμα της προηγούμενης πρότασης διότι σύνολο με πεπερασμένα σημεία είναι μέτρου μηδέν.

<u>Πόρισμα</u> Έστω R-ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $\int_a^b f^2(x) = 0$

(ii) Το σύνολο $A=\{x\in[a,b] : f(x)\neq 0\}$ είναι μέτρου μηδέν.

Προσέξτε! Η πρώτη πρόταση αυτής της σελίδας λέει με άλλα λόγια: "τα σύνολα μέτρου μηδέν είναι τα μεγαλύτερα επιτρεπτά σύνολα στα οποία μία R-ολοκληρώσιμη συνάρτηση f, με $f(x)\geq 0$ για κάθε x, μπορεί να παίρνει γνήσια θετικές τιμές και να έχει ολοκλήρωμα μηδέν : $\int_a^b f = 0$.

Η κατανόηση αυτού του τελευταίου αρκεί για το μάθημα αυτό. Πόσο μεγάλα μπορούν να είναι τα "επιτρεπτά" σύνολα μέτρου μηδέν; Όπως φαίνεται από τα παραδείγματα, πεπερασμένα ή αριθμήσιμα σύνολα είναι μέτρου μηδέν. Ενώ διαστήματα είναι αρκετά "μεγάλα" για να είναι μέτρου μηδέν. Υπάρχουν όμως και υπεραριθμήσιμα σύνολα μέτρου μηδέν: για παράδειγμα το σύνολο του Cantor.

Είναι καιρός να κλείσουμε την παρένθεσή μας και να ξαναγυρίσουμε στον χώρο $\mathcal{L}^2[a,b]$, στον οποίο έχουμε ήδη ορίσει τις πράξεις $f+g$, λf.

Είναι πολύ εύκολο να αποδείξει κανείς ότι οι ιδιότητες $(f+g)+h = f+(g+h)$, $f+g=g+f$, $(\lambda+\mu)f=\lambda f+\mu f$ κλπ ώστε να είναι ο $\mathcal{L}^2[a,b]$ διανυσματικός χώρος.

Ποιο είναι το μηδενικό στοιχείο του $\mathcal{L}^2[a,b]$;

Θα πείτε η "κανονική μηδενική" συνάρτηση. Ίσως έχετε δίκιο αφού, προφανώς, $(f+0)(t)=f(t)+0(t)=f(t)+0=f(t)$, $\forall t$ δηλ. $f+0=f$.

Όμως, για έναν καλό λόγο, ο οποίος θα φανεί σε λίγο, δεν ορίζουμε σαν μηδενικό στοιχείο του $\mathcal{L}^2[a,b]$ την "κανονική μηδενική" συνάρτηση. Αλλά σαν μηδενικό στοιχείο του $\mathcal{L}^2[a,b]$ ορίζουμε κάθε συνάρτηση η οποία έχει τιμή 0 για όλα τα x εκτός από κάποια x τα οποία αποτελούν σύνολο μέτρου μηδέν.

Δηλαδή, η f είναι μηδενικό στοιχείο του $\mathcal{L}^2[a,b]$ αν και μόνον αν (ορισμός) το σύνολο

$$\{x\in[a,b] : f(x)\neq 0\}$$

είναι μέτρου μηδέν.

Γενικά, στον χώρο $\mathcal{L}^2[a,b]$, δύο συναρτήσεις f,g θεωρούνται ίσες αν (ορισμός) το σύνολο

$$\{x\in[a,b] : f(x)\neq g(x)\}$$

είναι μέτρου μηδέν.

Δηλαδή, ταυτίζουμε δύο συναρτήσεις αν παίρνουν τις ίδιες τιμές σε κάθε x εκτός από ένα σύνολο μέτρου μηδέν.

Π.χ. οι συναρτήσεις του διπλανού σχήματος θεωρούνται ίσες διότι ταυτίζονται εκτός από δύο σημεία: x_1, x_2.

Κατόπιν ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{L}^2[a,b]$:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

Θα αποδείξουμε τις ιδιότητες (α)–(δ).

(α) $|f(x)g(x)| \le \frac{1}{2}|f(x)|^2 + \frac{1}{2}|g(x)|^2$. Άρα η συνάρτηση fg είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και το $\langle f,g\rangle$ είναι πραγματικός αριθμός.

(β), (γ) προφανή.

(δ) $\langle f,f\rangle = \int_a^b f^2(x)\,dx \ge 0$ προφανώς!

Μετά από το πόρισμα της σελ. 89 βλέπουμε αμέσως ότι $\langle f,f\rangle = \int_a^b f^2(x)\,dx = 0 \iff f$ είναι το μηδενικό στοιχείο του $\mathcal{L}^2[a,b]$, σύμφωνα με τον ορισμό του μηδενικού στοιχείου που μόλις δώσαμε!

Παρατήρηση: Πρέπει να τονισθεί ότι αν συνεχίζαμε να χρησιμοποιούμε στο μηδενικό στοιχείο του $\mathcal{L}^2[a,b]$ την κανονική μηδενική συνάρτηση 0, τότε το $\langle f,g\rangle$ που ορίσαμε δεν θα ήταν εσωτερικό γινόμενο. Διότι, και μεν $f\equiv 0 \Longrightarrow \langle f,f\rangle = \langle 0,0\rangle = 0$, αλλά το αντίστροφο ($\langle f,f\rangle = 0$ άρα $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0 \Rightarrow f=0$) δεν αληθεύει!

<u>Ορισμός.</u> Σε διαν. χώρο V με εσωτερικό γινόμενο $\langle x,y\rangle$ ορίζουμε $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ για κάθε $x\in V$.

Το $\|x\|$ ονομάζουμε <u>νόρμα</u> ή <u>μέτρο του x</u>.

Αν $V=\mathbb{R}^n$ τότε, για $x=(x_1,\dots,x_n)$, $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}$

Αν $V=\ell^2$ τότε, για $x=(x_1,x_2,\dots)$, $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2\right)^{1/2}$

Αν $V=\mathcal{L}^2[a,b]$ τότε $\|f\| = \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)^{1/2}$

<u>Ανισότητα Cauchy - Schwarz - Bounyakowsky.</u> Έστω V χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$, $\forall x,y\in V$. Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν είτε $x=0$, είτε $y=0$, είτε το ένα διάνυσμα είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

<u>Απόδειξη.</u> Έστω $\lambda\in\mathbb{R}$. Τότε $0\leq \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\langle y,y\rangle = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$. Το δευτεροβάθμιο αυτό τριώνυμο του λ δεν παίρνει αρνητικές τιμές. Άρα, η διακρίνουσά του είναι μη-θετική:

$$4\langle x,y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0 \quad\Longrightarrow\quad |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|.$$

Αν, είτε $x=0$, είτε $y=0$, είτε $x=\lambda y$, τότε εύκολα αποδεικνύεται η ισότητα. Έστω τώρα ότι $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\cdot\|y\|$ και ότι $x\neq 0, y\neq 0$. Τότε η διακρίνουσα του παραπάνω τριωνύμου είναι μηδέν και άρα υπάρχει $\lambda_0\in\mathbb{R}$ ρίζα του τριωνύμου. Άρα $\langle x+\lambda_0 y, x+\lambda_0 y\rangle = 0 \Longrightarrow x+\lambda_0 y = 0$ $\Longrightarrow x = (-\lambda_0)y$. <u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Πρόταση</u> (α) $\|x\|\geq 0$ $\forall x\in V$, $\|x\|=0 \Longleftrightarrow x=0$

(β) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ $\forall x\in V$, $\forall \lambda\in\mathbb{R}$.

(γ) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ $\forall\, x,y \in V$ (Τριγωνική ανισότης).

Η ισότης στο (γ) ισχύει αν και μόνον αν, είτε $x=0$, είτε $y=0$, είτε το ένα διάνυσμα είναι πολλαπλάσιο του άλλου με θετικό αριθμό.

Απόδειξη (α) $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \ge 0$ $\forall x \in V$.

$\|x\| = 0 \iff \langle x,x\rangle = 0 \iff x=0$.

(β) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x,x\rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x,x\rangle} = |\lambda|\, \|x\|$.

(γ) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2$

$= (\|x\| + \|y\|)^2$. Άρα $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Αν ισχύει η ισότης τότε $\langle x,y\rangle = \|x\|\cdot\|y\|$

Άρα, είτε $x=0$, είτε $y=0$ είτε $x=\lambda y$. Τότε

$\langle \lambda y, y\rangle = |\lambda|\, \|y\|\cdot\|y\| \Rightarrow \lambda = |\lambda| \Rightarrow \lambda > 0$.

Ο.Ε.Δ.

Στα παραδείγματά μας η ανισότης C.-S.-B. και η τριγωνική γράφονται ως εξής:

Στον $\mathbb{R}^n$: $\left|\sum_{j=1}^n x_j y_j\right| \le \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right)^{1/2}$,

$\left(\sum_{j=1}^n (x_j+y_j)^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right)^{1/2}$

Στον ℓ^2: $\left|\sum_{j=1}^\infty x_j y_j\right| \le \left(\sum_{j=1}^\infty x_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^\infty y_j^2\right)^{1/2}$,

$\left(\sum_{j=1}^\infty (x_j+y_j)^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{j=1}^\infty x_j^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^\infty y_j^2\right)^{1/2}$

Στον $\mathcal{L}^2[a,b]$: $\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \le \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)^{1/2}$,

$\left(\int_a^b (f(t)+g(t))^2\,dt\right)^{1/2} \le \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)^{1/2}$.

Ορισμός Σε χώρο V με εσωτερικό γινόμενο $\langle x,y\rangle$ ορίζουμε:

$\rho_2(x,y) = \|x-y\|$ $x,y \in V$.

Το $\rho_2(x,y)$ ονομάζουμε απόσταση των x,y.

