Περιεχόμενα

Σημειώσεις

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ I

Φθινόπωρο 1997

Μ. Παπαδημητράκης

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Χωρίς να μας ενδιαφέρει να εμβαθύνουμε στο φιλοσοφικό νόημα των αριθμών, θα περιοριστούμε στην εμπειρική αντίληψή μας για τους αριθμούς. Δηλαδή σαν αποτελέσματα μετρήσεων διακριτών ποσοτήτων ή μετρήσεων αποστάσεων.

Οι πιο απλοί αριθμοί είναι οπωσδήποτε οι <u>φυσικοί αριθμοί</u> $1, 2, 3, \ldots$. Με τους αριθμούς αυτούς επιτρέπεται η εκτέλεση των πιο απλών πράξεων, της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Δηλαδή, αν n και m είναι δύο οποιοιδήποτε φυσικοί αριθμοί, τότε το άθροισμα $n+m$ και το γινόμενο nm είναι φυσικοί αριθμοί. Δεν μπορούμε όμως να αφαιρέσουμε το 3 από το 2 ούτε να διαιρέσουμε το 2 με το 3.

Αν επεκτείνουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών και συμπεριλάβουμε το 0 και τους αντίθετους των φυσικών, τότε σχηματίζουμε το σύνολο των <u>ακεραίων αριθμών</u>: $0, +1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$. Αν, τώρα, n και m είναι οποιοιδήποτε ακέραιοι αριθμοί, τότε το άθροισμα $n+m$, το γινόμενο nm και η διαφορά $n-m$ είναι όλοι ακέραιοι αριθμοί. Πάλι όμως δεν μπορούμε να διαιρέσουμε το 2 με το 3.

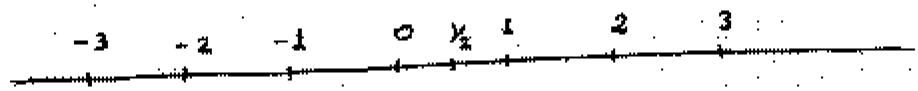
Επεκτείνουμε και το σύνολο των ακεραίων αριθμών και συμπεριλαμβάνουμε τους <u>ρητούς αριθμούς</u>, δηλαδή τα κλάσματα $\frac{n}{m}$ όπου n, m είναι οποιοιδήποτε ακέραιοι αριθμοί. (Συμφωνούμε το κλάσμα $\frac{n}{1}$ να ισούται με τον ακέραιο n, ώστε αμέσως το σύνολο των ακεραίων να περιέχεται στο σύνολο των ρητών αριθμών και να μπορούμε να μιλάμε για επέκταση). Τώρα οι γνωστές πράξεις μεταξύ κλασμάτων:

$$\frac{n}{m} + \frac{k}{\lambda} = \frac{n\lambda + mk}{m\lambda}, \qquad \frac{n}{m} - \frac{k}{\lambda} = \frac{n\lambda - mk}{m\lambda},$$

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{k}{\lambda} = \frac{nk}{m\lambda}, \qquad \frac{n}{m} : \frac{k}{\lambda} = \frac{n\lambda}{mk}$$

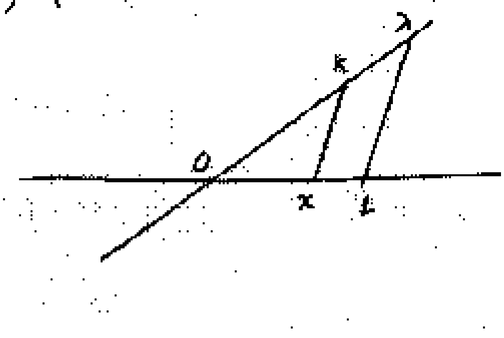
μας επιτρέπουν να συμπεράνουμε ότι οι τέσσερις γνωστές πράξεις, αν εφαρμοσθούν σε ρητούς αριθμούς, παράγουν πάντοτε ρητούς αριθμούς.

Η πρωταρχική αντίληψη που έχουμε για τους αριθμούς σαν αποτελέσματα μετρήσεων αποστάσεων μπορεί να συνοψισθεί κατά τον απλούστερο τρόπο με το ακόλουθο "σχήμα". Θεωρούμε αυθαίρετη ευθεία γραμμή.



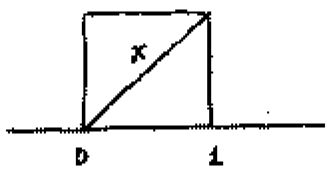
Ξεχωρίζουμε ένα σημείο της το οποίο ονομάζουμε 0 και παίζει τον ρόλο της αρχής μέτρησης αποστάσεων πάνω στην ευθεία. Κατόπιν ξεχωρίζουμε δεύτερο σημείο και το ονομάζουμε 1. Η απόσταση του 1 από το 0 θα είναι η μονάδα μέτρησης. Τώρα πια μπορούμε να τοποθετούμε εύκολα όλους τους αριθμούς πάνω στην ευθεία μας. Ο αριθμός 2 θα τοποθετηθεί στην μεριά του 0 στην οποία βρίσκεται και το 1 και σε απόσταση από το 0 διπλάσια από την απόσταση του 1 από το 0. Ο αριθμός 3 στην ίδια μεριά και σε τριπλάσια απόσταση κ.ο.κ. Οι αρνητικοί ακέραιοι $-1, -2, \dots$ θα τοποθετηθούν συμμετρικά στην άλλη μεριά του 0.

Μπορούμε, ακόμη, να τοποθετούμε εύκολα κάποιους ρητούς αριθμούς. Ο αριθμός $\frac{1}{2}$ στο μέσον της απόστασης από το 0 στο 1. Και, αν θέλουμε, τοποθετούμε οποιονδήποτε ρητό αριθμό πάνω στην ευθεία με γεωμετρική ακρίβεια, χρησιμοποιώντας το εξής απλό σχήμα. Θεωρούμε δεύτερη ευθεία που περνάει από το σημείο 0. Αν ο ρητός αριθμός είναι ο $\frac{\kappa}{\lambda}$, τότε



θεωρούμε πάνω στην δεύτερη ευθεία αποστάσεις κ μονάδων και λ μονάδων από το 0. Σχεδιάζουμε το ευθ. τμήμα που συνδέει το λ με το 1 της πρώτης ευθείας και από το κ της δεύτερης ευθείας φέρνοντας παράλληλο ευθ. τμήμα το οποίο θα συναντήσει την πρώτη ευθεία σε απόσταση x από το O. Μια εφαρμογή του κανόνα των αναλογιών στα δύο όμοια τρίγωνα θα μας πείσει ότι η απόσταση x είναι ο ρητός αριθμός $\frac{k}{\lambda}$: $x = \frac{x}{1} = \frac{k}{\lambda}$.

Βρήκαμε, λοιπόν, κάθε ρητός αριθμός αντιστοιχεί σε κάποιο σημείο της ευθείας μας. Οι ρητοί αριθμοί θα ήταν ένα πραγματικά "πλήρες" σύστημα αριθμών αν κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχούσε σε κάποιον ρητό αριθμό. Τότε κάθε απόσταση θα μπορούσε να μετρηθεί με ρητό αριθμό. Αυτό όμως, καθώς είναι από την αρχαιότητα γνωστό, δεν είναι αληθές. Αν φτιάξουμε τετράγωνο με πλευρά το $O1$, τότε το



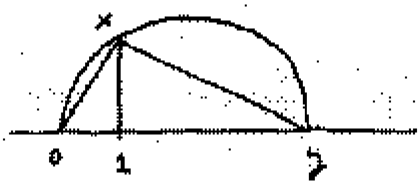
μήκος της διαγωνίου x ικανοποιεί την εξίσωση $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ σύμφωνα με το θεώρημα του Πυθαγόρα. Αν κάθε απόσταση μπορούσε να μετρηθεί με ρητό αριθμό, τότε το x θα ήταν ρητός. Έστω, λοιπόν, ότι $x = \frac{\mu}{\nu}$ όπου μ, ν είναι φυσικοί αριθμοί. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κλάσμα είναι ανάγωγο, δηλαδή ότι οι μ, ν δεν έχουν κοινό διαιρέτη. Τότε : $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 = 2$, $\mu^2 = 2\nu^2$.

Άρα ο μ^2 είναι άρτιος. Τότε και ο μ είναι άρτιος (Γιατί;)
δηλαδή $\mu = 2\mu'$, όπου ο μ' είναι κάποιος φυσικός αριθμός.
Άρα $2\nu^2 = (2\mu')^2 = 4\mu'^2$, $\nu^2 = 2\mu'^2$.
Άρα ο ν^2 είναι άρτιος. Τότε και ο ν είναι άρτιος. Δηλαδή $\nu = 2\nu'$, όπου ν' είναι κάποιος φυσικός αριθμός.
Καταλήξαμε στο : $\mu = 2\mu'$, $\nu = 2\nu'$. Αυτό είναι αδύνατον διότι οι μ, ν δεν έχουν κοινό διαιρέτη.

Άρα το μήκος αυτής της διαγωνίου <u>δεν</u> μπορεί να μετρηθεί με ρητό αριθμό. Αν, λοιπόν, θέλουμε ένα σύστημα αριθμών επαρκές ώστε κάθε μήκος να μπορεί να μετρηθεί, τότε θα πρέπει να επεκτείνουμε το σύνολο των ρητών αριθμών. Θα πρέπει σε κάθε σημείο της ευθείας μας να αντιστοιχεί κάποιος αριθμός. Δηλαδή, κάθε σημείο της ευθείας, το οποίο δεν έχει αντιστοιχηθεί ήδη με κάποιο ρητό αριθμό, θα πρέπει να θεωρηθεί ότι αντιστοιχεί σε έναν "ιδεατό" αριθμό ή όπως λέμε <u>άρρητο αριθμό</u>.

Άρα κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε κάποιον αριθμό είτε ρητό είτε άρρητο. Όλοι οι αριθμοί ονομάζονται <u>πραγματικοί αριθμοί</u>.

Είδαμε προηγουμένως ότι η αποδοχή των άρρητων αριθμών εξασφαλίζει λύση της εξίσωσης $x^2=2$. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι, για κάθε θετικό αριθμό y, η εξίσωση $x^2=y$ έχει λύση (ρητό ή άρρητο αριθμό). Την λύση x την συμβολίζουμε, ως γνωστόν, με $\sqrt{y}$. Τοποθετούμε, λοιπόν, τον αριθμό y στην ευθεία και



με διάμετρο Oy γράφουμε ημικύκλιο. Από το 1 φέρνουμε κάθετη ευθεία η οποία τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο x. Από την ομοιότητα των τριγώνων $O1x$ και Oxy:

$$\frac{Ox}{O1} = \frac{Oy}{Ox}, \quad (Ox)^2 = Oy.$$

Το μήκος του Ox είναι, επομένως, λύση της $x^2=y$. Και επειδή είχαμε δεχθεί ότι κάθε μήκος μπορεί να μετρηθεί με αριθμό, ρητό ή άρρητο, ο αριθμός x ο οποίος μετράει το μήκος του Ox είναι η λύση της $x^2=y$.

(Προσοχή: το σχήμα αρκεί για την περίπτωση $y>1$. Τι σχήμα πρέπει να ψάχετε όταν $0<y<1$;)

Σ' αυτό το σημείο πρέπει να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις.

1. Η γνώση που κατέχουμε δεν έχει αξιώσεις μαθηματικής αυστηρότητας. Την ύπαρξη λύσης της εξίσωσης $x^2=2$ (και κατ' επέκταση την ύπαρξη άρρητων αριθμών) δεν την "αποδείξαμε". "Δεχτήκαμε" την ύπαρξη των άρρητων αριθμών από την πρακτική αναγκαιότητα μέτρησης οποιασδήποτε απόστασης (άρα και της διαγωνίου ενός τετραγώνου με πλευρά μήκους 1). Ή, ισοδύναμα, λόγω της αναγκαιότητας αντιστοίχισης <u>όλων</u> των σημείων μιας ευθείας με αριθμούς και οι ρητοί δεν επαρκούν.

Και, κυρίως, η <u>αυστηρή</u> έκταση ενός συστήματος αριθμών σίγουρα δεν μπορεί να βασισθεί σε έννοιες έτσι κι αλλιώς ασαφείς, όπως η έννοια της ευθείας ή η έννοια του σημείου. Ερωτήματα προκύπτουν όπως: υπάρχει στην πραγματικότητα ευθεία; υπάρχει σημείο; είναι μια ευθεία συνεχής όπως την ζωγραφίζουμε και την φανταζόμαστε; πόσα λείπουν σημεία από μια ευθεία;

Σ' αυτό το μάθημα θα προσπαθήσουμε, χωρίς να ανησυχούμε ιδιαίτερα για την μαθηματική αυστηρότητα, να δούμε πώς ορισμένες έννοιες αναπτύχθηκαν από την μαθηματική επιστήμη για να λύσουν συγκεκριμένα πρακτικά και θεωρητικά προβλήματα. Έννοιες οι οποίες αποτελούν αυτό που σήμερα ονομάζεται "Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός". Η αυστηρή θεμελίωση των αριθμών θα αναπτυχθεί αργότερα σε άλλο μάθημα.

2. Θα δεχτούμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί (ρητοί και άρρητοι) μπορούν να προστεθούν, αφαιρεθούν, πολλαπλασιασθούν και διαιρεθούν ακριβώς όπως και οι ρητοί αριθμοί. Οι ιδιότητες αυτών των

πράξεων θεωρούνται γνωστό από το Λύκειο.