Πρόταση Η ρ_2 ικανοποιεί τις:

(α) $\rho_2(x,y) \ge 0$, $\forall x,y \in V$, $\rho_2(x,y) = 0 \iff x=y$

(β) $\rho_2(x,y) = \rho_2(y,x)$ $\forall x,y \in V$.

(γ) $\rho_2(x,y) \le \rho_2(x,z) + \rho_2(z,y)$ $\forall x,y,z \in V$ (τριγωνική ανισότης).

<u>Απόδειξη</u> Όλες οι ιδιότητες είναι προφανείς. <u>Ο.Ε.Δ.</u>

Παρατηρούμε ότι η ρ_2 είναι μετρική στον χώρο V. Αυτό μας δίνει το δικαίωμα να ορίζουμε σύγκλιση ακολουθιών στον V.

<u>Ορισμός</u> Αν $\{x_n\}$ είναι ακολουθία στον V και $x \in V$, λέμε ότι η $\{x_n\}$ συγκλίνει στο x, $x_n \longrightarrow x$, αν $\|x_n - x\| =$
$= \rho_2(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Στο παράδειγμα $\mathcal{L}^2[a,b]$: $f_n \longrightarrow f$ σημαίνει
$\int_a^b (f_n(t) - f(t))^2 dt \longrightarrow 0$, $n \to \infty$.

Υπάρχουν διάφορα είδη σύγκλισης μιας ακολουθίας συναρτήσεων σε συνάρτηση. Ένα είδος είναι η <u>κατά σημείον σύγκλιση</u> :
$f_n \to f$ κατά σημείον στο $[a,b]$ αν, για κάθε $t \in [a,b]$,
$f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t)$.

Ένα άλλο είδος είναι η <u>ομοιόμορφη σύγκλιση</u>.
$f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$ αν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει n_0 ώστε : $n \geq n_0 \Longrightarrow \sup_{a \le t \le b} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon$.

Παρατηρούμε ότι, αν ονομάσουμε $\mathcal{L}^\infty[a,b]$ τον χώρο όλων των φραγμένων συναρτήσεων στο διάστημα $[a,b]$ και
$\rho_\infty(f,g) = \sup_{a \le t \le b} |f(t) - g(t)|$, $f, g \in \mathcal{L}^\infty[a,b]$
τότε η ρ_∞ είναι μετρική στον $\mathcal{L}^\infty[a,b]$.

<u>Άσκηση</u> Αποδείξτε τον τελευταίο ισχυρισμό.

Άρα, το $f_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$ διατυπώνεται και σαν $\rho_\infty(f_n, f) \longrightarrow 0$.

Υπάρχει και ένα τρίτο είδος σύγκλισης. Αν θεωρήσουμε τον χώρο $\mathcal{L}^1[a,b]$ όλων των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a,b]$ και ορίσουμε $\rho_1(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$
τότε η ρ_1 είναι μετρική στον $\mathcal{L}^1[a,b]$.

<u>Άσκηση</u> Αποδείξτε ότι η ρ_1 είναι μετρική.

Λέμε, λοιπόν, ότι $f_n \to f$ στον χώρο $L^1[a,b]$ αν $\rho_1(f_n,f) \to 0$, δηλ. αν $\int_a^b |f_n(t)-f(t)|\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Έχουμε ήδη δει και το τέταρτο είδος σύγκλισης:

$f_n \to f$ στον χώρο $L^2[a,b]$, δηλαδή

$$\int_a^b |f_n(t)-f(t)|^2\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Η επόμενη πρόταση περιγράφει σχέσεις ανάμεσα στα τέσσερα είδη σύγκλισης.

<u>Πρόταση</u> $\rho_\infty(f_n,f) \to 0 \Rightarrow f_n \to f$ κατά σημείον.

Αν το $[a,b]$ είναι φραγμένο διάστημα τότε:

$$\rho_\infty(f_n,f) \to 0 \Longrightarrow \rho_2(f_n,f) \to 0 \Longrightarrow \rho_1(f_n,f) \to 0.$$

<u>Απόδειξη</u> Γνωρίζουμε ήδη ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση συνεπάγεται την κατά σημείο σύγκλιση.

Θα αποδείξουμε ότι $\rho_1(f_n,f) \le \sqrt{b-a}\,\rho_2(f_n,f)$ και ότι

$\rho_2(f_n,f) \le \sqrt{b-a}\cdot \rho_\infty(f_n,f)$

και θα έχουμε τελειώσει.

$$\rho_1(f_n,f) = \int_a^b |f_n-f| = \int_a^b |f_n-f|\cdot 1 \le \left(\int_a^b |f_n-f|^2\right)^{1/2}\left(\int_a^b 1^2\right)^{1/2}$$
$$= \sqrt{b-a}\cdot \rho_2(f_n,f)$$

$$\rho_2(f_n,f) = \left(\int_a^b |f_n-f|^2\right)^{1/2} \le \left(\int_a^b \rho_\infty(f_n,f)^2\right)^{1/2} = \sqrt{b-a}\cdot\rho_\infty(f_n,f)$$

<u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Παρατήρηση</u> Μπορούμε να γράψουμε αντιπαραδείγματα για τις αντίστροφες συνεπαγωγές: για το διάστημα $[0,1]$:

Αν $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$

τότε, $f_n \to 0$ κατά σημείον στο $[0,1]$, αλλά

$\rho_1(f_n,0) = \int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \frac{1}{2} \not\to 0$

(άρα, ούτε $\rho_\infty(f_n,0) \to 0$, ούτε $\rho_2(f_n,0) \to 0$)

Αν $f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$

τότε $\rho_1(f_n,0) = \int_0^1 |f_n(x)|\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$, αλλά

$\rho_2(f_n,0) = \int_0^1 f_n^2(x)\,dx = 1 \not\longrightarrow 0$ (άρα αυτέ $\rho_\infty(f_n,0)\not\to 0$)

Αν $f_n(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{n}, & 0\le x\le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \le 1\end{cases}$

τότε $\rho_2(f_n,0) = \int_0^1 f_n^2(x)\,dx = \frac{1}{n^{1/3}} \longrightarrow 0$,

αλλά $\rho_\infty(f_n,0) = \sqrt[3]{n} \longrightarrow \infty$.

Πριν προχωρήσουμε τη πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ότι δεν σκοπεύουμε, στα πλαίσια αυτού του μαθήματος, να αναπτύξουμε πλήρως γνώσεις για τους χώρους με εσωτερικό γινόμενο (κάτι τέτοιο γίνεται σε μαθήματα συναρτησιακής ανάλυσης). Θα γνωρίσουμε μόνον όσα έχουν άμεση σχέση με τις σειρές Fourier και γενικά όσα επιτρέπεται να μάθει κάποιος ο οποίος δεν γνωρίζει την έννοια του μέτρου Lebesgue. Για παράδειγμα δεν θα επεκταθούμε στην έννοια του χώρου Hilbert αφού ο χώρος που μας ενδιαφέρει, ο $\mathcal{L}^2[0,2\pi]$, δεν είναι πλήρης.

Γνωρίζουμε ότι $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\|$ $\forall\, x,y\in V$.

Αν $x\neq 0$, $y\neq 0$ τότε

$$-1 \le \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \le 1,$$

άρα υπάρχει γωνία θ μοναδική ώστε

$$-\pi \le \theta \le \pi \quad \text{και} \quad \cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}.$$

<u>Ορισμός</u> Η γωνία θ ονομάζεται γωνία των x,y. Αν $\langle x,y\rangle = 0$ τότε $\theta = \frac{\pi}{2}$ και τα x,y ονομάζονται <u>ορθογώνια</u> ή <u>κάθετα</u>.

<u>Άσκηση</u> (α) Αποδείξτε το Πυθαγόρειο θεώρημα: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ αν και μόνον αν $\langle x,y\rangle = 0$.

(β) Αν τα $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι ανά δύο κάθετα τότε

$$\|x_1+\dots+x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

<u>Ορισμός</u> Έστω $A\subset V$. Το σύνολο A λέγεται <u>ορθογώνιο</u> αν δεν περιέχει το 0 και οποιαδήποτε δύο στοιχεία του είναι ορθογώνια. Το A λέγεται <u>ορθοκανονικό</u> αν είναι ορθογώνιο και κάθε

στοιχείο του έχει μήκος 1.

Αν ένα $A \subset V$ είναι ορθογώνιο τότε το σύνολο

$$A' = \left\{ \frac{x}{\|x\|} : x \in A \right\}$$

είναι ορθοκανονικό.

<u>Πρόταση</u> Έστω ορθογώνιο υποσύνολο A του V. Το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω $x_1, \dots, x_n \in A$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ και

$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$.

Τότε $0 = \langle \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n , x_1 \rangle = \lambda_1 \langle x_1, x_1 \rangle + \lambda_2 \langle x_2, x_1 \rangle +$

$\dots + \lambda_n \langle x_n, x_1 \rangle = \lambda_1 \|x_1\|^2$.

Επειδή $x_1 \neq 0$, $\lambda_1 = 0$. Ομοίως $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. <u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Παραδείγματα</u> Στον $\mathbb{R}^n$ το $A = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, όπου
$e_j = (0, \dots, 0, \underset{j\text{-θέση}}{1}, 0, \dots, 0)$, είναι ορθοκανονικό σύνολο.

Επίσης το $A' = \{e_1, e_2\}$ είναι ορθοκανονικό στον $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Στον ℓ^2 το $A = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$, όπου
$e_j = (0, 0, \dots, 0, \underset{j\text{-θέση}}{1}, 0, \dots\dots)$ είναι ορθοκανονικό σύνολο.

Στο $\mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ το σύνολο

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

είναι ορθοκανονικό.