Επίσης, θα θεωρηθούν γνωστές οι ιδιότητες των ανισοτήτων. Μόνο να πούμε ότι $x<y$ σημαίνει ότι το σημείο x είναι αριστερά του σημείου y στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Και να υπενθυμίσουμε ότι

$$x<y \text{ και } z<w \Rightarrow x+z<y+w$$

αλλά

$$x<y \text{ και } z<w \not\Rightarrow x-z<y-w$$

Μπορούμε να προσθέτουμε ανισότητες ίδιας φοράς αλλά όχι να τις αφαιρούμε! Ακόμα να υπενθυμίσουμε ότι:

$$x<y \text{ και } z>0 \Rightarrow xz<yz$$

αλλά

$$x<y \text{ και } z<0 \Rightarrow xz>yz$$

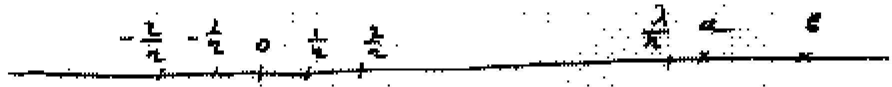
Σ' αυτό το σημείο θα ήταν καλό να ξανακοιτάξει ο αναγνώστης τις αλγεβρικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών και να επαναλάβει προσεκτικά τις ιδιότητες των ανισοτήτων.

Μετά από τις 2 αυτές παρατηρήσεις θα δούμε μερικά ακόμα ζητήματα σχετικά με την θέση των αριθμών στην ευθεία. Γνωρίζουμε ότι όλοι οι ρητοί αριθμοί τοποθετούνται πάνω στην ευθεία, αλλά ότι δεν την εξαντλούν: ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός αριθμός. Όμως τα σημεία που αντιστοιχούν στους ρητούς έχουν μια άλλη ιδιότητα: είναι πυκνά πάνω στην ευθεία. Αυτό σημαίνει ότι οποιοδήποτε πεπερασμένο τμήμα, οσοδήποτε μικρό, περιέχει ρητό αριθμό. Θα μιλήσουμε γι αυτό ως εξής. Ας πάρουμε οποιουσδήποτε αριθμούς a, b (ρητούς ή άρρητους) με $a<b$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει κλάσμα $\frac{m}{n}$ ώστε $a<\frac{m}{n}<b$.

Γνωρίζουμε εμπειρικά ότι οι αντίστροφοι των φυσικών n, δηλαδή οι αριθμοί $\frac{1}{κ}$, μικραίνουν απεριόριστα καθώς το κ μεγαλώνει παίρνοντας διαδοχικά τις τιμές 1, 2, 3, ... Αυτό σημαίνει ότι το $\frac{1}{κ}$ γίνεται όσο μικρό θέλουμε ή, με άλλα λόγια, ότι οποιονδήποτε θετικό αριθμό κι αν διαλέξουμε το $\frac{1}{κ}$ μπορεί να γίνει μικρότερο από τον αριθμό αυτόν αρκεί το κ να είναι αρκετά μεγάλο. Για παράδειγμα: αν επιλέξουμε τον αριθμό 0,00015 τότε το $\frac{1}{κ}$ θα γίνει μικρότερο από τον αριθμό αυτόν αρκεί το κ να γίνει 6667 ή μεγαλύτερο:

$$\frac{1}{κ} < 0.00015 \quad , \quad κ > \frac{100000}{15} = 6666\tfrac{2}{3}$$

Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι έχουμε βρεί κάποιο αριθμό η ώστε $\frac{1}{η} < β - α$. Σημειώνουμε πάνω στην ευθεία τον αριθμό $\frac{1}{η}$ καθώς και όλα τα θετικά και αρνητικά πολλαπλάσιά του με ακέραιο αριθμό: $0, \pm\frac{1}{η}, \pm\frac{2}{η}, \pm\frac{3}{η}, \ldots$



Οι αριθμοί αυτοί χωρίζουν την ευθεία σε διαστήματα μήκους $\frac{1}{η}$ και όλοι είναι ρητοί. Κάποιος από αυτούς είναι ο μεγαλύτερος που βρίσκεται αριστερά ή πάνω στο α: ας τον ονομάσουμε $\frac{λ}{η}$. Τότε ο $\frac{λ+1}{η}$ είναι δεξιά του α. Αν ο $\frac{λ+1}{η}$ είναι δεξιά ή πάνω στο β τότε, συγκρίνοντας

μήκη, έχουμε ότι: $β - α \le \frac{1}{η}$.

Όμως $\frac{1}{η} < β - α$. Άρα ο $\frac{λ+1}{η}$ είναι ανάμεσα στα α, β και είναι ο ρητός που ψάχνουμε.

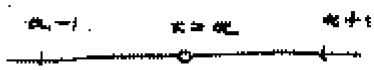
<u>Παρατήρηση</u>: Η απόδειξή μας δεν είναι αυστηρή, διότι βασίσθηκε στην εξής εποπτική ιδιότητα: ότι οι αντίστροφοι των φυσικών $\frac{1}{κ}$

μικραίνουν απεριόριστα καθώς το k μεγαλώνει. Ακόμη και αν θεωρητικά εφικτό κάθε φορά που μας δίνουν έναν θετικό αριθμό (π.χ. τον $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+18\sqrt{3}}$) να βρίσκουμε k, ώστε ο $\frac{1}{k}$ να είναι μικρότερος του θετικού αυτού αριθμού, δεν σημαίνει ότι έχουμε απόδειξη την ιδιότητα αυτή. Διότι πάντοτε θα απομένει κάποιος θετικός αριθμός για να εφαρμοσθεί το πείραμα.

Η αυστηρή εξέταση αυτής της ιδιότητας θα γίνει σε άλλο μάθημα και εδώ απλώς θα την αποδεχτούμε σύμφωνα με την "αρχή" που λέει ότι "αν αξίζει να εξετάζουμε ένα σύστημα αριθμών με σκοπό να βγάλουμε κάποια πρακτικά συμπεράσματα τα οποία θα ερμηνεύουν τον κόσμο γύρω μας σύμφωνα με την εμπειρική εικόνα που έχουμε γι αυτόν, τότε καλά θα κάνουν να έχουν αυτοί οι αριθμοί ιδιότητες οι οποίες, επίσης, συμφωνούν με την εμπειρική αυτήν εικόνα".

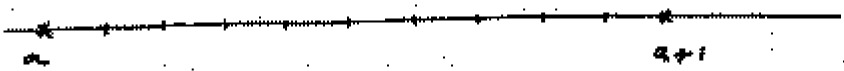
Ένα τελευταίο ζήτημα σχετικό με την θέση των αριθμών πάνω στην ευθεία είναι η δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών. Δεχόμαστε, όπως είναι φανερό για την γεωμετρική μας αντίληψη, ότι οι ακέραιοι αριθμοί χωρίζουν ολόκληρη την ευθεία σε διαστήματα μήκους 1. Αν ένας πραγματικός αριθμός x δεν είναι ακέραιος, τότε βρίσκεται σε ένα μόνον από αυτά τα διαστήματα. Δηλαδή, υπάρχει ακέραιος α ώστε $\alpha < x < \alpha+1$

Αν ο x είναι ακέραιος τότε ο x βρίσκεται σε δύο διαστήματα στο κοινό τους άκρο. Διαλέγουμε το δεξιό διάστημα, δηλαδή το διάστημα που έχει το x

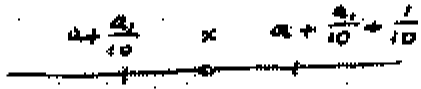


στο αριστερό άκρο. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει ακέραιος α ώστε $\alpha \leq x < \alpha+1$.

Χωρίζουμε τώρα το διάστημα $[a, a+1]$ σε 10 ίσα διαστήματα μήκους $1/10$.



Τα σημεία διαίρεσης είναι τα $a+\frac{1}{10}, a+\frac{2}{10}, \dots, a+\frac{9}{10}$. Αν ο αριθμός x δεν συμπίπτει με κανένα από αυτά τότε βρίσκεται σε μοναδικό ένα από τα σχηματιζόμενα διαστήματα. Δηλαδή υπάρχει ένας ακέραιος a_1 από τους $0, 1, 2, \dots, 9$ ώστε



$$a+\frac{a_1}{10} < x < a+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10}.$$

Αν ο x είναι ένα από τα σημεία διαίρεσης τότε βρίσκεται σε δύο διαστήματα σαν κοινό τους άκρο.

Διαλέγουμε το δεξιό διάστημα, δηλαδή αυτό που έχει το x σαν αριστερό άκρο. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει a_1, από τα $0, 1, 2, \dots, 9$, ώστε $a+\frac{a_1}{10} \le x < a+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10}$.

Μέχρι στιγμής κάναμε τα αρχικά βήματα μιας διαδικασίας: στο βήμα 0 επιλέξαμε τον ακέραιο a, και στο βήμα 1 τον a_1.
Στο βήμα 2 θα χωρίσουμε το διάστημα $[a+\frac{a_1}{10}, a+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10}]$ που βρήκαμε στο βήμα 1 σε 10 ίσα διαστήματα μήκους $1/10^2$ με τα σημεία διαίρεσης $a+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10^2}, a+\frac{a_1}{10}+\frac{2}{10^2}, \dots, a+\frac{a_1}{10}+\frac{9}{10^2}$.
Με τον ίδιο συλλογισμό όπως και στο βήμα 1, υπάρχει a_2 από τους $0, 1, 2, \dots, 9$ ώστε $a+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2} \le x < a+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{1}{10^2}$.
(Η περίπτωση της ισότητας ισχύει όταν το x συμπίπτει με ένα από τα διαιρετικά σημεία, οπότε διαλέγουμε το διάστημα που το έχει σαν αριστερό άκρο)

Συνεχίζουμε έτσι επ' άπειρον. Στο βήμα n θα διαιρέσουμε το διάστημα που βρήκαμε στο βήμα $n-1$ σε 10 ίσα διαστήματα μήκους $\frac{1}{10^n}$ και διαλέγουμε εκείνο που περιέχει το x (με επιλογή κάποτε του δεξιού των διαστημάτων που το x είναι κοινό άκρο σε δύο από αυτά) Βρίσκουμε έτσι ακέραιο a_n από τους $0, 1, \dots, 9$

ώστε $$a + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \le x < a + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} .$$

Ο αριθμός a ονομάζεται <u>ακέραιο μέρος</u> του x, ενώ οι $a_1, a_2, a_3, \dots$ ονομάζονται <u>δεκαδικά ψηφία</u> του x. Ο αριθμός $a + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$ ονομάζεται <u>n-οστή δεκαδική προσέγγιση</u> του x και συμβολίζεται $a + 0,a_1a_2\dots a_n$.

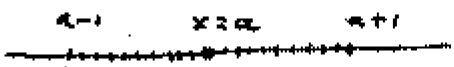
Συνηθίζουμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο $a + 0,a_1a_2a_3\dots$ για τον ίδιο τον αριθμό x. Ο $0,a_1a_2a_3\dots$ ονομάζεται <u>δεκαδικό μέρος</u> του x.

Όπως είδαμε, ισχύει: $a + 0.a_1a_2\dots a_n \le x < a + 0.a_1a_2\dots a_n + \frac{1}{10^n}$,

$$0 \le x - (a + 0.a_1a_2\dots a_n) < \frac{1}{10^n}$$

Καθώς το n μεγαλώνει, ο αριθμός $\frac{1}{10^n}$ μικραίνει απεριόριστα. Η τελευταία ανισότητα μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι η απόσταση του $a + 0.a_1a_2\dots a_n$ από τον x μικραίνει απεριόριστα. Δηλαδή η n-οστή δεκαδική προσέγγιση του x <u>προσεγγίζει τον x</u>, δικαιολογώντας έτσι την ονομασία της.

Ας δούμε, όμως, μερικά ακόμη λόγια για την επιλογή του δεξιού διαστήματος αν ο αριθμός x έπεφτε σε κάποιο βήμα να συνέπιπτε με ένα από τα σημεία διαίρεσης. Αν στο βήμα 0 ο x συμπίπτει με κάποιον ακέραιο a,



τότε, αν διαλέξουμε το δεξιό διάστημα $[a, a+1]$, τότε είναι φανερό ότι σε κάθε επόμενο βήμα ο x θα ταυτίζεται με το αριστερό άκρο του πιο αριστερού διαστήματος από τα 10 που θα εμφανίζονται. Άρα θα παρουσιάζονται οι εξής διαδοχικές δεκαδικές προσεγγίσεις:

$a,\ a+\frac{0}{10},\ a+\frac{0}{10}+\frac{0}{10^2},\ \dots$ Δηλαδή όλα τα δεκαδικά ψηφία θα είναι ίσα με 0. Αν, όμως, η τακτική μας είναι να διαλέξουμε το αριστερό διάστημα $[a-1, a]$, τότε σε κάθε επόμενο βήμα ο x θα ταυτίζεται με το δεξιό άκρο του πιο δεξιού διαστήματος από τα 10 που θα εμφανίζονται. Άρα θα έχουμε τις διαδοχικές προσεγγίσεις:

$a-1,\ a-1+\frac{9}{10},\ a-1+\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2},\ \dots$ Δηλαδή όλα τα δεκαδικά ψηφία θα είναι ίσα με 9. Αν, λοιπόν, στο βήμα 0 ο x είναι κάποιο σημείο διαίρεσης (δηλ. ακέραιος a) τότε θα έχει δύο δεκαδικές αναπαραστάσεις: $a+0{,}000\dots$ ή $a-1+0{,}999\dots$

ανάλογα με το αν επιλέξουμε δεξιό ή αριστερό διάστημα διαίρεσης.

Με την ίδια λογική είναι προφανές ότι, αν σε οποιοδήποτε βήμα n ο x συμπέσει για πρώτη φορά με σημείο διαίρεσης $a+\frac{a_1}{10}+\dots+\frac{a_n}{10^n}$, τότε, αν επιλέξουμε δεξιό διάστημα $[a+\dots+\frac{a_n}{10^n},\ a+\dots+\frac{a_n}{10^n}+\frac{1}{10^n}]$, τα επόμενα δεκαδικά ψηφία θα είναι όλα 0. Αν όμως επιλέξουμε αριστερό διάστημα $[a+\dots+\frac{a_n}{10^n}-\frac{1}{10^n},\ a+\dots+\frac{a_n}{10^n}]$, τότε το n-οστό ψηφίο θα είναι a_n-1 και όλα τα επόμενα θα είναι ίσα με 9. Άρα ο x θα έχει δύο δεκαδικές παραστάσεις:

$$a, a_1\dots a_{n-1}a_n 00\dots \quad \text{ή} \quad a, a_1\dots a_{n-1}\, a_n-1\ 99\dots$$

ανάλογα με το αν η τακτική μας είναι να επιλέξουμε δεξιό ή αριστερό διάστημα διαίρεσης.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι οποιοσδήποτε αριθμός x ή έχει μοναδική δεκαδική παράσταση ή έχει ακριβώς δύο δεκαδικές παραστάσεις εκ των οποίων η μία έχει μόνον μηδενικά από κάποιο ψηφίο και πέρα ενώ η άλλη έχει μόνον εννιάρια από το ίδιο σημείο και πέρα.

Σχετικά με την δεκαδική παράσταση ισχύει επίσης το εξής λίγο-πολύ γνωστό, το οποίο όμως δεν θα αποδείξουμε: ένας αριθμός είναι ρητός αν και μόνον αν η δεκαδική του παράσταση είναι από κάποιο ψηφίο και πέρα περιοδική.

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ – ΟΡΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

Χωρίς να υπεισέλθουμε σε φιλοσοφικού περιεχομένου σχετικά με το ακριβές νόημα των λέξεων που θα χρησιμοποιήσουμε, μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της ακολουθίας ως εξής:

" <u>ακολουθία</u> (πραγματικών αριθμών) είναι άπειρη επιλογή αριθμών με ορισμένη σειρά: πρώτος, δεύτερος, τρίτος, ... " Οι επιλεγμένοι αυτοί αριθμοί ονομάζονται <u>όροι</u> της ακολουθίας και συμβολίζονται με ένα γράμμα, κοινό για όλους τους όρους της ακολουθίας, και με έναν δείκτη ο οποίος δείχνει την σειρά επιλογής. Για παράδειγμα:

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$

Μπορούμε να φανταστούμε ότι ο δείκτης n παριστάνει χρονικές στιγμές, για παράδειγμα δευτερόλεπτα, και ότι κάθε δευτερόλεπτο επιλέγουμε έναν αριθμό. Φτιάχνουμε έτσι μια ακολουθία αριθμών: ο δεύτερος αριθμός "ακολουθεί" τον πρώτο, ο τρίτος "ακολουθεί" τον δεύτερο κ.ο.κ.

<u>Παραδείγματα</u>. Έχουμε ήδη συναντήσει μερικά παραδείγματα ακολουθιών.

(α) Η ακολουθία της οποίας ο n-οστός όρος δίνεται από τον τύπο $\alpha_n = \frac{1}{n}$. Δηλαδή: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

Αυτή η ακολουθία είναι παράδειγμα <u>φθίνουσας ακολουθίας</u>. Μια ακολουθία ονομάζεται φθίνουσα αν κάθε όρος είναι μικρότερος ή ίσος από τον προηγούμενό του: $\alpha_{n+1} \le \alpha_n$ για όλα τα n.

(β) Η ακολουθία με n-οστό όρο $\alpha_n = n$. Δηλαδή

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$

Αυτή είναι μια <u>αύξουσα ακολουθία</u>. Μια ακολουθία ονομάζεται αύξουσα αν κάθε όρος της είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον προηγούμενό του: $\alpha_{n+1} \ge \alpha_n$ για όλα τα n.

(γ) Η ακολουθία με όρο $a_n = 1$. Δηλαδή: $1, 1, 1, 1, 1, \dots$

Αυτή είναι μια <u>σταθερή ακολουθία</u>. Εδώ, προφανώς, "σταθερή" σημαίνει "δεν μεταβάλλεται".

(δ) Η ακολουθία $a_n = (-1)^{n+1}$. Δηλαδή: $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

Αυτή η ακολουθία δεν είναι ούτε αύξουσα ούτε φθίνουσα.

(ε) Η ακολουθία $a_n = \frac{1}{10^n}$: $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \dots$

Αυτή είναι φθίνουσα ακολουθία.

(στ) Η ακολουθία a_n = ο αριθμός των διαιρετών του n.

Δηλαδή: $1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, \dots$

Αυτή δεν είναι ούτε αύξουσα ούτε φθίνουσα.

Ας κάνουμε εδώ μερικές παρατηρήσεις.

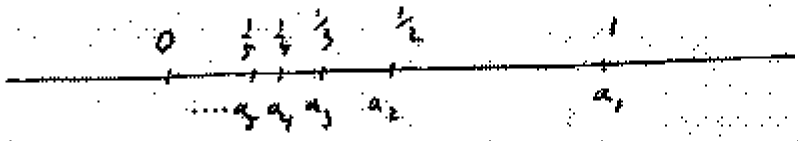
(I) Κάθε όρος μιας ακολουθίας "ακολουθεί" τον προηγούμενό του σε <u>σειρά επιλογής</u> (χρονικά, σύμφωνα με το εσωτερικό ρολόι των [illegible]) και <u>όχι σε μέγεθος</u>. Στο παράδειγμα (β) οι όροι αυξάνουν, στα παραδείγματα (α), (ε) οι όροι φθίνουν, στο παράδειγμα (γ) οι όροι δεν μεταβάλλονται, στα παραδείγματα (δ), (στ) οι όροι ανεβοκατεβαίνουν (πιο κανονικά στο (δ), πιο ακανόνιστα στο (στ)).

(II) Μια ακολουθία είναι (διαδοχική) επιλογή κάποιων αριθμών, <u>δεν</u> είναι το σύνολο των αριθμών αυτών. Στο παράδειγμα (γ) το σύνολο των αριθμών είναι το μονοσύνολο με μοναδικό στοιχείο το 1. Η ακολουθία <u>δεν</u> είναι ο αριθμός 1. Είναι η διαδοχική επιλογή

$1, 1, 1, 1, \dots$!

Το πλήθος των όρων μιας ακολουθίας είναι <u>άπειρο</u>, ενώ το πλήθος των τιμών που έχουν οι όροι της ακολουθίας μπορεί να είναι άπειρο (παρ. (α), (β), (ε), (στ)) ή πεπερασμένο (παρ. (γ), (δ)).

Έχει ήδη αναφερθεί ότι οι όροι της ακολουθίας $a_n = \frac{1}{n}$ γίνονται απεριόριστα μικροί καθώς αυξάνει το n. Μπορούμε να πούμε ότι η



απόσταση των αριθμών αυτών, πάνω στην πραγματική ευθεία, από το 0 γίνεται απεριόριστα μικρή.

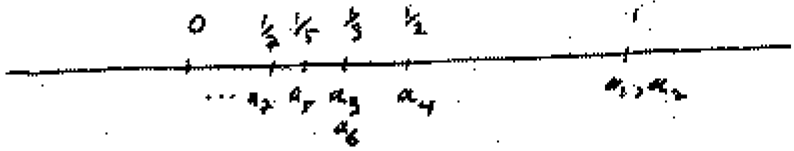
Το ίδιο ισχύει και για την ακολουθία $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Η απόσταση του a_n από το 0 είναι $|a_n - 0| = \frac{1}{n}$ η οποία γίνεται απεριόριστα μικρή καθώς ο δείκτης n αυξάνει.

Και στα δύο αυτά παραδείγματα η απόσταση του a_n από το 0, όχι μόνον γίνεται απεριόριστα μικρή, αλλά επιπλέον φθίνει: κάθε όρος είναι πιο κοντά στο 0 από τον προηγούμενό του. Αυτό δεν ισχύει γενικά. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την ακολουθία:

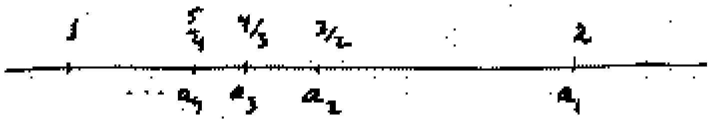
$$a_n = \begin{cases} 2/n, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \\ 1/n, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός.} \end{cases}$$

$1, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{4}, \ldots$



Είναι φανερό ότι η απόσταση των όρων από το 0 γίνεται απεριόριστα μικρή χωρίς όμως να φθίνει.

Η ακολουθία $a_n = \frac{n+1}{n}$ πλησιάζει τον αριθμό 1. Αυτό φαίνεται εύκολα αν αναλύσουμε: $a_n = 1 + \frac{1}{n}$. Η απόσταση του n-οστού όρου από το 1, δηλαδή η $|a_n - 1| = \frac{1}{n}$ γίνεται απεριόριστα μικρή καθώς το n αυξάνει

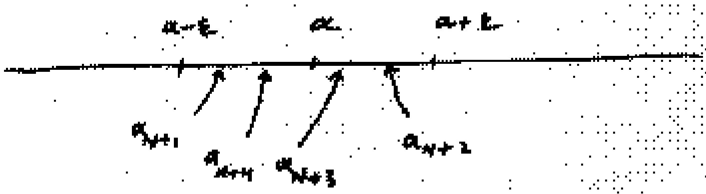


Συμφωνούμε να λέμε ότι μιά ακολουθία $a_1, a_2, a_3, \dots$ <u>συγκλίνει</u> (ή <u>τείνει</u>) σε έναν αριθμό a αν η απόσταση του n-οστού όρου από το a, $|a_n - a|$, γίνεται απεριόριστα μικρή.

Αυτό σημαίνει ότι, οποιοδήποτε θετικό αριθμό και αν πάρουμε, η $|a_n - a|$, από έναν δείκτη και μετά, θα γίνει μικρότερη από αυτόν τον αριθμό. Ή, με πιό πολλά σύμβολα: <u>για κάθε αριθμό $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιος δείκτης N ώστε</u>

$$\underline{|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{για όλα τα} \quad n > N}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι αν διαλέξουμε οποιοδήποτε διάστημα $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ με κέντρο το a και ακτίνα ε, τότε, από κάποιον δείκτη N και πέρα, όλοι οι όροι $a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \dots$ βρίσκονται μέσα σ'αυτό το διάστημα.



Χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $\underline{\lim a_n = a}$ ή $\underline{a_n \to a}$ όταν η ακολουθία a_n συγκλίνει στον αριθμό a.

<u>Παραδείγματα</u>

1. $a_n = \frac{1}{n}$. $\lim a_n = 0$

Απόδειξη: Θεωρούμε κάποιο θετικό αριθμό ε. Θα βρούμε κάποιον δείκτη N ώστε: $|a_n - 0| < \varepsilon$ για όλα τα $n > N$

Δηλαδή: $\frac{1}{n} < \varepsilon$ για όλα τα $n > N$

Ισοδύναμα: $n > \frac{1}{\varepsilon}$ για όλα τα $n > N$

Αν, για παράδειγμα, $\varepsilon = 0.001$ τότε θέλουμε

$n > 1000$ για όλα τα $n > N$.

Ο N που ζητάμε σ'αυτή την περίπτωση είναι ο $N = 1000$

Επί αν, $\varepsilon = 0.000001$ τότε θέλουμε

$n > 1000000$ για όλα τα $n > N$

Ο N που ζητάμε τώρα είναι ο $N = 1000000$.

Αν $\varepsilon = 0.00003$ τότε θέλουμε

$n > 33333{,}33\ldots$ για όλα τα $n > N$.

Ο N που ζητάμε είναι ο $N = 33333$

Και, γενικά, για τυχόντα $\varepsilon > 0$ ο N που ζητάμε είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος ο οποίος είναι μικρότερος ή ίσος του $\frac{1}{\varepsilon}$, δηλαδή το ακέραιο μέρος του $\frac{1}{\varepsilon}$. Το ακέραιο μέρος ενός αριθμού x συμβολίζεται με $[x]$.

Άρα $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

2. $a_n = \frac{1}{n^2}$. $\lim a_n = 0$

Απόδειξη: Θεωρούμε τυχόντα θετικό ε. Θα βρούμε κάποιον δείκτη N ώστε: $|a_n - 0| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$ για όλα τα $n > N$

Ισοδύναμα: $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ για όλα τα $n > N$.

Προφανώς ο N που ζητάμε είναι $N = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$

3. $a_n = \frac{n}{n+1}$. $\lim a_n = 1$

Απόδειξη: Θεωρούμε τυχόντα θετικό ε. Θα βρούμε δείκτη N ώστε: $|a_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ για όλα τα $n > N$

Ισοδύναμα: $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ για όλα τα $n > N$.

Ο N που ζητάμε είναι ο $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$.

4. $a_n = \frac{n^3 - 1}{n^3 + n + 1}$. $\lim a_n = 1$

Απόδειξη: Θεωρούμε τυχόντα $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε δείκτη N ώστε: $|a_n - 1| = \frac{n+2}{n^3 + n + 1} < \varepsilon$ για όλα τα $n > N$.

Τώρα πρέπει να προσέξουμε λίγο; Στα μέχρι τώρα παραδείγματα θέλαμε, αντίστοιχα: $\frac{1}{n}<\varepsilon$, $\frac{1}{n^2}<\varepsilon$, $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$.

Και στα τρία παραδείγματα μπορούσαμε να λύσουμε εύκολα τις αντίστοιχες ανισότητες : $n>\frac{1}{\varepsilon}$, $n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$.