<u>Ορισμός</u> Έστω A ορθοκανονικό σύνολο στον V. Το A λέγεται <u>ορθοκανονική βάση</u> αν έχει την εξής ιδιότητα:

για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $x \in V$ υπάρχει y, το οποίο είναι γραμμ. συνδυασμός στοιχείων του A, ώστε

$$\|x - y\| < \varepsilon.$$

<u>Παραδείγματα</u> 1. Αν ο διαν. χώρος V έχει πεπερασμένη διάσταση n, π.χ. ο $\mathbb{R}^n$, και το ορθοκανονικό σύνολο A έχει n ακριβώς

στοιχεία $e_1, e_2, \ldots, e_n$ τότε, επειδή το A είναι γραμμ. ανεξάρτητο, θα παράγει τον V. Άρα, δοθέντος $\varepsilon > 0$ και $x \in V$, υπάρχει γραμμ. συνδυασμός $y = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$ που ταυτίζεται με το x.
Δηλαδή $\|x - y\| = 0 < \varepsilon$.

Άρα το A είναι αντιστοίχως ορθοκανονική βάση.

2. Στον ℓ^2 το $A = \{e_1, e_2, \ldots\}$, όπου

$e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (↑ j-θέση), είναι ορθοκανονική βάση.

Πράγματι, έστω $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2$. Τότε
$\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < +\infty$.

Άρα, για τυχόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει N ώστε $\sum_{j=N+1}^{\infty} x_j^2 < \varepsilon^2$.

Διαλέγουμε τότε $y = x_1 e_1 + \ldots + x_N e_N = (x_1, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots)$
και έχουμε: $\|x - y\| = \|(0, \ldots, 0, x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots)\| =$

$$= \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} x_j^2\right)^{1/2} < \varepsilon .$$

3. Στον $\mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ το σύνολο A των τριγωνομετρικών σειράς είναι ορθοκανονική βάση αλλά αυτό θα αποδειχθεί προς το τέλος του κεφαλαίου!

<u>Ορισμός</u> Έστω ορθοκανονικό σύνολο A του V. Αν $x \in V$ και $e \in A$ το $\langle x, e \rangle$ ονομάζεται <u>συντελεστής Fourier του x ως προς το στοιχείο e</u> του A.

Στον $\mathbb{R}^n$ με $A = \{e_1, \ldots, e_n\}$ και $x = (x_1, \ldots, x_n)$ παίρνουμε $\langle x, e_j \rangle = x_j$. Στον ℓ^2 με $A = \{e_1, e_2, \ldots\}$ και $x = (x_1, x_2, \ldots)$ παίρνουμε $\langle x, e_j \rangle = x_j$. Δηλαδή, στους $\mathbb{R}^n$ και ℓ^2 οι συντελεστές Fourier ενός στοιχείου ως προς την "συνήθη" ορθοκανονική βάση ταυτίζονται με τις συντεταγμένες του στοιχείου αυτού.

Στον $\mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ με $A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots \right\}$
και $f \in \mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ παίρνουμε

$$\left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \pi a_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a_0 ,$$

$$\left\langle f, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \pi a_n = \sqrt{\pi}\, a_n ,$$

$$<f, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}> = \int_0^{\pi} f(x)\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\pi b_n = \sqrt{\pi}\, b_n$$

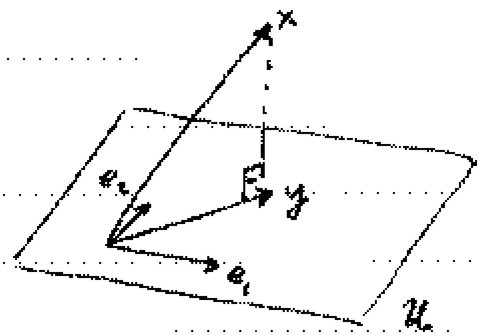
Δηλαδή, οι συντελεστές Fourier ως προς το ορθοκανονικό σύνολο A ταυτίζονται με τους ήδη γνωστούς συντελεστές Fourier της συνάρτησης f (εκτός από μιά πολλαπλασιαστική σταθερά).

Ο όρος "συντελεστής Fourier" που χρησιμοποιείται γενικά σε χώρους με εσωτερικό γινόμενο είναι δανεισμένος από την θεωρία των σειρών Fourier!

Η επόμενη πρόταση περιγράφει μιά πολύ σημαντική "ακραία" ιδιότητα των συντελεστών Fourier.

<u>Πρόταση</u> Έστω $A=\{e_1,\dots,e_n\}$ ορθοκανονικό σύνολο του V. Έστω $x\in V$, τότε. Ο γραμμ. συνδυασμός $y=\sum_{j=1}^{n} <x,e_j> e_j$ είναι ο μόνος από όλους τους $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j$ ο οποίος ελαχιστοποιεί την απόσταση $\|x-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j\|$.

<u>Παρατήρηση</u> Εύκολα βλέπουμε ότι το $y=\sum_{j=1}^{n}<x,e_j>e_j$ είναι η ορθογώνια προβολή του x πάνω στον υπόχωρο $\mathcal{U}$ ο οποίος παράγεται από τα $e_1,\dots,e_n$:



$$\mathcal{U}=\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j \ : \ \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}\}$$

Δηλαδή το $x-y$ είναι κάθετο σε κάθε στοιχείο του $\mathcal{U}$.

Διότι: $<y,e_k> = \sum_{j=1}^{n} <x,e_j><e_j,e_k> = <x,e_k>$. Άρα

$<x-y,e_k> = 0 \quad \forall\ k=1,2,\dots,n$. Άρα

$<x-y, \sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k> = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k <x-y,e_k> = 0$.

Η πρόταση μας λέει, λοιπόν, ότι από όλα τα στοιχεία του $\mathcal{U}$ το μοναδικό που απέχει την μικρότερη δυνατή απόσταση από το x είναι ακριβώς η ορθογώνια προβολή του x στον $\mathcal{U}$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$. Τότε

$$\|x-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j\|^2 = \|(x-\sum_{j=1}^{n}<x,e_j>e_j) + \sum_{j=1}^{n}(<x,e_j>-\lambda_j)\,e_j\|^2$$

Το $x-y$ είναι ορθογώνιο με την υπόθεσή μας, κάθετο σε κάθε στοιχείο του M, άρα κάθετο και στο $\sum_{j=1}^{n}(\langle x,e_j\rangle-\lambda_j)e_j$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα :

$$\|x-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j\|^2 = \|x-\sum_{j=1}^{n}\langle x,e_j\rangle e_j\|^2+\|\sum_{j=1}^{n}(\langle x,e_j\rangle-\lambda_j)e_j\|^2$$
$$\geq \|x-\sum_{j=1}^{n}\langle x,e_j\rangle e_j\|^2$$

Η ισότητα ισχύει μόνον όταν $\sum_{j=1}^{n}(\langle x,e_j\rangle-\lambda_j)e_j=0$,

δηλαδή $\lambda_j=\langle x,e_j\rangle \quad \forall\ j=1,\dots,n$. <u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Πρόταση</u> (<u>Ανισότητα Bessel</u>) Έστω ορθοκανονικό σύνολο A του V: $A=\{e_1,e_2,e_3,\dots\}$. Τότε για κάθε $x\in V$

$$\|x\|^2 \geq \sum_{j=1}^{\infty}\langle x,e_j\rangle^2$$

(Αν το A είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε, προφανώς, η σειρά γίνεται πεπερασμένο άθροισμα).

<u>Απόδειξη</u> Έστω $n\in\mathbb{N}$ και $y=\sum_{j=1}^{n}\langle x,e_j\rangle e_j$. Από την προηγούμενη πρόταση $\langle x-y,y\rangle=0$. Άρα

$$\|x\|^2=\|x-y+y\|^2=\|x-y\|^2+\|y\|^2\geq\|y\|^2=\sum_{j=1}^{n}\langle x,e_j\rangle^2.$$

Άρα, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ $\sum_{j=1}^{n}\langle x,e_j\rangle^2\leq\|x\|^2$.

Άρα $\sum_{j=1}^{\infty}\langle x,e_j\rangle^2\leq\|x\|^2$. <u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Πρόταση</u> (<u>Ισότητα Parseval</u>) Έστω ορθοκανονικό σύνολο A του V, $A=\{e_1,e_2,\dots\}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

(α) το A είναι ορθοκανονική βάση του V

(β) $\|x\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\langle x,e_j\rangle^2$ για κάθε $x\in V$.

<u>Απόδειξη</u> (α) $\Rightarrow$ (β). Έστω $x\in V$ και $\varepsilon>0$. Υπάρχει γραμμ. συνδυασμός $\sum_{j=1}^{N}\lambda_j e_j$ ώστε $\|x-\sum_{j=1}^{N}\lambda_j e_j\|<\varepsilon$

Η πρόταση της προηγούμενης σελίδας συνεπάγεται ότι

$$\|x-\sum_{j=1}^{N}\langle x,e_j\rangle e_j\|<\varepsilon$$

Άρα $\|x\|^2=\|(x-\sum_{j=1}^{N}\langle x,e_j\rangle e_j)+\sum_{j=1}^{N}\langle x,e_j\rangle e_j\|^2=$

$$=\|x-\sum_{j=1}^{N}\langle x,e_j\rangle e_j\|^2+\sum_{j=1}^{N}\langle x,e_j\rangle^2$$
$$<\varepsilon^2+\sum_{j=1}^{N}\langle x,e_j\rangle^2$$

Δηλαδή, αν $n \ge N$:

$$\|x\|^2-\varepsilon^2 < \sum_{j=1}^{N} \langle x,e_j\rangle^2 \le \sum_{j=1}^{n} \langle x,e_j\rangle^2 \le \|x\|^2$$

Άρα $\sum_{j=1}^{n} \langle x,e_j\rangle^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|^2$.