Όμως η ανισότητα η οποία προκύπτει τώρα, $\frac{n+2}{n^3+n+1}<\varepsilon$, δεν είναι εύκολο να λυθεί (τρίτου βαθμού). Γι αυτό χρησιμοποιούμε το εξής τέχνασμα : <u>μεγαλώνουμε</u> το κλάσμα $\frac{n+2}{n^3+n+1}$ (είτε αυξάνοντας τον αριθμητή, είτε μικραίνοντας τον παρονομαστή είτε και με τους δύο τρόπους συγχρόνως) και βρίσκουμε μια καινούργια ποσότητα A .

Δηλαδή $\frac{n+2}{n^3+n+1}\leq A$

Αν τώρα βρούμε N ώστε $A<\varepsilon$ για όλα τα $n>N$, τότε, λόγω της μεταβατικής ιδιότητας των ανισοτήτων, θα έχουμε

$$\frac{n+2}{n^3+n+1}<\varepsilon \quad \text{για όλα τα } n>N.$$

Ένας τρόπος να μεγαλώσουμε το κλάσμα είναι $\frac{n+2}{n^3+n+1}\leq\frac{n+2n}{n^3}=\frac{3}{n^2}$

Αρκεί, λοιπόν, να βρούμε N ώστε : $\frac{3}{n^2}<\varepsilon$ για όλα τα $n>N$

Η τελευταία ανισότητα, όμως, είναι "εύκολη" : $n>\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}$ για όλα τα $n>N$

Προφανώς $N=\left[\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}\right]$.

Άλλος τρόπος να μεγαλώσουμε το κλάσμα είναι $\frac{n+2}{n^3+n+1}\leq\frac{3n}{n^3+n}=\frac{3}{n^2+1}$

Εύκολα βρίσκουμε $N=\left[\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}-1}\right]$

<u>Προσοχή</u> : ένας ακόμη τρόπος είναι $\frac{n+2}{n^3+n+1}\leq\frac{3n}{n}=3$

Ενώ, όμως, με τους δύο πρώτους τρόπους οι ποσότητες $\frac{3}{n^2}$, $\frac{3}{n^2+1}$ οι οποίες προέκυψαν μπορούσαν να γίνουν $<\varepsilon$ από κάποιο N και πέρα, με τον τελευταίο τρόπο το $\frac{3n}{n}=3$ που προκύπτει δεν γίνεται $<\varepsilon$ (π.χ. $\varepsilon=1$) από κανένα N και πέρα.

Πρέπει, λοιπόν, την ποσότητα A να την βρούμε με τέτοιο τρόπο ώστε

(i) να είναι ίσο το δοσμένο πλάτος, ώστε να μπορεί να επιλεγεί η αντίστοιχη $A < \varepsilon$ κάθε φορά.

(ii) να είναι μεγαλύτερη από το αρχικό $\frac{n+2}{n^3+n+1}$

(iii) να γίνεται απεριόριστα μικρή.

<u>Θεώρημα</u>: Αν μια ακολουθία a_n συγκλίνει τότε είναι φραγμένη.

Μια ακολουθία a_n ονομάζεται <u>φραγμένη</u> αν όλοι οι όροι της είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότεροι από κάποιον αριθμό: δηλαδή, αν υπάρχει M ώστε $|a_n| < M$ για όλα τα n.

<u>Απόδειξη</u> Έστω ότι η ακολουθία a_n συγκλίνει σε αριθμό a: $a_n \to a$. Τότε η $|a_n - a|$ γίνεται, από κάποιον δείκτη N και μετά, μικρότερη από 1. Δηλαδή $|a_n - a| < 1$ για όλα τα $n = N+1, N+2, N+3, \ldots$

Τότε $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ για $n = N+1, N+2, \ldots$

Επί πλέον $|a_1| < 1 + |a_1|$, $|a_2| < 1 + |a_2|$, $\ldots$, $|a_N| < 1 + |a_N|$.

Άρα $|a_n| < \max(1+|a_1|, 1+|a_2|, \ldots, 1+|a_N|, 1+|a|)$ για <u>όλα</u> τα n.

Άρα η a_n είναι φραγμένη.

Το θεώρημα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε ότι κάποιες ακολουθίες <u>δεν</u> συγκλίνουν.

<u>Παράδειγμα</u> Συγκλίνει η $a_n = (-1)^n n$;

Παρατηρούμε ότι $|a_n| = n$ και δεν υπάρχει κανένας αριθμός M ώστε: $n < M$ για όλα τα $n = 1, 2, 3, \ldots$. Άρα η ακολουθία a_n δεν είναι φραγμένη και βάσει του θεωρήματος δεν συγκλίνει.

<u>Θεώρημα</u> (<u>Αλγεβρικές πράξεις στις ακολουθίες</u>) Έστω $a_n \to a$, $b_n \to b$. Τότε $a_n + b_n \to a + b$, $a_n - b_n \to a - b$, $a_n b_n \to ab$ και

$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$

<u>Απόδειξη (όχι αυστηρή)</u>

(i) $|(a_n + b_n) - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$

Αφού οι αποστάσεις $|a_n - a|$, $|b_n - b|$ γίνονται απεριόριστα μικρές καθώς το n αυξάνει, και το άθροισμά τους $|a_n - a| + |b_n - b|$ θα γίνεται απεριόριστα μικρό. Άρα και η απόσταση του $a_n + b_n$ από το $a+b$ θα γίνεται απεριόριστα μικρή καθώς το n αυξάνει.

(ii) $|(a_n - b_n) - (a-b)| = |(a_n - a) - (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$.

Επαναλαμβάνουμε την ίδια σκέψη με το (i).

(iii) $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab|$

$$= |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \leq M|b_n - b| + |b||a_n - a|.$$

Στο τέλος χρησιμοποιήσαμε ότι, αφού η a_n συγκλίνει, υπάρχει αριθμός M ώστε: $|a_n| < M$ για όλα τα n.

Η ποσότητα $|b_n - b|$ γίνεται απεριόριστα μικρή καθώς το n αυξάνει. Άρα και η ποσότητα $M|b_n - b|$ γίνεται απεριόριστα μικρή.

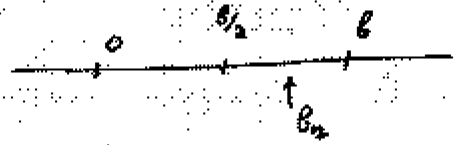
(*) Εδώ πρέπει να προσέξουμε λίγο: όταν πολλαπλασιάζουμε μια μεταβαλλόμενη ποσότητα, όπως η $|b_n - b|$, η οποία διαρκώς μικραίνει, με έναν σταθερό αριθμό, όπως ο M, τότε όσο μεγάλος κι αν είναι ο M, το γινόμενό τους θα μικραίνει διαρκώς. Όταν όμως πολλαπλασιάζουμε μια μεταβαλλόμενη ποσότητα, όπως η $|b_n - b|$, που μικραίνει διαρκώς, με μιαν άλλη μεταβαλλόμενη ποσότητα, όπως η $|a_n|$, για την οποία δεν γνωρίζουμε πολλά, τότε το γινόμενό τους μπορεί και να μην μικραίνει. Αν π.χ. $|b_n - b| = \frac{1}{n}$, αλλά $|a_n| = n^2$ τότε $|a_n||b_n - b| = n$. Εδώ έχουμε την πληροφορία ότι η a_n συγκλίνει και επομένως είναι φραγμένη. (*)

Με την ίδια λογική, η ποσότητα $|b||a_n - a|$ γίνεται απεριόριστα μικρή. Άρα το άθροισμα $M|b_n - b| + |b||a_n - a|$ γίνεται απεριόριστα μικρό και, επομένως, η $|a_n b_n - ab|$ γίνεται απεριόριστα μικρή καθώς το n αυξάνει.

(iv) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ $(b\neq 0)$

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n-b|}{|b_n||b|}$$

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση $b>0$



Επειδή $b_n \to b$, οι όροι b_n από κάποιο δείκτη και μετά θα βρίσκονται δεξιά από το $b/2$ (και κοντά στο b) δηλαδή $b_n > \frac{b}{2}$ ή $\frac{1}{b_n} < \frac{2}{b}$

Άρα για τα b_n από κάποιο δείκτη και μετά θα ισχύει:

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right| < \frac{2}{b^2}|b_n-b|$$

Επειδή η ποσότητα $|b_n-b|$ γίνεται αυθαίρετα μικρή και ο αριθμός $\frac{2}{b^2}$ είναι σταθερός, και η ποσότητα $\frac{2}{b^2}|b_n-b|$ θα γίνεται αυθαίρετα μικρή.
Άρα η απόσταση του $\frac{1}{b_n}$ από το $\frac{1}{b}$ γίνεται αυθαίρετα μικρή.

Παραδείγματα εφαρμογής του θεωρήματος. Όταν έχουμε μια συγκεκριμένη ακολουθία χωρίς να γνωρίζουμε εκ των προτέρων το όριό της, μας μπορούμε να την αναλύσουμε σε απλούστερες ακολουθίες των οποίων τα όρια γνωρίζουμε:

1. $a_n = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} \to 0\cdot 0 = 0$,

   $a_n = \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n} \to 0\cdot 0 = 0$

   και επαγωγικά:

   $a_n = \frac{1}{n^k} \to 0$ όταν το k είναι οποιαδήποτε δύναμη (φυσικός)

2. a_n = πολυώνυμο του $\frac{1}{n}$ = $\mu_0 + \mu_1\frac{1}{n} + \mu_2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \mu_k\left(\frac{1}{n}\right)^k$.

   Το μ_0 μπορεί να θεωρηθεί σαν σταθερή ακολουθία και προφανώς $\mu_0 \to \mu_0$.
   Κάθε άλλος όρος π.χ. ο $\mu_2\left(\frac{1}{n}\right)^2$ είναι γινόμενο της σταθερής ακολουθίας μ_2 και της $\frac{1}{n^2}$. Άρα $\mu_2\left(\frac{1}{n}\right)^2 \to \mu_2\cdot 0 = 0$.
   Προσθέτοντας: $a_n \to \mu_0 + 0 + \dots + 0 = \mu_0$

3. $a_n = \dfrac{\text{πολυώνυμο του } n}{\text{πολυώνυμο του } n}$, όπου τα δύο πολυώνυμα είναι ίδιου βαθμού

$$a_n = \frac{\mu_0+\mu_1 n+\mu_2 n^2+\dots+\mu_k n^k}{\lambda_0+\lambda_1 n+\lambda_2 n^2+\dots+\lambda_k n^k}, \quad \mu_k \neq 0,\ \lambda_k \neq 0 .$$

Τότε $$a_n = \frac{n^k\left(\mu_k+\mu_{k-1}\frac{1}{n}+\dots+\mu_0\frac{1}{n^k}\right)}{n^k\left(\lambda_k+\lambda_{k-1}\frac{1}{n}+\dots+\lambda_0\frac{1}{n^k}\right)} \longrightarrow \frac{\mu_k}{\lambda_k}$$

<u>Σχόλιο</u> Από την αρχή που έχουμε αποφασίσει ότι η αποτίμηση των διαφόρων προτάσεων και θεωρημάτων δεν θα γίνεται με μαθηματικά αυστηρά κριτήρια, αλλά θα βασίζεται περισσότερο στην εποπτική μας αντίληψη για τους αριθμούς, μπορεί κανείς, αρκετά δικαιολογημένα, να πει ότι οι αποδείξεις που δώσαμε στο προηγούμενο θεώρημα είναι τελείως άχρηστες: είναι <u>διαισθητικά προφανές</u> ότι αν οι αριθμοί a_n προσεγγίζουν τον αριθμό a και οι αριθμοί b_n τον b, τότε το άθροισμα a_n+b_n ή το γινόμενο $a_n b_n$ θα προσεγγίζουν το $a+b$ ή το ab αντίστοιχα. Δηλαδή, αν ο a_n είναι "περίπου" a και ο b_n είναι "περίπου" b, τότε ο $a_n b_n$ είναι "περίπου" ab.

Παρ' όλα αυτά η απόδειξη που κάναμε <u>έχει</u> κάποια σημασία: όταν μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε <u>πόσο</u> είναι κοντά το "περίπου". Με άλλα λόγια όταν θέλουμε να κάνουμε <u>εκτιμήσεις</u> της απόστασης του $a_n b_n$ από τον ab. Στην εκτίμηση που ακολουθεί θα περιοριστούμε στην περίπτωση του γινομένου αφού και για τις άλλες πράξεις ισχύουν ανάλογα. Οι πιθανές εκτιμήσεις είναι δύο ειδών.

(1) Έστω ότι γνωρίζουμε πως οι αποστάσεις $|a_n-a|$, $|b_n-b|$, από κάποιον δείκτη N και μετά, είναι μικρότερες ενός $\varepsilon>0$. Τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε την απόσταση $|a_n b_n - ab|$ από την απόδειξη του θεωρήματος, αρκεί να γνωρίζουμε και κάποιον αριθμό M ώστε: $|a_n|<M$ για όλα τα n.

$$|a_n b_n - ab| < M\varepsilon + |b|\varepsilon = (M+|b|)\varepsilon$$, από τον δείκτη N και μετά.

Οι αριθμοί M, B θεωρούνται δεδομένοι όπως και οι ε, N.

(2) Έστω ότι έχουμε μιαν εκτίμηση της μορφής $|a_n - a| < \frac{C}{n^k}$ για κάθε n, και $|b_n - b| < \frac{D}{n^k}$ για κάθε n.

Οι αριθμοί C, D, k θεωρούνται γνωστοί. Αυτές οι εκτιμήσεις σημαίνουν ότι οι αποστάσεις $|a_n - a|$, $|b_n - b|$ μικραίνουν πιό γρήγορα απ' ότι το αντίστροφο της k-οστής δύναμης του n.

Όσο πιό μεγάλο είναι το k τόσο πιό "γρήγορα" μικραίνουν αυτές οι αποστάσεις, όπως είναι προφανές. Αν πάλι γνωρίζουμε τους M, B, τότε έχουμε

$$|a_n b_n - ab| < M\frac{D}{n^k} + |b|\frac{C}{n^k} = \frac{MD + |b|C}{n^k}$$

Ο αριθμός $MD + |b|C$ είναι σταθερός, και, επομένως, η απόσταση $|a_n b_n - ab|$ μικραίνει επίσης πιό γρήγορα απ' ότι το αντίστροφο της k-οστής δύναμης του n.

Παράδειγμα $a_n = \frac{n^3+n}{2n^3+n+3}$, $b_n = \frac{3n^3-n}{4n^3-n+2}$

Τότε $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4}$. Επίσης:

$$|a_n| = \frac{n^3+n}{2n^3+n+3} \le \frac{n^3+n^3}{2n^3} = 1 \quad \text{Δηλαδή } M = 1$$

$$|a_n - a| = \left| \frac{n^3+n}{2n^3+n+3} - \frac{1}{2} \right| = \frac{|n-3|}{4n^3+2n+6} \le \frac{n+3}{4n^3} \le \frac{n+3n}{4n^3} = \frac{1}{n^2}$$

Δηλαδή $C = 1$, $k = 2$

$$|b_n - b| = \left| \frac{3n^3-n}{4n^3-n+2} - \frac{3}{4} \right| = \frac{n+6}{16n^3-4n+8} \le \frac{n+6n}{16n^3-4n^3} = \frac{7n}{12n^3} = \frac{7/12}{n^2}$$

Δηλαδή $D = 7/12$, $k = 2$

Τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\left| \frac{(n^3+n)(3n^3-n)}{(2n^3+n+3)(4n^3-n+2)} - \frac{3}{8} \right| \le \frac{1 \cdot 7/12 + 3/4 \cdot 1}{n^2} = \frac{4/3}{n^2}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την ακολουθία $a_n = n$. Δηλαδή $1, 2, 3, 4, \dots$. Είναι γνωστό ότι, καθώς το n αυξάνει, ο a_n γίνεται απεριόριστα μεγάλος. Λέμε τότε ότι η ακολουθία a_n αποκλίνει στο $+\infty$ και το συμβολίζουμε με <u>$\lim a_n = +\infty$</u> ή <u>$a_n \to +\infty$</u>.

Γενικά, λέμε, ότι μια ακολουθία a_n <u>αποκλίνει στο $+\infty$</u> αν ο n-οστός όρος της γίνεται απεριόριστα μεγάλος (δηλαδή μεγαλύτερος από οποιονδήποτε θετικό αριθμό) καθώς το n αυξάνει. Αυτό σημαίνει ότι για οποιονδήποτε θετικό αριθμό $M>0$, υπάρχει κάποιος δείκτης N ώστε: $a_n > M$ για όλους τους δείκτες $n > N$.

<u>Παραδείγματα</u>

(1) $a_n = n^2$ $\lim a_n = +\infty$

Απόδειξη: Θεωρούμε τυχόντα θετικό αριθμό M. Ζητάμε δείκτη N ώστε: $a_n = n^2 > M$ για όλα τα $n > N$.

Ισοδύναμα: $n > \sqrt{M}$ για όλα τα $n > N$

Ο N που ζητάμε είναι ο $N = [\sqrt{M}]$

(2) $a_n = \sqrt{n}$ $\lim a_n = +\infty$

Απόδειξη: Θεωρούμε τυχόντα θετικό M. Ζητάμε δείκτη N ώστε: $a_n = \sqrt{n} > M$ για όλα τα $n > N$.

Ισοδύναμα: $n > M^2$ για όλα τα $n > N$

Ο N που ζητάμε είναι ο $N = [M^2]$

(3) $a_n = n^4 + n^3 + 2$ $\lim a_n = +\infty$

Απόδειξη: Θεωρούμε τυχόντα $M > 0$. Ζητάμε δείκτη N ώστε

$a_n = n^4 + n^3 + 2 > M$ για όλα τα $n > N$

Τώρα η ανισότητα $n^4 + n^3 + 2 > M$ δεν μπορεί να λυθεί ως προς n. Χρησιμοποιούμε λοιπόν το εξής τέχνασμα: <u>μικραίνουμε</u> το $n^4 + n^3 + 2$.

Για παράδειγμα: $n^4+n^3+2>n^4$. Αν βρούμε δείκτη N ώστε

$n^4>M$ για όλα τα $n>N$

τότε λόγω της μεταβατικής ιδιότητας των ανισοτήτων θα ισχύει:

$n^4+n^3+2>M$ για όλα τα $n>N$

Εύκολα βλέπουμε ότι ο N που ζητάμε είναι $N=[\sqrt[4]{M}]$.

Επίσης, λέμε ότι μια ακολουθία a_n αποκλίνει στο $-\infty$ αν ο n-οστός όρος της γίνεται απεριόριστα μεγάλος αρνητικός καθώς το n αυξάνει. Αυτό σημαίνει ότι για οποιοδήποτε θετικό $M>0$, υπάρχει κάποιος δείκτης N ώστε:

$a_n<-M$ για όλους τους δείκτες $n>N$.

Επειδή η ανισότητα $a_n<-M$ είναι ισοδύναμη με την $-a_n>M$, είναι φανερό ότι η a_n αποκλίνει στο $-\infty$ αν και μόνον αν η $-a_n$ αποκλίνει στο $+\infty$. Ώστε τα προηγούμενα τρία παραδείγματα $n^2, \sqrt{n}, n^4+n^3+2$ δίνουν αντίστοιχα παραδείγματα $-n^2, -\sqrt{n}, -n^4-n^3-2$ ακολουθιών που αποκλίνουν στο $-\infty$.

Θα πρέπει να πούμε και δυο λόγια για πράξεις ακολουθιών όταν η μία τουλάχιστον από αυτές αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.
Θα μελετήσουμε ενδεικτικά για δύο μονάχα περιπτώσεις. Όλες οι άλλες περιπτώσεις καλύπτονται με την ίδια λογική.

(I) Τι γίνεται με το a_n+b_n.

Αν $a_n\to+\infty$ και $b_n\to+\infty$, τότε $a_n+b_n\to+\infty$.
Αυτό είναι αναμενόμενο, διότι το άθροισμα αριθμών, οι οποίοι είναι απεριόριστα μεγάλοι, είναι ακόμα πιο μεγάλο.

Αν $a_n\to+\infty$ και $b_n\to b$, τότε $a_n+b_n\to+\infty$.
Αυτό ισχύει διότι, αφ' ενός ο a_n γίνεται απεριόριστα μεγάλος, αφ' ετέρου

ο b_n είναι φραγμένος (αφού b_n συγκλίνει) κι έτσι δεν μπορεί να γίνει απεριόριστα αρνητικός: $|b_n| \le M$ άρα $b_n > -M$ για όλα τα n. Άρα από τον a_n αφαιρούμε το πολύ $-M$ μονάδες, κι έτσι ο $a_n + b_n$ γίνεται απεριόριστα μεγάλος.

Αν $a_n \to +\infty$ και $b_n \to -\infty$, τότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε τίποτε για το $a_n + b_n$.

Για παράδειγμα: (i) $a_n = n^2 \to +\infty$, $b_n = -n \to -\infty$

και $a_n + b_n = n^2 - n = n(n-1) \to +\infty$

(ii) $a_n = n^2 \to +\infty$, $b_n = -n^2 \to -\infty$

και $a_n + b_n = n^2 - n^2 = 0 \to 0$

(iii) $a_n = n^2 \to +\infty$, $b_n = -n^3 \to -\infty$

και $a_n + b_n = n^2 - n^3 = -n^2(n-1) \to -\infty$.

Το λεπτό σημείο είναι ότι το a_n γίνεται μεγάλο θετικό, το b_n μεγάλο αρνητικό αλλά εξαρτάται από το σχετικό τους μέγεθος το αποτέλεσμα του $a_n + b_n$.

(II) Τι γίνεται με το $a_n b_n$.

Αν $a_n \to +\infty$ και $b_n \to +\infty$, τότε $a_n b_n \to +\infty$. Είναι φανερό διότι πολλαπλασιάζουμε απεριόριστα μεγάλες θετικές ποσότητες και το αποτέλεσμα είναι απεριόριστα μεγάλο θετικό.

Αν $a_n \to +\infty$ και $b_n \to -\infty$, τότε $a_n b_n \to -\infty$. Πάλι έχουμε απεριόριστα μεγάλο $a_n b_n$, αλλά αρνητικό διότι τα a_n, b_n έχουν αντίθετο πρόσημο.

Αν $a_n \to +\infty$ και $b_n \to b > 0$, τότε $a_n b_n \to +\infty$.

Ο a_n είναι απεριόριστα μεγάλος και τον πολλαπλασιάζουμε με μια ποσότητα b_n η οποία είναι "περίπου" b. Είναι φανερό ότι ο $a_n b_n$ θα είναι θετικός και, ως προς το μέγεθος, "περίπου" $a_n b$, δηλαδή απεριόριστα μεγάλος καθώς το n αυξάνει.

Ομοίως, αν $a_n \to +\infty$ και $b_n \to b < 0$, τότε $a_n b_n \to -\infty$.

Αν $a_n \to +\infty$ και $b_n \to 0$, τότε δεν συμπεραίνουμε τίποτε για το $a_n b_n$.

Για παράδειγμα: (i) $a_n = n \to +\infty$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$

και $a_n b_n = \sqrt{n} \to +\infty$

(ii) $a_n = n \to +\infty$, $b_n = \frac{1}{n} \to 0$

και $a_n b_n = 1 \to 1$

(iii) $a_n = n \to +\infty$, $b_n = \frac{1}{n^2} \to 0$

και $a_n b_n = \frac{1}{n} \to 0$.

Ανάλογα δηλαδή με το σχετικό μέγεθος των a_n, b_n το γινόμενό τους $a_n b_n$ μπορεί να έχει οποιοδήποτε όριο.

Θεώρημα (i) Αν $a_n \le b_n$ για κάθε n και $a_n \to a$, $b_n \to b$ τότε $a \le b$.

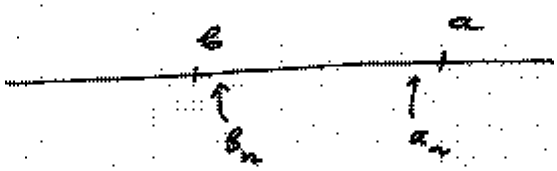
(ii) Αν $a_n \le b_n$ για κάθε n και $a_n \to +\infty$, τότε $b_n \to +\infty$

(iii) Αν $a_n \le b_n$ για κάθε n και $b_n \to -\infty$ τότε $a_n \to -\infty$.

Απόδειξη (όχι αυστηρή). Το (ii) είναι αρκετά πιστευτό. Αφού το a_n γίνεται απεριόριστα μεγάλο και το b_n είναι μεγαλύτερο ή ίσο του a_n, είναι επόμενο ότι και το b_n θα γίνεται απεριόριστα μεγάλο καθώς το n αυξάνει.

Η ιδέα πίσω από το (iii) είναι η ίδια.

(i) Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε κάτι αδύνατο, ότι $b < a$.

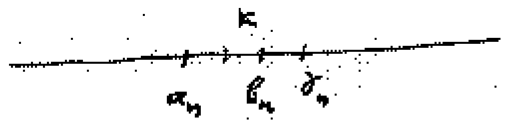


Αφού, για αρκετά μεγάλους δείκτες n, το b_n είναι πολύ κοντά στο b και το a_n είναι πολύ κοντά στο a, είναι φανερό από το σχήμα ότι το b_n θα είναι αριστερά του a_n.

Αυτό αντιφάσκει με το ότι $a_n \le b_n$ για όλα τα n.

__Θεώρημα__ (Σάντουιτς) Αν $a_n \le b_n \le \gamma_n$ για κάθε n και $a_n \to K$, $\gamma_n \to K$, τότε $b_n \to K$.

__Απόδειξη__ (όχι αυστηρή)



Καθώς το n αυξάνει, τα a_n, γ_n πλησιάζουν απεριόριστα τον αριθμό K. Ο b_n είναι ανάμεσα στα a_n, γ_n, άρα θα πλησιάζει κι αυτός απεριόριστα το K.

Θα εξετάσουμε τώρα μερικά σημαντικά παραδείγματα ακολουθιών.

__Παραδείγματα__

(1) __Γεωμετρική πρόοδος__ $a_n = a^n$, όπου a είναι πραγματικός αριθμός. Διακρίνουμε διάφορες περιπτώσεις:

(i) $a > 1$. Τότε υπάρχει θετικός αριθμός $h > 0$ ώστε $a = 1 + h$. Άρα $a^n = (1+h)^n \ge 1 + hn$.

Επειδή $h > 0$, η ακολουθία $1 + hn$ αποκλίνει στο $+\infty$.

Από προηγούμενο θεώρημα, $a^n \to +\infty$.

Χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα $(1+h)^n \ge 1 + hn$, για $h > 0$.

Αυτή είναι μία σημαντική ανισότητα και ισχύει πιο γενικά.

__Ανισότητα του Bernoulli__: Αν $h > -1$ και ο n είναι φυσικός αριθμός, τότε $(1+h)^n \ge 1 + nh$.

Η απόδειξη της ανισότητας αυτής είναι εύκολη και γίνεται με την μέθοδο της επαγωγής ως προς τον φυσικό αριθμό n.

(ii) $a = 1$. Τότε προφανώς $a^n = 1 \to 1$.

(iii) $0 < a < 1$. Τότε $\frac{1}{a} > 1$, και υπάρχει $h > 0$ ώστε

$\frac{1}{a} = 1 + h$, $a = \frac{1}{1+h}$, $a^n = \frac{1}{(1+h)^n} \le \frac{1}{1+hn} < \frac{1}{hn}$.