(β) $\Rightarrow$ (α). Έστω $x\in V$ και $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει N ώστε

$\|x\|^2-\varepsilon^2 < \sum_{j=1}^{N}\langle x,e_j\rangle^2$. Άρα $\|x-\sum_{j=1}^{N}\langle x,e_j\rangle e_j\|^2 =$

$= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{N}\langle x,e_j\rangle^2 \le \varepsilon^2$

Δηλαδή υπάρχει γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του A σε απόσταση από το x μικρότερη από ε. Ο.Ε.Δ.

Η ισότητα Parseval στον $\mathbb{R}^n$ και στον ℓ^2 με τις "συνήθεις" ορθοκανονικές βάσεις λέει ότι $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$, $x=(x_1,\dots,x_n)$ και $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2$, $x=(x_1,x_2,\dots)$. Και τα δύο αυτά είναι προφανή.

Στον $L^2[0,2\pi]$ η ισότητα Parseval, μετά από τους υπολογισμούς στο τέλος της σελ. 98, γίνεται:

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}a_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \\ \text{για κάθε } \displaystyle f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx).\end{array}}$$

Η τελευταία πρόταση λέει ότι για να ισχύει κάτι τέτοιο πρέπει και αρκεί το σύνολο των ημιτόνων και συνημιτόνων να αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2[0,2\pi]$.

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε την ισότητα Parseval στον $L^2[0,2\pi]$.

<u>Λήμμα 1.</u> Έστω $f\in L^2[a,b]$ και $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει κλιμακωτή συνάρτηση s στο $[a,b]$ ώστε $\int_a^b |f-s|^2 < \varepsilon$.

<u>Απόδειξη</u> <u>Περίπτωση 1.</u> Η f είναι R-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$: $|f(x)|\le M$ $\forall x\in[a,b]$.

Γνωρίζουμε ότι υπάρχει κλιμακωτή συνάρτηση s ώστε

$\int_a^b |f-s| < \varepsilon/2M$ και $|s(x)|\le M$ $\forall x\in[a,b]$.

Τότε όμως $\int_a^b |f-s|^2 \le \int_a^b (|f|+|s|)\,|f-s| \le 2M\cdot\int_a^b |f-s| < \varepsilon$.

<u>Περίπτωση 2</u> Γενική περίπτωση. Τότε υπάρχουν

$x_0=a<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=b$ ώστε σε κάθε διάστημα $[x_k,x_{k+1}]$ να υπάρχουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f|$ και $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f^2$. Επειδή $\lim_{\delta\to 0+}\int_{x_k+\delta}^{x_{k+1}-\delta} f^2=\int_{x_k}^{x_{k+1}} f^2$, διαλέγουμε $\delta>0$, ώστε

$$\int_{x_k}^{x_k+\delta} f^2+\int_{x_{k+1}-\delta}^{x_{k+1}} f^2<\varepsilon/2n$$

Στο $[x_k+\delta, x_{k+1}-\delta]$ η f είναι R-ολοκληρώσιμη. Άρα, σύμφωνα με την πρόταση 1, υπάρχει κλιμακωτή s στο $[x_k+\delta, x_{k+1}-\delta]$ ώστε $\int_{x_k+\delta}^{x_{k+1}-\delta}|f-s|^2<\varepsilon/2n$

Επεκτείνουμε την s σε ολόκληρο το $[x_k,x_{k+1}]$ ώστε να είναι ταυτοτικά μηδέν στα $[x_k,x_k+\delta)$ $(x_{k+1}-\delta,x_{k+1}]$.

Τότε $\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f-s|^2=\int_{x_k+\delta}^{x_{k+1}-\delta}|f-s|^2+\int_{x_k}^{x_k+\delta} f^2+\int_{x_{k+1}-\delta}^{x_{k+1}} f^2<\frac{\varepsilon}{2n}+\frac{\varepsilon}{2n}=\frac{\varepsilon}{n}$.

Φτιάχνουμε έτσι την s σε όλα τα $[x_k,x_{k+1}]$. Άρα $\int_a^b|f-s|^2=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f-s|^2<n\cdot\frac{\varepsilon}{n}=\varepsilon$. <u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Λήμμα 2</u> Έστω $f\in\mathcal{L}^2[a,b]$ και $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση g στο $[a,b]$ ώστε $\int_a^b|f-g|^2<\varepsilon$.

<u>Απόδειξη</u> Βρίσκουμε κλιμακωτή s ώστε $\int_a^b|f-s|^2<\varepsilon/4$. Κατόπιν με τρόπο ακριβώς ίδιο όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 2 της σελίδας 3 βρίσκουμε συνεχή συνάρτηση g ώστε $\int_a^b|s-g|^2<\varepsilon/4$.

Τότε $\left(\int_a^b|f-g|^2\right)^{1/2}\le\left(\int_a^b|f-s|^2\right)^{1/2}+\left(\int_a^b|s-g|^2\right)^{1/2}<$
$<\sqrt{\frac{\varepsilon}{4}}+\sqrt{\frac{\varepsilon}{4}}=\sqrt{\varepsilon}$. Άρα $\int_a^b|f-g|^2<\varepsilon$ <u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Παρατήρηση</u> Μπορούμε να πετύχουμε ώστε η g να παίρνει την ίδια τιμή στα a,b π.χ. $g(a)=g(b)=0$.

<u>Θεώρημα</u> Το σύνολο των ημιτόνων και συνημιτόνων αποτελεί ορθοκανονική βάση του $\mathcal{L}^2[0,2\pi]$. Άρα ισχύει η σχέση Parseval για κάθε $f\in\mathcal{L}^2[0,2\pi]$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $f\in\mathcal{L}^2[0,2\pi]$ και $\varepsilon>0$. Πρέπει να αποδείξουμε

ότι υπάρχει γραμμ. συνδυασμός ημιτόνων και συνημιτόνων, δηλαδή τριγων. πολυώνυμο $T(x)$ ώστε $\int_0^{2\pi}|f-T|^2<\varepsilon$.

Από το Λήμμα 2, υπάρχει συνεχής g ώστε $\int_0^{2\pi}|f-g|^2<\varepsilon/4$. Σύμφωνα με την παρατήρηση μπορούμε να πετύχουμε $g(0)=g(2\pi)=0$. Άρα μπορούμε να επεκτείνουμε την g σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$ ώστε να είναι συνεχής 2π-περιοδική.

Τότε το Θεώρημα του Weierstrass, σελ. 82, δίνει τριγωνομετρικό πολυώνυμο $T(x)$ ώστε $|g(x)-T(x)|\le\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{2\pi}}$ $\forall x\in[0,2\pi]$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}|g-T|^2\le\frac{\varepsilon}{4}.$$

Άρα $\left(\int_0^{2\pi}|f-T|^2\right)^{1/2}\le\left(\int_0^{2\pi}|f-g|^2\right)^{1/2}+\left(\int_0^{2\pi}|g-T|^2\right)^{1/2}<\sqrt{\frac{\varepsilon}{4}}+\sqrt{\frac{\varepsilon}{4}}=\sqrt{\varepsilon}$.

<u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Εφαρμογή.</u> $\frac{\pi-x}{2}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$ στο $[0,2\pi)$

Η $\frac{\pi-x}{2}$ είναι R-ολοκληρώσιμη. Άρα ανήκει στον $\mathcal{L}^2[0,2\pi]$.

Τότε $\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2dx=\frac{\pi^3}{6}$.

Άρα $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

<u>Πόρισμα.</u> Αν $f\in\mathcal{L}^2[0,2\pi]$ και $f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ τότε $\int_0^{2\pi}(f-s_n)^2\longrightarrow 0$, όπου $s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$.

<u>Απόδειξη.</u> $f-s_n\sim\sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$. Άρα

$$\int_0^{2\pi}|f-s_n|^2=\pi\sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

<u>Ο.Ε.Δ.</u>

<u>Πρόταση.</u> Σε χώρο V με εσωτερικό γινόμενο και με ορθοκανονικό σύνολο $A=\{e_1,e_2,\dots\}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) $\|x\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\langle x,e_j\rangle^2$, $\forall x\in V$

(β) $\langle x,y\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}\langle x,e_j\rangle\langle y,e_j\rangle$, $\forall x,y\in V$.

<u>Απόδειξη.</u> Το (β) με $x=y$ δίνει το (α).

Αντιστρόφως: $2\langle x,y\rangle=\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2=$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\langle x+y,e_j\rangle^2-\sum_{j=1}^{\infty}\langle x,e_j\rangle^2-\sum_{j=1}^{\infty}\langle y,e_j\rangle^2=$$

$$=2\sum_{j=1}^{\infty}\langle x,e_j\rangle\langle y,e_j\rangle.$$

<u>Ο.Ε.Δ.</u>

Άρα για κάθε $f, g \in \mathcal{L}^2[0, 2\pi]$:

αν $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ και

$g \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n' \cos nx + b_n' \sin nx)$

τότε

$$\int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx = \frac{\pi}{2} a_0 a_0' + \pi \sum_{n=1}^{\infty}(a_n a_n' + b_n b_n').$$

<u>Άσκηση</u> Υπολογίστε τις παρακάτω σειρές εφαρμόζοντας την ισότητα Parseval σε ορισμένες από τις σειρές Fourier του είπαμε.

(α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, (β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6}$, (γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2+1)^2}$, (δ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^4}$.

<u>Άσκηση</u> Είναι δυνατόν η τριγ. σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\log n}$ να είναι η σειρά Fourier μιας συνάρτησης f η οποία ανήκει στον $\mathcal{L}^2[0, 2\pi]$;

<u>Άσκηση</u> Είναι προφανές ότι κάθε συνάρτηση στο $(0, \pi)$ μπορεί να επεκταθεί στο $(-\pi, 0)$ ώστε να είναι είτε άρτια είτε περιττή. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2x, \ldots\}$ καθώς και οι $\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2x, \ldots\}$ αποτελούν δύο ορθοκανονικές βάσεις του χώρου $\mathcal{L}^2[0, \pi]$.

ΜΕΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

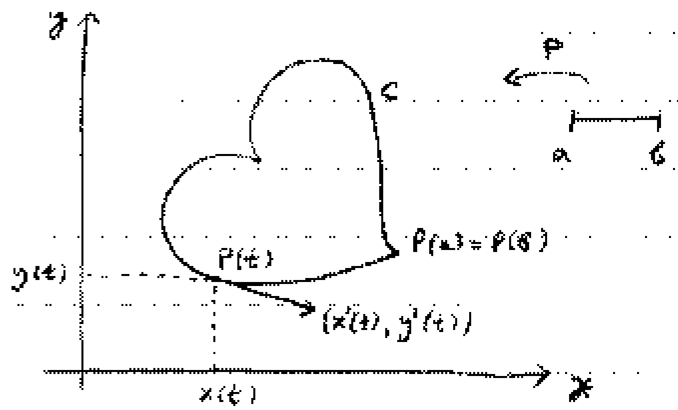
Α. Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα στο επίπεδο.

Μια συνεχής συνάρτηση $P : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ορίζει μιαν καμπύλη στο επίπεδο. Αν $P(t) = (x(t), y(t))$ τότε οι συντεταγμένες x, y είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις.

Μια καμπύλη ονομάζεται κλειστή αν $P(a) = P(b)$.

Και μια κλειστή καμπύλη ονομάζεται απλή αν : $t \neq t' \Rightarrow P(t) \neq P(t')$, εκτός αν $t = a$, $t' = b$.

Αν οι x, y είναι παραγωγίσιμες στο t τότε η καμπύλη έχει εφαπτόμενη στο $P(t)$ της οποίας η κατεύθυνση ορίζεται από το διάνυσμα $(x'(t), y'(t))$, αρκεί βέβαια το διάνυσμα αυτό να μην είναι το μηδενικό.



Μια καμπύλη ονομάζεται κατά τμήματα λεία αν υπάρχουν $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ ώστε σε κάθε διάστημα (t_k, t_{k+1}) οι x, y είναι παραγωγίσιμες, οι παράγωγοί τους x', y' είναι συνεχείς και υπάρχουν πλευρικές παράγωγοι στα t_k. Επιπλέον, για κάθε t αρκεί $(x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$. Αν $t = t_k$ πρέπει

$$(x'(t_k+), y'(t_k+)) \neq (0,0) \text{ και } (x'(t_k-), y'(t_k-)) \neq (0,0).$$

Άρα σε κάθε (t_k, t_{k+1}) η καμπύλη έχει εφαπτόμενο διάνυσμα το οποίο μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο ως προς το t. Στα σημεία t_k η καμπύλη έχει δύο εφαπτόμενες, δηλαδή σχηματίζει γωνία.

Εδώ θα μας απασχολήσουν καμπύλες οι οποίες είναι απλές, κλειστές και κατά τμήματα λείες.

Κάθε τέτοια καμπύλη έχει μήκος $L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$

και περικλείει εμβαδόν $E = -\int_a^b x'(t)\, y(t)\, dt$.

<u>Θεώρημα</u> Αν $P(t) = (x(t), y(t))$ είναι μιά απλή, κλειστή, κατά τμήματα λεία καμπύλη τότε

$$E \le \frac{1}{4\pi} L^2 \qquad \text{(ισοπεριμετρική ανισότης.)}$$

Η ισότης ισχύει αν και μόνον αν η καμπύλη είναι κύκλος.

<u>Παρατήρηση</u> Με άλλα λόγια, από όλες τις απλές, κλειστές, κατά τμήματα λείες καμπύλες οι οποίες έχουν έχουν δεδομένο μήκος L εκείνη η οποία περικλείει το μέγιστο εμβαδόν είναι μοναδικά ο κύκλος.

<u>Απόδειξη</u> Κατ' αρχήν θα κάνουμε μιαν αλλαγή μεταβλητής. Έστω $s(t)$ το μήκος του κομματιού της καμπύλης που αντιστοιχεί στο t-διάστημα $[a,t]$. Δηλαδή

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \quad , \quad a \le t \le b.$$

Η s είναι συνεχής συνάρτηση του t και μάλιστα γνησίως αύξουσα. Διότι, αν $t_1 < t_2$ τότε $P(t_1) \ne P(t_2)$ και επομένως διαγράφεται γνησίως θετικό μήκος από το $P(t_1)$ στο $P(t_2)$.

Άρα η s απεικονίζει το $[a,b]$ στο $[0,L]$ με αμφιμονοσήμαντο τρόπο. Άρα η $s = s(t)$ έχει αντίστροφη συνάρτηση $t = t(s)$, επίσης συνεχή και γνησίως αύξουσα. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε τις x, y σαν συναρτήσεις του s στο διάστημα $[0, L]$.
Οι x, y είναι συνεχείς συναρτήσεις του s.

Από τον τύπο του $s(t)$ έχουμε

$$\frac{ds}{dt} = s'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \quad , \quad t \ne t_k$$

Στα σημεία t_k η s έχει πλευρικές παραγώγους:

$$s'(t_k+) = \sqrt{(x'(t_k+))^2 + (y'(t_k+))^2} \quad , \quad s'(t_k-) = \sqrt{(x'(t_k-))^2 + (y'(t_k-))^2}$$

Άρα

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \quad , \quad t \ne t_k$$

με αντίστοιχους πλευρικούς τύπους στα σημεία t_k.

Επομένως

$$x'(s) = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$$

και $\quad y'(s) = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}$

με ανάλογους τύπους στα σημεία t_k.

Παρατηρείστε ότι $\quad (x'(s))^2+(y'(s))^2 \equiv 1$. Αυτό σημαίνει ότι αν μιά καμπύλη παραμετρικοποιηθεί ως προς το μήκος της τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα (ή τα εφαπτόμενα διανύσματα στις γωνίες) έχει μήκος 1.

Θα κάνουμε ακόμη μία (τελείως στοιχειώδη) αλλαγή μεταβλητής μόνο και μόνο γιά να μεταφέρουμε το διάστημα $[0,L]$ στο $[0,2\pi]$ ώστε να χρησιμοποιήσουμε σειρές Fourier.

Θέτουμε $\quad \theta = \frac{2\pi}{L}\cdot s \quad , \quad s = \frac{L}{2\pi}\cdot\theta$

Η μεταβλητή θ διατρέχει το $[0,2\pi]$ και

$$x'(\theta) = x'(s)\,\frac{ds}{d\theta} = \frac{L}{2\pi}\,x'(s)$$

$$y'(\theta) = y'(s)\,\frac{ds}{d\theta} = \frac{L}{2\pi}\,y'(s)$$

$$(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2 \equiv \frac{L^2}{4\pi^2}$$

Τώρα :

$$L^2 = 2\pi\int_0^{2\pi}\left\{(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2\right\}d\theta$$

καί, με αλλαγή μεταβλητής :

$$E = -\int_a^b x'(t)\,y(t)\,dt = -\int_0^L x'(s)\,\frac{ds}{dt}\,y(s)\,dt = -\int_0^L x'(s)\,y(s)\,ds$$

$$= -\int_0^{2\pi} x'(\theta)\,y(\theta)\,d\theta .$$

Οι συναρτήσεις $x(\theta), y(\theta)$ είναι συνεχείς, άρα έχουν σειρές Fourier:

$$x(\theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta)$$

$$y(\theta) \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k'\cos k\theta + b_k'\sin k\theta)$$

Επειδή οι $x(\theta), y(\theta)$ είναι κατά τμήματα ομαλές οι σειρές Fourier τους συγκλίνουν γιά κάθε θ στις $x(\theta), y(\theta)$ αντίστοιχα :

$$x(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta)$$

$$y(\theta) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k'\cos k\theta + b_k'\sin k\theta)$$

Επιπλέον οι σειρές Fourier των παραγώγων είναι

$$x'(\theta) \sim \sum_{k=1}^{\infty}(kb_k\cos k\theta - ka_k\sin k\theta)$$

$$y'(\theta) \sim \sum_{k=1}^{\infty}(kb_k'\cos k\theta - ka_k'\sin k\theta) .$$

Οι x, y είναι συνεχείς και οι x', y' είναι κατά τμήματα συνεχείς.

Άρα $x, y, x', y' \in \mathcal{L}^2[0, 2\pi]$. Από την ισότητα Parseval:

$$\int_0^{2\pi} (x'(\theta))^2 \, d\theta = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2)$$

$$\int_0^{2\pi} (y'(\theta))^2 \, d\theta = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k'^2 + b_k'^2).$$

Δηλαδή $\quad L^2 = 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2 + a_k'^2 + b_k'^2) \quad \ldots \quad (*)$

Ακόμη:

$$E = -\int_0^{2\pi} x'(\theta) y(\theta) \, d\theta = -\pi \sum_{k=1}^{\infty} k(-a_k b_k' + a_k' b_k) \quad \ldots (**)$$

Από τις $(*)$, $(**)$ η $E \leq \frac{1}{4\pi} L^2$ γίνεται

$$0 \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} k(-a_k b_k' + a_k' b_k) + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2 + a_k'^2 + b_k'^2)$$

Ισοδύναμα:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left\{ (a_k - b_k')^2 + (a_k' + b_k)^2 \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - k)(a_k^2 + b_k^2 + a_k'^2 + b_k'^2)$$

Η ανισότητα αυτή είναι πράγματι αληθής: κάθε όρος είναι μη-αρνητικός.