Άρα $0 < a^n < \frac{1}{hn}$. Από την ιδιότητα Σάντουιτς, $a^n \to 0$.

(iv) $\alpha = 0$. Τότε $\alpha^n = 0 \to 0$

(v) $-1 < \alpha < 0$. Τότε $0 < |\alpha| < 1$ και

$|\alpha^n| = |\alpha|^n \to 0$. Άρα αφού $|\alpha^n| \to 0$, $\alpha^n \to 0$.

(vi) $\alpha = -1$. $\alpha^n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει πουθενά.

(vii) $\alpha < -1$. Τότε $|\alpha| > 1$, $|\alpha|^n \to +\infty$.

Άρα, η α^n μεγαλώνει απεριόριστα ως προς το μέγεθος $|\alpha^n|$, αλλά το πρόσημό της εναλλάσσεται διαδοχικά. Δηλαδή η α^n ούτε συγκλίνει σε κανένα αριθμό ούτε αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

<u>Συμπέρασμα</u>:

$\alpha^n \to +\infty$, αν $1 < \alpha$

$\alpha^n \to 1$, αν $1 = \alpha$

$\alpha^n \to 0$, αν $-1 < \alpha < 1$

α^n ούτε συγκλίνει ούτε αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αν $\alpha \leq -1$

(2) $\alpha_n = \sqrt[n]{p}$, όπου p είναι ένας σταθερός θετικός αριθμός ($p > 0$).

Ξεχωρίζουμε τρεις περιπτώσεις:

(i) $p > 1$. Τότε $\alpha_n > 1$ και γράφουμε $\alpha_n = 1 + h_n$, όπου $h_n > 0$. Από την ανισότητα του Bernoulli:

$$p = \alpha_n^n = (1 + h_n)^n \geq 1 + n h_n, \quad 0 < h_n \leq \frac{p-1}{n}.$$

Από την ιδιότητα "sandwich": $h_n \to 0$, $\alpha_n \to 1$.

<u>Συμπέρασμα</u>: $\sqrt[n]{p} \to 1$

(ii) $p = 1$. Τότε, προφανώς, $\alpha_n = 1 \to 1$.

(iii) $0 < p < 1$. Τότε $\frac{1}{\alpha_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{p}}$. Όμως $\frac{1}{p} > 1$ και από την περίπτωση (i) έχουμε $\frac{1}{\alpha_n} \to 1$. Άρα $\alpha_n \to 1$.

Άρα σε κάθε περίπτωση $\sqrt[n]{p} \to 1$.

(3) $a_n = \sqrt[n]{n}$. Προφανώς $a_n \ge 1$ για όλα τα n. Άρα $\sqrt{a_n} \ge 1$.

Θεωρούμε $\sqrt{a_n} = 1 + h_n$, $h_n \ge 0$. Η ανισότητα Bernoulli δίνει:

$$\sqrt{n} = \sqrt{a_n}^{\,n} = (1+h_n)^n \ge 1 + nh_n \ , \quad 0 \le h_n \le \frac{\sqrt{n}-1}{n} < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Άρα, από ιδιότητα "σάντουιτς": $h_n \to 0$.

<u>Συμπέρασμα</u>: $\sqrt[n]{n} \to 1$.

(4) $a_n = \dfrac{n}{a^n}$, όπου a είναι σταθερός αριθμός μεγαλύτερος από 1.

Θεωρούμε πάλι $\sqrt{a_n} = \dfrac{\sqrt{n}}{(\sqrt{a})^n}$. Επειδή $a > 1$, έπεται ότι $\sqrt{a} > 1$, δηλαδή $\sqrt{a} = 1 + h$ με $h > 0$. Από την ανισότητα του Bernoulli:

$$0 < \sqrt{a_n} = \frac{\sqrt{n}}{(1+h)^n} \le \frac{\sqrt{n}}{1+nh} < \frac{\sqrt{n}}{nh} = \frac{1}{h\sqrt{n}}.$$

Από την ιδιότητα "σάντουιτς": $\sqrt{a_n} \to 0$, $a_n = (\sqrt{a_n})^2 \to 0^2 = 0$.

<u>Συμπέρασμα</u>: $\dfrac{n}{a^n} \to 0$, όταν $a > 1$.

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το εξής αποτέλεσμα:

$\dfrac{n^k}{a^n} \to 0$, όπου ο a είναι σταθερός αριθμός > 1 και ο k είναι σταθερός φυσικός αριθμός.

Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \dfrac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}$. Επειδή $\sqrt[k]{a} > 1$, από το προηγούμενο συμπέρασμα παίρνουμε: $a_n \to 0$. Άρα:

$$\frac{n^k}{a^n} = a_n^k \to 0^k = 0.$$

(5) Η "γεωμετρική σειρά" $a_1 = 1$, $a_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$ ($n \ge 2$) όπου q είναι κάποιος σταθερός αριθμός.

Είναι εύκολο να αποδείξει κανείς ότι

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1-q^n}{1-q}, & q \ne 1 \\ n, & q = 1 \end{cases}$$

Αν τώρα, $q=1$, τότε $a_n \to +\infty$.

Αν $-1<q<1$, τότε $q^n \to 0$ (παράδειγμα (1)) και $a_n \to \frac{1}{1-q}$

Αν $q>1$, τότε $q^n \to +\infty$ και $a_n \to +\infty$.

Αν $q \leq -1$, τότε η a_n δεν συγκλίνει πουθενά ούτε αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

<u>Συμπέρασμα</u>:
$$1+q+q^2+\dots+q^{n-1} \longrightarrow \begin{cases} +\infty, & \text{αν } q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q}, & \text{αν } -1<q<1 \end{cases}$$

<u>Σχόλιο</u>: Στο παράδειγμα (9) αποδείξαμε ότι $\frac{n^k}{a^n} \to 0$, όταν k φυσικός και $a>1$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{n^k}{a^n} = \frac{\beta_n}{\gamma_n}$$ όπου β_n είναι η ακολουθία $\left(\frac{1}{a}\right)^n$ και

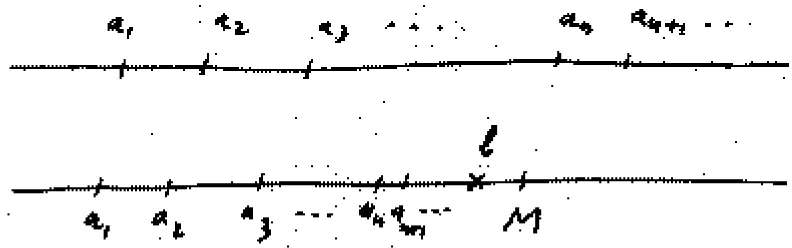
γ_n είναι η ακολουθία $\frac{1}{n^k}$. Και οι δύο ακολουθίες τείνουν στο 0.

Αφού το πηλίκο $\frac{\beta_n}{\gamma_n} \to 0$, ο όρος β_n είναι, καθώς το n αυξάνει, όλο και μικρότερο σε σχέση με το γ_n. Άρα μπορούμε να πούμε σε "ελεύθερη γλώσσα" ότι η ακολουθία β_n μικραίνει πιο γρήγορα από την γ_n. Ή, πιο συγκεκριμένα:

<u>"Η γεωμετρική πρόοδος p^n $\left(0<p=\frac{1}{a}<1\right)$ μικραίνει πιο γρήγορα από την αντίστροφη της k δύναμης του n, $\frac{1}{n^k}$."</u>

Η φρασεολογία αυτή ισχύει πιο γενικά σε κάθε περίπτωση όπου $\beta_n \to 0$, $\gamma_n \to 0$ και $\frac{\beta_n}{\gamma_n} \to 0$.

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα των ακολουθιών προέρχεται από την γεωμετρική μας αντίληψη για τους αριθμούς σαν σημεία μιας ευθείας. Όταν τοποθετούμε αριθμούς πάνω στην ευθεία, τον έναν μετά τον άλλον διαδοχικά, ώστε ο κάθε αριθμός να τοποθετείται <u>δεξιά</u> του προηγουμένου του, ισχύει δύο περιπτώσεις υπάρχουν: είτε οι αριθμοί αυτοί απομακρύνονται απεριόριστα προς τα δεξιά μέρη της ευθείας ξεπερνώντας οποιονδήποτε αριθμό,



είτε υπάρχει κάποιος αριθμός M δεξιά όλων των αριθμών μας.

Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε την αίσθηση ότι οι διαδοχικοί αριθμοί "κάπου γνέφουν", δηλαδή ότι προσεγγίζουν κάποιον αριθμό ο οποίος δεν είναι δεξιά του M.

Όλα αυτά μας υπαγορεύουν να δεχτούμε την βασική αρχή:

<u>Ιδιότητα των αυξουσών ακολουθιών</u>: Έστω ακολουθία a_n η οποία είναι αύξουσα (δηλ. $a_n \le a_{n+1}$ για κάθε n). Τότε:

(i) είτε $a_n \to +\infty$

(ii) είτε υπάρχει κάποιος αριθμός M ώστε $a_n \le M$ για κάθε n.

Στην περίπτωση (ii) η ακολουθία συγκλίνει σε κάποιον αριθμό ℓ και $\ell \le M$

Υπάρχει επίσης ανάλογη ιδιότητα των φθινουσών ακολουθιών.

Η ιδιότητα αυτή είναι χρήσιμη με δύο τρόπους:

<u>1ος τρόπος</u>: Εύρεση ορίων ακολουθιών οι οποίες δεν ανάγονται εύκολα σε απλούστερες ακολουθίες.

<u>Παραδείγματα</u>

(i) $a_n = \frac{a^n}{n!}$, όπου a είναι θετικός αριθμός και το σύμβολο $n!$ δηλώνει το $1\cdot 2\cdot 3\cdots n$ (το γινόμενο όλων των φυσικών από το 1 μέχρι το n)

Πρώτη μας δουλειά είναι να δούμε αν η ακολουθία είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Εξετάζουμε αν $a_{n+1} \le a_n$, $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{a^n}{n!}$,

$a \le n+1$, $a-1 \le n$

Άρα από την στιγμή που ο δείκτης n ξεπεράσει τον $a-1$, η ακολουθία αρχίζει να φθίνει. Δηλαδή, αν παραλείψουμε κάποιους αρχικούς όρους η ακολουθία είναι φθίνουσα.

Δεύτερη δουλειά είναι να δούμε αν υπάρχει αριθμός μικρότερος από όλους τους όρους της ακολουθίας μας. Πράγματι, $0 \le a_n$ για όλα τα n.

Άρα η a_n (αγνοώντας τους αρχικούς όρους) είναι φθίνουσα και όλοι οι όροι της είναι μεγαλύτεροι από το 0. Άρα η a_n συγκλίνει σε κάποιον αριθμό $\ell \ge 0$: $a_n \longrightarrow \ell$.

Μένει να βρούμε το ℓ.

Παρατηρούμε ότι: $a_{n+1} = \frac{a}{n+1} \cdot a_n$

Όμως $a_{n+1} \to \ell$, $a_n \to \ell$, $\frac{a}{n+1} \to 0$. Άρα

$$\ell = 0 \cdot \ell \quad , \quad \ell = 0 .$$

Άρα : $\frac{a^n}{n!} \longrightarrow 0$, όταν $a > 0$

Το ίδιο συμπέρασμα έχουμε όταν $a = 0$ $(a_n = 0 \to 0)$ και όταν $a < 0$: $|a_n| = \frac{|a|^n}{n!} \longrightarrow 0$ (αφού $|a| > 0$).

(ii) Θεωρούμε την ακολουθία a_n η οποία ορίζεται από τον <u>αναδρομικό τύπο</u>

a_1 = κάποιος σταθερός αριθμός (δηλαδή δεδομένος) και <u>θετικός</u> $(a_1 > 0)$

$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{y}{a_n} \right)$, $n \ge 1$

όταν ο y είναι επίσης σταθερός θετικός αριθμός $(y > 0)$

Πάλι ελέγχουμε αν η ακολουθία είναι αύξουσα ή φθίνουσα :

$a_{n+1} \lesseqgtr a_n$, $\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{y}{a_n}\right) \lesseqgtr a_n$, $\frac{y}{a_n} \lesseqgtr a_n$, $y \lesseqgtr a_n^2$

[Στο τελευταίο βήμα χρειαζόμαστε ότι $a_n > 0$. Αυτό όμως είναι εύκολο να αποδειχθεί επαγωγικά !] , $\sqrt{y} \lesseqgtr a_n$

Άρα μένει να ελέγξουμε αν $\sqrt{y} \lessgtr a_n$.

Όμως $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{y}{a_n}\right) \ge \frac{1}{2}\, 2\sqrt{a_n}\sqrt{\frac{y}{a_n}} = \sqrt{y}$, $n \ge 1$.

[από την γνωστή ανισότητα $x + y \ge 2\sqrt{x}\sqrt{y}$].

Άρα όλοι οι όροι από τον a_2 και πέρα είναι $\ge$ του $\sqrt{y}$.

Άρα η ακολουθία φθίνει από τον a_2 και πέρα.

Επίσης όλοι οι όροι είναι > 0.

Άρα η ακολουθία a_n συγκλίνει σε κάποιον αριθμό $\ell \ge 0$, $a_n \to \ell$.

Μένει να βρούμε τον ℓ.

Όμως: $a_n \to \ell$, $a_{n+1} \to \ell$.

Στην σχέση $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{y}{a_n}\right)$ παίρνουμε όρια και στα δύο πλευρά:

$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{y}{\ell}\right)$, $\ell^2 = y$, $\ell = \sqrt{y}$ (διότι $\ell \ge 0$)

Άρα $a_n \to \sqrt{y}$

<u>2ος τρόπος</u> Μπορούμε να <u>ορίσουμε</u> αριθμούς σαν όρια συγκλινουσών ακολουθιών.