Για να ισχύει η ισότητα πρέπει όλοι οι όροι να είναι 0. Άρα

$$k \geq 2 \implies a_k = b_k = a_k' = b_k' = 0$$

$$k \geq 1 \implies a_k = b_k', \quad a_k' = -b_k.$$

Άρα: $\quad x(\theta) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta$

$\qquad\quad y(\theta) = \frac{a_0'}{2} - b_1 \cos\theta + a_1 \sin\theta$

Άρα η καμπύλη είναι κύκλος κέντρου $\left(\frac{a_0}{2}, \frac{a_0'}{2}\right)$ και ακτίνας $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$.

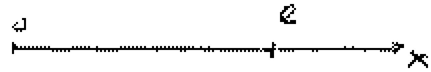
Ο.Ε.Δ.

<u>Άσκηση</u> Αν f συνεχής και περιοδική με περίοδο 2π και η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$, τότε αποδείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} (f'(t))^2 \geq \int_0^{2\pi} (f(t))^2 \, dt.$$

Αποδείξτε ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν η $f(x)$ έχει την μορφή: $a\cos x + b\sin x$, $a, b \in \mathbb{R}$.

B. Μονοδιάστατη εξίσωση θερμότητας.



Θεωρούμε ράβδο μήκους ℓ. Υποθέτουμε ότι στην χρονική στιγμή $t=0$ το κάθε σημείο x, $0\le x\le \ell$, έχει θερμοκρασία $f(x)$. Παρατηρούμε ότι με την πάροδο του χρόνου η θερμότητα διαχέεται από τα σημεία με υψηλότερη θερμοκρασία προς τα σημεία με χαμηλότερη θερμοκρασία. Έστω, λοιπόν, $u(x,t)$ η τιμή της θερμοκρασίας στο σημείο x κατά την χρονική στιγμή t, $t\ge 0$.

Προφανώς $u(x,0)=f(x)$, $0\le x\le \ell$

Ισχύει (και δεν θα ασχοληθούμε με το γιατί) ότι

$$u_t(x,t)=k\cdot u_{xx}(x,t),\quad 0<x<\ell,\ t>0$$

όπου k είναι μια σταθερά, η οποία εξαρτάται από το υλικό της ράβδου και τις μονάδες μέτρησης των διαφόρων μεγεθών. Η εξίσωση αυτή λέγεται <u>εξίσωση θερμότητας</u>.

Συνήθως υπάρχουν και κάποιες συνθήκες (συνοριακές συνθήκες) σχετικά με τα άκρα της ράβδου. Μπορεί τα άκρα της ράβδου να διατηρούνται (τεχνητά) σε μια σταθερή θερμοκρασία σε κάθε χρονική στιγμή:

$$u(0,t)=u(\ell,t)=u_0,\quad \forall\, t>0$$

Ή μπορεί τα άκρα να είναι θερμομονωμένα, δηλαδή η ροή θερμοκρασίας από τα άκρα να είναι μηδέν:

$$u_x(0,t)=u_x(\ell,t)=0,\quad \forall\, t>0$$

Εδώ θα λύσουμε δύο προβλήματα:

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases} u_t(x,t)=k\cdot u_{xx}(x,t), & 0<x<\ell,\ t>0 \quad \text{(εξίσωση θερμότητας)}\\ u(x,0)=f(x) & \text{(αρχική συνθήκη)}\\ u(0,t)=u(\ell,t)=0, & t>0 \quad \text{(συνοριακές συνθήκες Dirichlet)}\end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\ \begin{cases} u_t(x,t)=k\cdot u_{xx}(x,t), & 0<x<\ell,\ t>0 \quad \text{(εξίσωση θερμότητας)}\\ u(x,0)=f(x) & \text{(αρχική συνθήκη)}\\ u_x(0,t)=u_x(\ell,t)=0, & t>0 \quad \text{(συνοριακές συνθήκες Neumann)}\end{cases}$$

(I): Υποθέτουμε ότι η $u(x,t)$ έχει την μορφή

$u(x,t) = X(x)\,T(t)$ (μέθοδος διαχωρισμού μεταβλητών)

Η διαφορική εξίσωση γίνεται τότε: $X(x)\,T'(t) = k\cdot X''(x)\,T(t)$

Υποθέτουμε ότι $u(x,t) \not\equiv 0$. Άρα υπάρχει (x_0,t_0) ώστε

$X(x_0)\,T(t_0) \neq 0$, δηλαδή $X(x_0)\neq 0$, $T(t_0)\neq 0$.

Άρα $T'(t) = k\,\dfrac{X''(x_0)}{X(x_0)}\,T(t)$, $t>0$. Αν θέσουμε $A = \dfrac{X''(x_0)}{X(x_0)}$

τότε $T'(t) = kA\cdot T(t)$, $t>0$, δηλαδή

$T(t) = c_0\, e^{kAt}$, $t>0$.

Ανάλογα $X''(x) = \dfrac{1}{k}\,\dfrac{T'(t_0)}{T(t_0)}\,X(x)$, $0<x<\ell$

$X''(x) = A\,X(x)$, $0<x<\ell$.

Αν $A>0$ τότε $X(x) = c_1 e^{\sqrt{A}x} + c_2 e^{-\sqrt{A}x}$

Τότε οι συνοριακές συνθήκες δίνουν

$$\left.\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2 \\ 0 &= c_1 e^{\sqrt{A}\ell} + c_2 e^{-\sqrt{A}\ell} \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

δηλαδή $X(x)\equiv 0$. Άτοπο.

Αν $A=0$ τότε $X(x) = c_1 + c_2 x$. Οι συνοριακές συνθήκες δίνουν

$$\left.\begin{aligned} 0 &= c_1 \\ 0 &= c_1 + c_2\ell \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

Πάλι άτοπο.

Αν $A<0$ τότε $X(x) = c_1\cos(\sqrt{-A}\cdot x) + c_2\sin(\sqrt{-A}\cdot x)$

Οπότε $0 = c_1$

$0 = c_1\cos(\sqrt{-A}\cdot\ell) + c_2\sin(\sqrt{-A}\cdot\ell)$

δηλαδή, $c_1 = 0$, $c_2\neq 0$, $\sqrt{-A}\cdot\ell = n\pi$, $n\in\mathbb{N}$.

Άρα $X(x) = c_2\sin\left(n\dfrac{\pi}{\ell}x\right)$, $A = -\dfrac{n^2\pi^2}{\ell^2}$

Επομένως η

$$u_n(x,t) = e^{-\frac{k n^2\pi^2}{\ell^2}t}\sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right), \quad n\in\mathbb{N}$$

είναι λύση της εξίσωσης θερμότητας η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet.

Επομένως ξέρουμε ότι οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός τέτοιων λύσεων είναι επίσης λύση

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{-\frac{k n^2\pi^2}{\ell^2}t} \sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right)$$

Θα πρέπει να μην ξεχνάμε ότι πρέπει να ικανοποιείται και η αρχική συνθήκη:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right), \quad 0<x<\ell$$

Δηλαδή το πρόβλημα ανάγεται στο εξής: "Δοθείσης μιας συνάρτησης $f(x)$ στο $[0,\ell]$ είναι δυνατόν να βρεθούν $N \in \mathbb{N}$ και αριθμοί $c_1, c_2, \ldots, c_N$ ώστε $f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right)$, $0<x<\ell$;"

Το ερώτημα αυτό έχει προφανώς αρνητική απάντηση, διότι δεν είναι όλες οι συναρτήσεις τριγωνομετρικά πολυώνυμα!

Στο εξής υποθέτουμε ότι η αρχική κατανομή θερμοκρασίας $f(x)$ είναι <u>συνεχής</u>, ότι $f(0)=f(\ell)=0$ (ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες Dirichlet) και ότι είναι <u>κατά τμήματα ομαλή</u>, δηλαδή ότι υπάρχουν $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \ell$ ώστε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε (x_k, x_{k+1}) και υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι σε κάθε x_k.

Κάνουμε τώρα αλλαγή μεταβλητής $t = \frac{\pi}{\ell}x$. Το t διατρέχει το διάστημα $[0,\pi]$. Αν επιπλέον θεωρήσουμε την f σαν συνάρτηση του t, $f(t)$, τότε αυτή είναι ορισμένη στο $[0,\pi]$, συνεχής στο $[0,\pi]$, $f(0)=f(\pi)=0$, και κατά τμήματα ομαλή στο $[0,\pi]$. Από το πόρισμα του θεωρήματος Dini έχουμε ότι η σειρά Fourier της $f(t)$ συγκλίνει, για κάθε t, στην $f(t)$. Αλλά, για να έχουμε σειρά Fourier της $f(t)$, πρέπει η $f(t)$ να είναι ορισμένη σε διάστημα μήκους 2π (!) και περιοδική. Πρέπει λοιπόν να ορίσουμε με κάποιον τρόπο την $f(t)$ στο διάστημα $[-\pi,0]$, και να την επεκτείνουμε περιοδικά έξω από το $[-\pi,\pi]$. Πριν προχωρήσουμε ας θυμηθούμε ότι θέλουμε να γράψουμε την $f(t)$ σαν άθροισμα <u>ημιτόνων</u>.