<u>Παραδείγματα</u>:

(i) Το πρώτο προηγούμενο παράδειγμα: $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{y}{a_n}\right)$ ($y > 0$). Αφού αποδείξαμε ότι η a_n είναι φθίνουσα και όλοι οι όροι της μεγαλύτεροι από 0, συμπεράναμε ότι η a_n συγκλίνει σε κάποιον αριθμό $\ell \ge 0$. Καταλήξαμε στο ότι ο ℓ είναι λύση της εξίσωσης $\ell^2 = y$.

Άρα αποδείξαμε ότι η $x^2 = y$ <u>έχει</u> λύση (κάποιον θετικό αριθμό) και έτσι αποδείξαμε την <u>ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας $\sqrt{y}$</u>: είναι εκείνος ο αριθμός που αποτελεί το όριο της συγκλίνουσας ακολουθίας.

(ii) $\quad a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

Προφανώς η a_n είναι αύξουσα ακολουθία, αφού ο a_{n+1} προκύπτει από τον a_n με πρόσθεση του $\frac{1}{(n+1)!} > 0$.

Μένει να αποδείξουμε ότι είναι φραγμένη, δηλαδή ότι υπάρχει αριθμός M ώστε $a_n \le M$ για όλα τα n.

Παρατηρούμε ότι:
$$3! = 1\cdot 2\cdot 3 > 1\cdot 2\cdot 2 = 2^2$$
$$4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 > 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^3$$
$$\vdots$$
$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n > 1\cdot \underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{n-1} = 2^{n-1}$$

Άρα
$$a_n < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} <$$
$$< 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3$$

Άρα η a_n συγκλίνει σε κάποιον αριθμό τον οποίο συμβολίζουμε με e:

$$a_n \longrightarrow e \quad \text{και} \quad e \le 3.$$

$$\underline{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \longrightarrow e}$$

Μπορεί κανείς να αποδείξει ότι μία άλλη ακολουθία, η $(1+\frac{1}{n})^n$, έχει επίσης όριο τον αριθμό e. Για να εξετάσουμε την $(1+\frac{1}{n})^n$ χρησιμοποιούμε τον τύπο του Newton $(a=1,\ b=\frac{1}{n})$

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}a^{n-k}b^k + \dots$$
$$\dots + \frac{n(n-1)\cdots 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdots (n-1)}\,a\,b^{n-1} + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdots n}\,b^n$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\,\frac{1}{n^k} + \dots$$
$$\dots + \frac{n(n-1)\cdots 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdots (n-1)}\,\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdots n}\,\frac{1}{n^n} =$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{(n-1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n}\right) + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Αν γράψουμε τον αντίστοιχο τύπο για τον $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ θα δούμε ότι αυτός προκύπτει αν στον κάθε όρο του $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ αντικαταστήσουμε τους παρονομαστές n με $n+1$ και προσθέσουμε τον όρο $\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$ στο τέλος. Άρα

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

και η $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ είναι αύξουσα ακολουθία.

Επίσης, αν διώξουμε όλους τους όρους με πρόσημο αρνητικό

(25) $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{k!}+\dots+\frac{1}{n!} < 3 .$$

Άρα η $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ συγκλίνει σε κάποιον αριθμό ℓ και θα δούμε ότι $\ell = e$.

Από τον τύπο για τον $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ διώχνουμε όλους τους όρους μετά τον k-όρο.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} > 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\dots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

Κρατάμε το <u>k σταθερό</u> και παίρνουμε όριο και στις δύο πλευρές της τελευταίας ανισότητας

$$\ell \geq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-0)+\dots+\frac{1}{k!}(1-0)\cdots(1-0) = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{k!}$$

Παίρνουμε όριο και στις δύο πλευρές της ανισότητας (25):

$$\ell \leq e$$

Άρα $$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{k!} \leq \ell \leq e, \quad \text{για κάθε } k.$$

Παίρνουμε όριο καθώς $k \to +\infty$ και έχουμε

$$e \leq \ell \leq e .$$

Άρα $\ell = e$

<u>Συμπέρασμα:</u> $$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\right) = e$$

<u>Παράδειγμα</u>: Οι διαδοχικές δεκαδικές προσεγγίσεις ενός πραγματικού αριθμού.

Αν x είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός είδαμε ότι μπορούμε να σχηματίσουμε τις δεκαδικές προσεγγίσεις

$$x_n = a + 0.a_1a_2\cdots a_n = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$$

Τότε ισχύουν τα εξής: (i) $x_{n+1} = a + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}$

$$\geq a + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} = x_n, \quad \text{διότι} \quad a_n = 0 \text{ ή } 1 \text{ ή } 2, \dots, \text{ ή } 9.$$

Άρα η ακολουθία x_n είναι <u>αύξουσα</u>.

(ii)
$$x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}$$
$$0 \leq x - x_n < \frac{1}{10^n}$$

και από την ιδιότητα "σάντουιτς" $x_n \to x$.

Άρα, για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει αύξουσα ακολουθία <u>ρητών</u> αριθμών x_n η οποία συγκλίνει στο x.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Φυσικά και γεωμετρικά παραδείγματα

(α) Όταν κάποιο αέριο συμπιέζεται ή αποσυμπιέζεται μέσα σε μια δεξαμενή με την βοήθεια ενός εμβόλου τότε, αν η θερμοκρασία διατηρείται σταθερή, η πίεση p του αερίου και ο όγκος του v συνδέονται με την σχέση

$$pv = C \quad , \text{όπου } C \text{ είναι κάποιος σταθερός αριθμός.}$$

Ο νόμος αυτός, που ονομάζεται "νόμος του Boyle", δεν μας λέει τίποτε για τις ποσότητες p, v καθεαυτές. Έχει όμως το εξής νόημα: όταν γνωρίζουμε μια τιμή για την πίεση p τότε αυτόματα καθορίζεται μιά μοναδική τιμή για τον όγκο v : $v = C/p$.

Και αντιστρόφως : $p = C/v$.

Λέμε τότε ότι, στην πρώτη περίπτωση, ο όγκος v είναι <u>συνάρτηση</u> της πίεσης p και, στην αντίστροφη περίπτωση, ότι η πίεση p είναι <u>συνάρτηση</u> του όγκου v. Στην πρώτη περίπτωση η πίεση p έχει τον ρόλο της <u>ανεξάρτητης μεταβλητής</u>, δηλαδή της μεταβλητής ποσότητας που, με αυθαίρετο τρόπο, παίρνει τιμές από κάποιο διάστημα πραγματικών αριθμών (το οποίο καθορίζεται με φυσικό τρόπο και όχι μαθηματικό). Ενώ ο όγκος v έχει τον ρόλο της <u>εξαρτημένης μεταβλητής</u>, δηλαδή της μεταβλητής ποσότητας της οποίας οι τιμές καθορίζονται με συγκεκριμένο και μοναδικό τρόπο από τις αντίστοιχες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Στην δεύτερη περίπτωση οι δύο μεταβλητές αλλάζουν ρόλους. Είναι σημαντικό να έχουμε υπ'όψιν διαρκώς αυτήν την, υπό κάποιες προϋποθέσεις, ελευθερία εναλλαγής ρόλων ανάμεσα στην ανεξάρτητη και στην εξαρτημένη μεταβλητή.

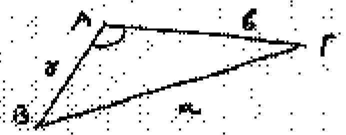
(β) Αν θερμαίνουμε ή ψυχραίνουμε μια μεταλλική ράβδο, η οποία σε θερμοκρασία $0°C$ έχει μήκος l_0, σε θερμοκρασία $\theta°C$, τότε το μήκος της l θα καθορίζεται προσεγγιστικά από τον τύπο

$$l = l_0(1+\alpha\theta)$$

όπου ο β, ο "συντελεστής διαστολής", είναι σταθερός αριθμός. Πάλι οι τιμές του μήκους ℓ καθορίζονται με μοναδικό τρόπο από τις τιμές της θερμοκρασίας θ. Λέμε ότι το ℓ είναι συνάρτηση της θ, και ότι η ποσότητα ℓ είναι η εξαρτημένη μεταβλητή και η θ είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή.

Πάλι μπορούν οι μεταβλητές να αλλάξουν ρόλους και η θ να είναι συνάρτηση της ℓ σύμφωνα με τον ισοδύναμο τύπο $\theta = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\ell}{\ell_0} - 1\right)$.

(γ) Αν σε ένα τρίγωνο οι δύο πλευρές β, γ μένουν σταθερές, τότε η πλευρά α και η γωνία A συνδέονται με την σχέση



$$\alpha = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A}$$

Κάθε τιμή της A από 0° έως 180° καθορίζει μια μοναδική τιμή για την πλευρά α. Λέμε ότι η α είναι συνάρτηση της A.

Η γενική έννοια της συνάρτησης

Αν μια μεταβλητή ποσότητα x παίρνει, με οποιοδήποτε τρόπο, τιμές από κάποιο σύνολο τιμών (συνήθως οι τιμές αυτές είναι αριθμοί) και υπάρχει κάποιος συγκεκριμένος κανόνας (συνήθως είναι μαθηματικός τύπος) που, για κάθε τιμή που θα πάρει η x, καθορίζει μια μοναδική τιμή μιας άλλης μεταβλητής ποσότητας y τότε λέμε ότι η μεταβλητή y είναι συνάρτηση της μεταβλητής x.

Γράφουμε συμβολικά: $y = f(x)$ ή $y = F(x)$ ή $y = g(x)$ ή οποιαδήποτε παρόμοια έκφραση. Λέμε τότε ότι η x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και η y είναι η εξαρτημένη μεταβλητή. Το σύνολο τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής ονομάζεται πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Συνήθως οι τιμές της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής είναι πραγματικοί αριθμοί, χωρίς αυτό να είναι απαραίτητο. Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε κάποιον πληθυσμό (π.χ. τους κατοίκους μιας πόλης) και για κάθε κάτοικο να μετρήσουμε το ύψος του. Από την στιγμή που κάθε κάτοικος έχει ένα μοναδικό ύψος μπορούμε να πούμε ότι το ύψος είναι συνάρτηση του κατοίκου της πόλης. Η ανεξάρτητη μεταβλητή x παίρνει τιμές από το σύνολο των κατοίκων και η εξαρτημένη μεταβλητή y παίρνει τιμή από το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Στα πλαίσια του Απειροστικού Λογισμού θα εξετάσουμε συναρτήσεις των οποίων οι ανεξάρτητη και η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνουν τιμές από σύνολα πραγματικών αριθμών. Τα πιο συνηθισμένα τέτοια σύνολα είναι τα διαστήματα ή οι ενώσεις διαστημάτων: τα διαστήματα (α,β), $[\alpha,\beta]$, $(\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$, $(\alpha,+\infty)$, $[\alpha,+\infty)$, $(-\infty,\beta)$, $(-\infty,\beta]$, $(-\infty,+\infty)$ είναι τα σύνολα όλων των αριθμών x με $\alpha<x<\beta$, $\alpha\le x\le\beta$, $\alpha<x\le\beta$, $\alpha\le x<\beta$, $\alpha<x$, $\alpha\le x$, $x<\beta$, $x\le\beta$, όλα τα x, αντιστοίχως.

Στα παραδείγματα (α), (β), (γ) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων είναι αντιστοίχως τα: (α) $(0,+\infty)$ για την πίεση p ή οποιοδήποτε άλλο μικρότερο διάστημα ανάλογα με το πείραμα. (β) $(-273^\circ C, +\infty)$ για την μεταβλητή θ. (γ) $(0^\circ, 180^\circ)$ για την γωνία A.

Συμβολίσαμε την ανεξάρτητη μεταβλητή με x και την εξαρτημένη με y. Αυτά είναι τα συνηθισμένα σύμβολα αλλά όχι τα αποκλειστικά. Εξ άλλου, όπως ήδη είπαμε, οι δύο μεταβλητές μπορεί να αλλάξουν ρόλους. Οποιαδήποτε σύμβολα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τις μεταβλητές στα πλαίσια της ίδιας συνάρτησης $u=f(v)$, $t=f(x)$, $y=f(t)$ κλπ.

<u>Αναλυτική έκφραση μιας συνάρτησης</u>

Συνήθως η σχέση η οποία εκφράζει την εξάρτηση ανάμεσα στις δύο μεταβλητές μιας συνάρτησης είναι, όπως λέμε, <u>αναλυτική</u>, ορίζεται δηλαδή με κάποιον τύπο: $y=x^2$ ή $y=\sin x$ ή $y^2-x^3=0$.

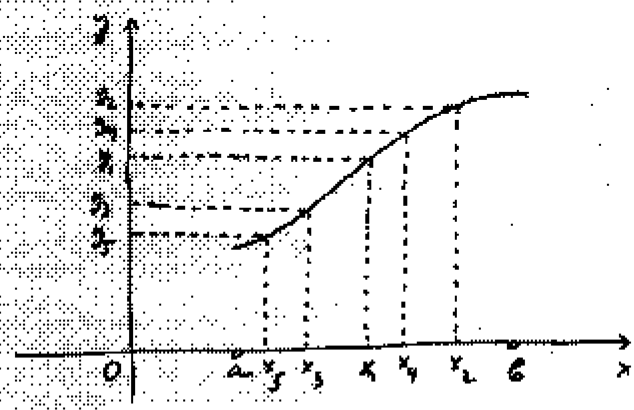
Με τους δύο πρώτους τύπους η τιμή της μεταβλητής y υπολογίζεται <u>άμεσα</u> από την τιμή της x. Με τον τρίτο τύπο η τιμή της y υπολογίζεται <u>έμμεσα</u> από την τιμή της x. Δηλαδή πρέπει να λύσουμε την εξίσωση ως προς y

για να βρούμε την τιμή της y : $y=\sqrt{x^3}$ ή $y=-\sqrt{x^3}$. Βλέπουμε ότι ο τύπος $y^2-x^3=0$ δεν καθορίζει τον y σαν συνάρτηση του x διότι, για κάθε θετική τιμή του x προσδιορίζονται δύο διαφορετικές τιμές του y και όχι μία μόνον. Μπορούμε να πούμε ότι ο τύπος αυτός καθορίζει δύο συναρτήσεις : την $y=\sqrt{x^3}$ και την $y=-\sqrt{x^3}$.