Αν έχουμε μία $f(t)$ άρτια στο $[-\pi,\pi]$ τότε

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = 0 \quad , n\in\mathbb{N}$$

δηλ. $$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

Αν η $f(t)$ είναι περιττή στο $[-\pi,\pi]$ τότε

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = 0 \quad , n=0,1,2,\dots$$

δηλ. $$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

Άρα την $f(t)$ στο $[0,\pi]$ την επεκτείνουμε στο $[-\pi,\pi]$ ώστε να είναι περιττή. Τότε η f στο $[-\pi,\pi]$ είναι συνεχής, κατά τμήματα ομαλή και $f(-\pi)=f(\pi)=0$. Την επεκτείνουμε περιοδικά στο $\mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ακριβώς επειδή $f(\pi)=f(-\pi)$). Αφού η f είναι κατά τμήματα ομαλή, το πόρισμα του θεωρήματος Dini λέει ότι:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \quad , t\in\mathbb{R}$$

Ξαναγράφοντας στην αρχική μεταβλητή x έχουμε ότι

"Αν η αρχική θερμοκρασία $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0,\ell]$, $f(0)=f(\ell)=0$ και κατά τμήματα ομαλή στο $[0,\ell]$ τότε η f γράφεται σαν:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right) \quad , 0\le x\le \ell$$

όπου $$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right)dx \quad , n\in\mathbb{N}$$"

(Διότι $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\ell} \sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right) f(x)\,\frac{\pi}{\ell}dx = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right)dx$)

Μένει τώρα να ελέγξουμε αν η

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-\frac{k\pi^2 n^2}{\ell^2}t} \sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right)$$

είναι λύση του προβλήματός μας!

Καταρχήν, θα πρέπει η σειρά να συγκλίνει για $0<x<\ell$, $t>0$.

Επιπλέον, επειδή θα πρέπει να παραγωγίσουμε την $u(x,t)$ θα χρειαστεί να αλλάξουμε σειρά άθροισης και παραγώγισης:

$$u_t(x,t) \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(-\frac{k\pi^2 n^2}{\ell^2}\right) e^{-\frac{k\pi^2 n^2}{\ell^2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

$$u_x(x,t) \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi}{\ell}\, e^{-\frac{k\pi^2 n^2}{\ell^2}t} \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

$$u_{xx}(x,t) \overset{?}{=} -\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} e^{-\frac{kn^2\pi^2}{\ell^2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

Μία ικανή συνθήκη για να ισχύουν αυτά τα τρία είναι οι σειρές των παραγώγων να συγκλίνουν ομοιόμορφα ως προς τις μεταβλητές που παραγωγίζονται. Δηλαδή, για $t>0$, οι δύο τελευταίες σειρές θα πρέπει να συγκλίνουν ομοιόμορφα ως προς x και, για $0<x<\ell$, η πρώτη σειρά θα πρέπει να συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς t.

Αν παρατηρήσουμε ότι η $\{b_n\}$ είναι φραγμένη: $|b_n| \leq \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} |f(x)|\,dx = M$ τότε οι δύο τελευταίες σειρές φράσσονται απολύτως από

$$M\frac{\pi}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-cn^2}, \quad M\frac{\pi^2}{\ell^2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-cn^2}$$ αντιστοίχως,

όπου $c = \frac{k\pi^2 t}{\ell^2} > 0$.

Και οι δύο σειρές συγκλίνουν (γιατί;), άρα από το κριτήριο Weierstrass οι σειρές των u_x, u_{xx} συγκλίνουν ομοιόμορφα ως προς x, για $t>0$.

Αν το t είναι στο διάστημα $[\varepsilon, +\infty)$, όπου το $\varepsilon>0$ είναι αυθαίρετο, τότε η σειρά της u_t φράσσεται απολύτως από την

$$M\frac{k\pi^2}{\ell^2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\Delta\varepsilon n^2}, \quad \text{όπου } \Delta = \frac{k\pi^2}{\ell^2} > 0.$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει, άρα από το κριτήριο Weierstrass η σειρά της u_t συγκλίνει ομοιόμορφα για $t \geq \varepsilon$. Άρα, προφανώς, η πρώτη εξίσωση ισχύει χωρίς ερωτηματικό για $t \geq \varepsilon$. Επειδή το ε είναι αυθαίρετο, θα ισχύει για $t>0$.

Άρα οι τρεις εξισώσεις ισχύουν χωρίς ερωτηματικό και για αυτό φαίνεται ότι

$$u_t(x,t) = k\,u_{xx}(x,t), \quad 0<x<\ell, \quad t>0.$$

Επίσης, είναι προφανές ότι $u(0,t) = u(\ell,t) \equiv 0$, $t>0$

και ότι $u(x,0) = f(x)$, $0<x<\ell$.

Πριν κλείσουμε το θέμα θα πρέπει να τονίσουμε κάτι που μπορεί να είναι ενδιαφέρον. Η αρχική κατανομή $f(x)$ είναι συνεχής. Θα ήταν αξιόσημο λοιπόν "μόλις" ο χρόνος γίνει θετικός να παρατηρηθεί "πήδημα" στην θερμοκρασία $u(x,t)$. Δηλαδή θα ισχύει:

$$\lim_{t\to 0+} u(x,t) = f(x)$$

<u>Άσκηση</u> Ικανοποιείται η συνθήκη αυτή από την λύση που βρήκαμε;

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} u_t(x,t) = k\, u_{xx}(x,t) & 0<x<\ell, \quad t>0 \\ u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0 & , \quad t>0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

<u>Συνοπτική περιγραφή</u>: Λύνουμε, με παραδοχή $u(x,t) = X(x)T(t) \not\equiv 0$ την διαφορική εξίσωση με τις συνοριακές συνθήκες (χωρίς να παίρνουμε υπ' όψιν την αρχική συνθήκη). Για κάθε $n=0,1,2,\dots$ βρίσκουμε μία λύση $u_n(x,t) = e^{-\frac{kn^2\pi^2}{\ell^2}t} \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$ μετά από κάποια διερεύνηση.

Κατόπιν γράφουμε την $f(x)$ σαν σειρά συνημιτόνων, αφού την επεκτείνουμε σαν άρτια στο $[-\ell,0]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right), \quad 0<x<\ell$$

Σχηματίζουμε την

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{kn^2\pi^2}{\ell^2}t} \cos\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right)$$

και, με παρόμοιο τρόπο όπως στο πρόβλημα (I), αποδεικνύουμε ότι η $u(x,t)$ μπορεί να παραγωγισθεί δύο φορές ως προς x και μία φορά ως προς t για $0<x<\ell$, $t>0$, και ότι $u_t(x,t) = k\, u_{xx}(x,t)$. Ελέγχουμε και τις αρχικές συνοριακές συνθήκες.

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το εξής:

<u>Θεώρημα</u>. Αν η αρχική κατανομή θερμοκρασίας $f(x)$, $0\le x\le \ell$, είναι συνεχής στο $[0,\ell]$, κατά τμήματα ομαλή στο $[0,\ell]$, και ισχύει ότι:

$$\begin{cases} f(0) = f(\ell) = 0 & \text{στην περίπτωση του (I)} \\ f'(0+) = f'(\ell-) = 0 & \text{στην περίπτωση του (II)} \end{cases}$$

τότε τα προβλήματα (I), (II) δέχονται τις λύσεις

$$(\mathrm{I}): \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{kn^2\pi^2}{\ell^2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

(II): $u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{k n^2\pi^2}{\ell^2}t}\cos(n\frac{\pi}{\ell}x)$.

όπου

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right)dx , \quad b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right)dx .$$

Έχει ενδιαφέρον να ελέγξουμε πως συμπεριφέρονται οι λύσεις των προβλημάτων (I), (II) καθώς ο χρόνος $t\longrightarrow+\infty$. Παρατηρούμε ότι οι σειρές που ορίζουν την λύση $u(x,t)$ και στα δύο προβλήματα, για σταθερό x, συγκλίνουν ομοιόμορφα ως προς $t\in[0,+\infty)$.

Άσκηση Απόδειξη του τελευταίου ισχυρισμού εφαρμόζοντας το κριτήριο Dirichlet για ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων.

Κάθε όρος τείνει στο 0 καθώς $t\longrightarrow+\infty$.

Άρα, για το πρόβλημα (I) $\quad u(x,t)\longrightarrow 0$, $t\to+\infty$

και για το πρόβλημα (II) $\quad u(x,t)\longrightarrow\frac{a_0}{2}$, $t\to+\infty$.

Ας δούμε ποιά είναι η φυσική σημασία αυτών των αποτελεσμάτων.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει λύση του προβλήματος (I) η οποία δεν εξαρτάται από τον χρόνο t : $u(x,t)\equiv u(x)$. (Άρα δεν έχει νόημα να μιλάμε για αρχική συνθήκη)

$0 = k u_{xx}(x,t) = k u''(x)$

$u(0,t)=u(0)=0$, $\quad u(\ell,t)=u(\ell)=0$.

Τότε η $u''(x)=0$ δίνει $\quad u(x)=c_1+c_2x \quad$ και, με τις συνοριακές συνθήκες, έχουμε $\quad c_1=c_2=0$.

$u(x)\equiv 0$.

Αυτή η ειδική λύση ονομάζεται λύση σταθερής κατάστασης (steady state solution).

Τα ίδια ακριβώς βρίσκουμε ότι η λύση σταθερής κατάστασης για το πρόβλημα (II) είναι οποιαδήποτε σταθερά $\quad u(x)\equiv$ σταθερά.

Έχουμε λοιπόν το

Θεώρημα Ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες $f(x)$ οι λύσεις των προβλημάτων (Ι), (ΙΙ) τείνουν, καθώς $t \to +\infty$, στη αντίστοιχη λύση σταθερής κατάστασης.

<u>Άσκηση</u> Συμπεράνετε ότι το πρόβλημα της θερμότητας συμβαίνει κάποιου είδους <u>εξισορρόπηση</u> ανάμεσα στα θερμά και στα ψυχρά μέρη της ράβδου και δώστε την φυσική-διαισθητική ερμηνεία των σταθερών 0 και $\frac{a_0}{2}$ για τα δύο προβλήματα.

<u>Άσκηση</u> (<u>Αντιστροφή χρόνου</u>)(α) Οι λύσεις $u(x,t)$ που βρήκαμε έχουν, γενικά, νόημα όταν $t<0$;

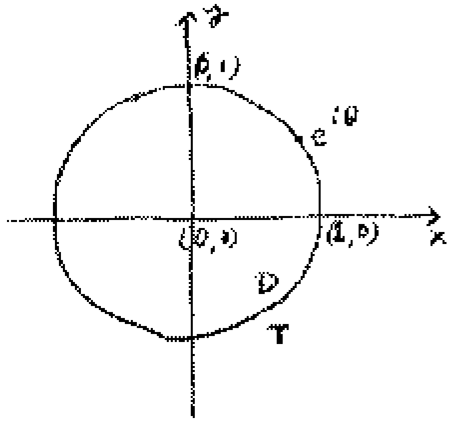
(β) Αν υποθέσουμε ότι, για κάποιο $\Lambda > 0$,

$$|a_n|, |b_n| \leq e^{-\Lambda n^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

τότε, αποδείξτε ότι οι λύσεις $u(x,t)$ (και για τα δύο προβλήματα) έχουν νόημα και ικανοποιούν την εξίσωση θερμότητας στο χρονικό διάστημα $\left[-\frac{\Lambda \ell^2}{k\pi^2}, 0\right]$, δηλ. για κάποιο διάστημα <u>αρνητικού χρόνου t</u>

(γ) Τι συμβαίνουν οι συνθήκες πάνω στους συντελεστές Fourier της f που δίνονται στο (β) για την συνάρτηση f;

Γ. Το πρόβλημα του Dirichlet για τον μοναδιαίο κύκλο του επιπέδου.



Έστω $z = x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$ η μιγαδική αναπαράσταση των σημείων του επιπέδου. $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ το μέτρο του z, και $\theta = \operatorname{Arg} z$ το πρωτεύον όρισμα του z, όπου $\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r}, \ \sin\theta = \frac{y}{r} \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{cases}$

Έστω $T = \{ z : |z| = 1 \}$ ο μοναδιαίος κύκλος του $\mathbb{R}^2$ και

$D = \{ z : |z| < 1 \}$ ο μοναδιαίος δίσκος του $\mathbb{R}^2$.

Έστω ότι δίδεται συνεχής συνάρτηση $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$

Τα σημεία του T γράφονται σαν $e^{i\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$. Μπορούμε επομένως να θεωρήσουμε την f σαν συνάρτηση του θ:

$$f^*(\theta) = f(e^{i\theta})$$

$$f^* : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{συνεχής στο } [0, 2\pi)$$

Λόγω συνέχειας της f στο T έχουμε ότι:

$$f^*(2\pi-) = \lim_{\theta \to 2\pi-} f^*(\theta) = \lim_{\theta \to 2\pi-} f(e^{i\theta}) = f(1) = f^*(0).$$

Άρα η f^* μπορεί να επεκταθεί περιοδικά σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$:

$$f^* : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad 2\pi\text{-περιοδική και συνεχής στο } \mathbb{R}.$$

Επιθυμούμε να λύσουμε το εξής πρόβλημα:

"Να βρεθεί συνάρτηση $u(x,y) = u(re^{i\theta})$ ορισμένη στο D

(α) η οποία να είναι αρμονική στο D και

(β) $\lim_{r \to 1-} u(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ για κάθε θ, $0 \le \theta < 2\pi$ "

Μία συνάρτηση ονομάζεται αρμονική αν $\Delta u(x,y) \equiv 0$, δηλαδή

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) \equiv 0.$$

Βρίσκουμε την σειρά Fourier της f^*

$$f^*(\theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

και την συνάρτηση

$$u(r,\theta) = f^*(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)\, r^n \quad , \quad 0\le r<1 .$$

(ξαναγύρισε στην σελίδα 75).

Θα αποδείξουμε ότι η $u(r,\theta)$ είναι η λύση του παραπάνω προβλήματος.

Κατ' αρχήν, είναι άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος στην σελ. 75 ότι

$$\lim_{r\to 1^-} u(r,\theta) = \lim_{r\to 1^-} f^*(r,\theta) = f^*(\theta) = f(e^{i\theta})$$

Άρα απομένει να αποδείξουμε ότι η $u(r,\theta)$ είναι αρμονική.

Αν $z = re^{i\theta}$ τότε

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n\cos n\theta + i\, r^n \sin n\theta \quad , \quad \bar z^n = r^{n} e^{-in\theta} = r^n\cos n\theta - i\, r^n \sin n\theta .$$

$$r^n\cos n\theta = \frac{1}{2}(z^n + \bar z^n) \quad , \quad r^n\sin n\theta = \frac{1}{2i}(z^n - \bar z^n) .$$ Άρα:

$$f^*(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)\, r^n =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}(z^n + \bar z^n) + \frac{b_n}{2i}(z^n - \bar z^n) \right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}\left((x+iy)^n + (x-iy)^n\right) + \frac{b_n}{2i}\left((x+iy)^n - (x-iy)^n\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{ \frac{a_n - ib_n}{2}(x+iy)^n + \frac{a_n + ib_n}{2}(x-iy)^n \right\} .$$

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι μπορούμε να εναλλάξουμε άθροισμα και παραγώγιση δύο φορές ως προς x είτε ως προς y ώστε να πάρουμε:

$$u_x = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{ \frac{a_n - ib_n}{2}\, n(x+iy)^{n-1} + \frac{a_n+ib_n}{2}\, n(x-iy)^{n-1} \right\}$$

$$u_{xx} = \sum_{n=2}^{\infty}\left\{ \frac{a_n - ib_n}{2}\, n(n-1)(x+iy)^{n-2} + \frac{a_n+ib_n}{2}\, n(n-1)(x-iy)^{n-2} \right\}$$

και

$$u_y = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{ \frac{a_n - ib_n}{2}\, n i (x+iy)^{n-1} + \frac{a_n+ib_n}{2}\, n(-i)(x-iy)^{n-1} \right\}$$

$$u_{yy} = \sum_{n=2}^{\infty}\left\{ \frac{a_n - ib_n}{2}\, n i^2 (n-1)(x+iy)^{n-2} + \frac{a_n+ib_n}{2}\, n(-i)^2 (n-1)(x-iy)^{n-2} \right\}$$

Τότε θα έχουμε τελειώσει αφού μια απλή ματιά μας πείθει ότι

$$u_{xx} + u_{yy} \equiv 0 .$$

Ικανή συνθήκη για την εναλλαγή αθροίσματος και παραγώγισης είναι όλες οι παραπάνω σειρές να συγκλίνουν ομοιόμορφα, οι δύο πρώτες ως προς x και οι δύο τελευταίες ως προς y. Θα περιοριστούμε στις δύο πρώτες. Η απόδειξη για τις άλλες δύο είναι παρόμοια.

Καταρχήν τα $\{a_n\},\{b_n\}$ είναι φραγμένα:

$$|a_n|, |b_n| \leq M = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f^*(\theta)|\, d\theta$$

Άρα οι δύο σειρές είναι απολύτως φραγμένες από

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{a_n - ib_n}{2}\right| n\, |x+iy|^{n-1} + \left|\frac{a_n+ib_n}{2}\right| n\, |x+iy|^{n-1}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}\cdot n\cdot r^{n-1} + \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}\cdot n\, r^{n-1}\right)$$

$$\leq \sqrt{2}M\sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} = \sqrt{2}M\,\frac{1}{(1-r)^2} < +\infty$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\left|\frac{a_n - ib_n}{2}\right| n(n-1)\, |x+iy|^{n-2} + \left|\frac{a_n+ib_n}{2}\right| n(n-1)\, |x+iy|^{n-2}\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}\; n(n-1)\, r^{n-2} + \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}\; n(n-1)\, r^{n-2}\right\}$$

$$\leq \sqrt{2}M\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) r^{n-2} = \sqrt{2}M\,\frac{2}{(1-r)^3} < +\infty$$

αντιστοίχως. Το κριτήριο Weierstrass δίνει την ομοιόμορφη σύγκλιση που θέλουμε.

<u>Άσκηση</u> Τι γίνεται αν η f είναι κατά τμήματα συνεχής;

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

(Για τριγωνομετρικές σειρές και σειρές Fourier)

1. T. Apostol "Mathematical Analysis" Addison-Wesley
2. H.S. Carslaw "An introduction to the theory of Fourier's series and integrals" Dover
3. Churchill "Fourier series and boundary value problems" McGraw Hill
4. H. Dym, H.P. McKean "Fourier series and integrals" Academic Press
5. G. Folland "Fourier analysis and its applications"
6. G.H. Hardy, W.W. Rogosinski "Fourier series" Cambridge Univ. Press
7. H. Helson "Harmonic analysis" Addison-Wesley
8. E.W. Hobson "The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier series" Dover
9. Y. Katznelson "An introduction to harmonic analysis" Dover
10. K. Knopp "Theory and application of infinite series" Dover
11. A. Kolmogorov, S. Fomine "Elements de la theorie des fonctions et de l'analyse fonctionelle" Mir.
12. T.W. Körner "Fourier analysis" Cambridge Univ. Press
13. J.E. Littlewood "Lectures on the theory of functions" Oxford Univ. Press
14. W. Rogosinski "Fourier series" Chelsea
15. E.C. Titchmarsh "The theory of functions" Oxford Univ. Press
16. G. Tolstov "Fourier series" Prentice Hall
17. R.L. Wheeden, A. Zygmund "Measure and integral" Dekker
18. E.T. Whittaker, G.N. Watson "A course of modern analysis" Cambridge Univ. Press

<u>και γενικά τα</u>: H. Lebesgue "Leçons sur les series trigonometriques"

N.K. Bary "A treatise on trigonometric series" Macmillan

A. Zygmund "Trigonometric series" Cambridge Univ. Press

" "Trigonometrical series" Dover και το ίδιο σε μετάφραση "Τριγωνομετρικές σειρές" Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.