Παλιότερα οι μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν τον όρο πλειότιμη συνάρτηση, σε αντίθεση με τον όρο μονότιμη συνάρτηση, δηλαδή επέτρεπαν σε μία συνάρτηση να προσδιορίζει περισσότερες από μία τιμές του y για την ίδια τιμή του x. Όπως $y=\pm\sqrt{x^3}$. Τώρα αυτός ο όρος έχει σχεδόν εγκαταλειφθεί (Δεν βλάπτει όμως να τον έχουμε υπ' όψιν).

Γραφική αναπαράσταση μιας συνάρτησης

Πολύ μεγάλη βοήθεια στην κατανόηση μιας συνάρτησης $y=f(x)$, όπου και οι δύο μεταβλητές παίρνουν τιμές από σύνολα πραγματικών αριθμών, προσφέρει η γραφική της αναπαράσταση. Ζωγραφίζουμε δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες στο ίδιο επίπεδο. Η τομή τους είναι το σημείο O και για τις δύο. Η κλίμακα μέτρησης είναι, συνήθως, η ίδια και για τις δύο ευθείες. Στην οριζόντια ευθεία τοποθετούμε τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x και στην κάθετη ευθεία τοποθετούνται οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής y. (Τα θετικά x προς τα δεξιά και τα θετικά y προς τα πάνω). Κατόπιν, για κάθε τιμή του x γράφουμε το σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες (x,y), όπου y είναι η αντίστοιχη τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής : $y=f(x)$.



Άρα αυτά τα σημεία (x,y) μαζί σχηματίζουν το γράφημα της συνάρτησης. Συνήθως δημιουργείται η γεωμετρική εικόνα μιας καμπύλης.

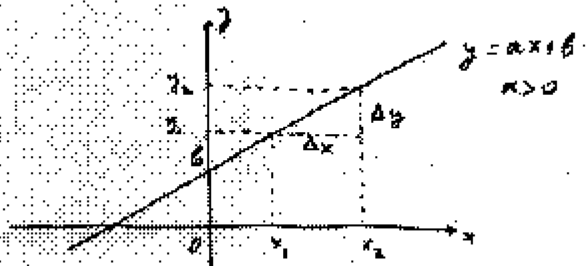
Πρακτικά είναι αδύνατον να επαναλάβουμε την διαδικασία αυτή για όλες τις τιμές του x, αν αυτές είναι άπειρες (όπως σε ένα ολόκληρο διάστημα). Φροντίζουμε να βρίσκουμε σημεία $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$ για όσο το δυνατόν μεγαλύτερο πλήθος n τιμών του x οι οποίες, επί πλέον, "καλύπτουν" όσο το δυνατόν πυκνότερα το πεδίο ορισμού. Με ορισμένες προϋποθέσεις, από τα "αραιά" σημεία (x,y) που θα βρούμε μπορούμε να φανταστούμε όλα τα ενδιάμεσα σημεία και να σχεδιάσουμε με προσέγγιση το γράφημα της $y=f(x)$.

<u>Παραδείγματα</u>

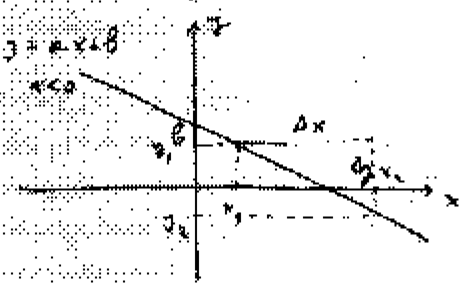
(α) $y=\alpha x+\beta$ όπου α,β είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Το πεδίο ορισμού είναι το $(-\infty,+\infty)$.

Ένα πρώτο σημείο του γραφήματος είναι το $(x,y)=(0,\beta)$. Αν (x_1,y_1) και (x_2,y_2) είναι οποιαδήποτε σημεία του γραφήματος με $x_1<x_2$, τότε $y_2=\alpha x_2+\beta$ και $y_1=\alpha x_1+\beta$, και αφαιρώντας $\Delta y=\alpha\Delta x$.



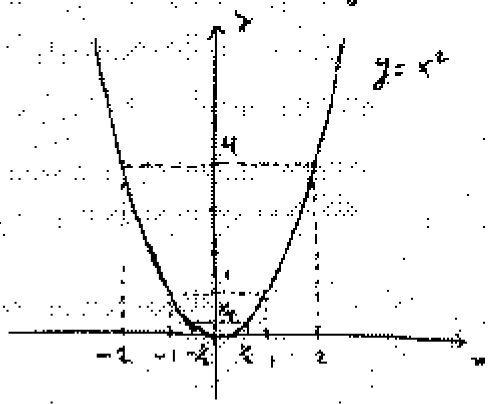
Με Δx συμβολίζουμε την οριζόντια και με Δy την κάθετη διαφορά αντίστοιχα: $\Delta x=x_2-x_1$, $\Delta y=y_2-y_1$.



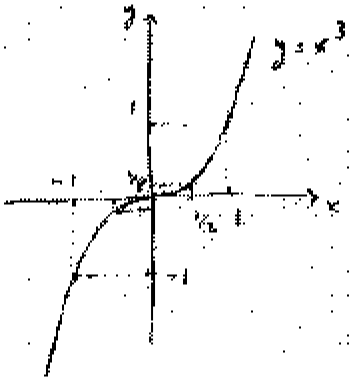
Άρα όλα τα σημεία του γραφήματος σχηματίζουν ευθεία με κλίση α.
Αν το $\alpha>0$ τότε η ευθεία ανεβαίνει, αν το $\alpha<0$ τότε η ευθεία πέφτει και, αν $\alpha=0$ η ευθεία είναι οριζόντια.

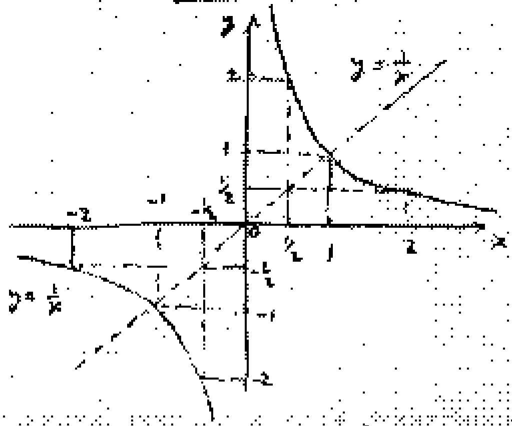
(β) $y=x^2$ Το γράφημα της συνάρτησης αυτής είναι η γνωστή μας συνήθης καμπύλη <u>παραβολή</u>.

(γ) $y=x^3$ Η καμπύλη αυτή ονομάζεται <u>κυβική παραβολή</u>.



(δ) $y=\frac{1}{x}$. Το πεδίο ορισμού είναι το $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Το γράφημα αποτελείται από δύο καμπύλες μία για το x-διάστημα $(-\infty,0)$ και μία για το $(0,+\infty)$. Είναι οι γνωστές υπερβολές.

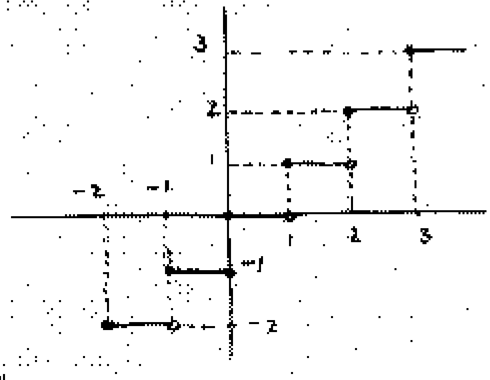




Αν ένα σημείο (a,b) είναι πάνω στο γράφημα, δηλ. $b=\frac{1}{a}$, τότε $a=\frac{1}{b}$ οπότε και το σημείο (b,a) είναι επίσης πάνω στο γράφημα. Τα σημεία (a,b) και (b,a) είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y=x$ (την κύρια διαγώνιο) (Δικαιολογήστε). Άρα ολόκληρο το γράφημα της $y=\frac{1}{x}$ είναι συμμετρικό ως προς την κύρια διαγώνιο.

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα παραδείγματα οι καμπύλες των γραφημάτων είναι συνεχείς. Δηλαδή, όταν το x μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο μέσα σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης, το αντίστοιχο σημείο $(X,Y)=(x,f(x))$ της καμπύλης του γραφήματος μεταβάλλεται με επίσης συνεχή τρόπο (δηλαδή δεν κάνει απότομα "πηδήματα" στο επίπεδο). Σ' όλες αυτές τις περιπτώσεις λέμε ότι οι συναρτήσεις είναι συνεχείς μέσα στο πεδίο ορισμού τους. Θα ασχοληθούμε πιο πολύ και πιο αυστηρά με την έννοια της συνέχειας αργότερα, αλλά ας έχουμε υπ' όψιν ότι η συνέχεια του γραφήματος είναι ουσιαστικό χαρακτηριστικό και δεν εμφανίζεται πάντοτε.

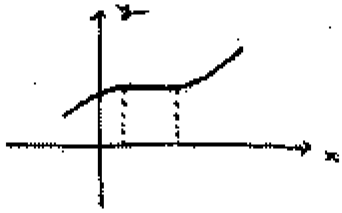
(ε) $y=[x]$ = ακέραιο μέρος του x.



Ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς ακεραίους $k\le x<k+1$ η συνάρτηση είναι σταθερή: $y=k$. Άρα το γράφημα αποτελείται από άπειρα οριζόντια ευθ. τμήματα και δεν αποτελεί μια συνεχή καμπύλη.

Μία συνάρτηση $y=f(x)$ ονομάζεται <u>αύξουσα (φθίνουσα) σε ένα διάστημα</u> του πεδίου ορισμού της αν $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$ $\quad (f(x_1)\ge f(x_2))$ για όλα τα x_1, x_2 που βρίσκονται στο διάστημα αυτό. Αν τα $\le$ ή $\ge$ αντικατασταθούν από τις γνήσιες ανισότητες $<$ ή $>$, τότε η $y=f(x)$ θα λέγεται <u>γνησίως</u> αύξουσα ή φθίνουσα στο διάστημα. Μ' αυτή την έννοια μία σταθερή συνάρτηση $y=f(x)=a$ είναι και αύξουσα και φθίνουσα συνάρτηση.

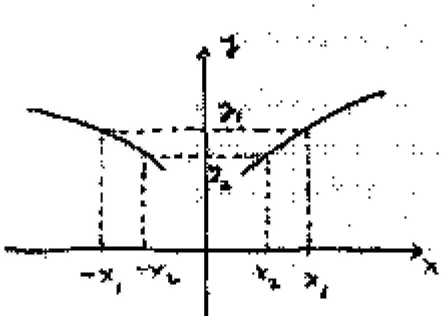
Η γεωμετρική εικόνα που παρουσιάζει το γράφημα μιας γνησίως αύξουσας συνάρτησης είναι μία καμπύλη που διαρκώς ανεβαίνει καθώς το x τρέχει προς τα δεξιά, ενώ το γράφημα μιας αύξουσας συνάρτησης ανεβαίνει αλλά μπορεί και να μένει σταθερό σε υποδιαστήματα.

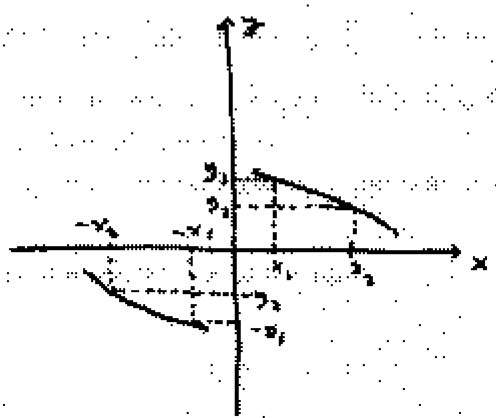


Παρατηρείστε ότι μία γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα ποτέ δεν παίρνει την ίδια τιμή y για περισσότερα από ένα x. Δηλαδή η $y=f(x)$ έχει μία μόνον λύση ως προς x (<u>αν</u> έχει τουλάχιστον μία, δηλαδή αν το y <u>είναι</u> τιμή της συνάρτησης).

Μία συνάρτηση λέγεται <u>άρτια</u> αν $f(x)=f(-x)$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της. Αν το σημείο (x,y) είναι στο γράφημα της συνάρτησης, δηλ. $y=f(x)$, τότε $y=f(-x)$. Άρα το $(-x,y)$ είναι επίσης σημείο του γραφήματος. Τα σημεία (x,y), $(-x,y)$ είναι συμμετρικά στο επίπεδο ως προς τον y-άξονα. Άρα τα κομμάτια του γραφήματος που βρίσκονται δεξιά και αριστερά του y-άξονα είναι ακριβώς συμμετρικά ως προς αυτόν. Παράδειγμα: $y=x^2$, η παραβολή.

Μία συνάρτηση $y=f(x)$ λέγεται <u>περιττή</u> αν $f(-x)=-f(-x)$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της. Αν το σημείο (x,y) είναι πάνω στο γράφημα, δηλαδή $y=f(x)$, τότε $-y=f(-x)$. Άρα το σημείο $(-x,-y)$ είναι επίσης πάνω στο γράφημα.





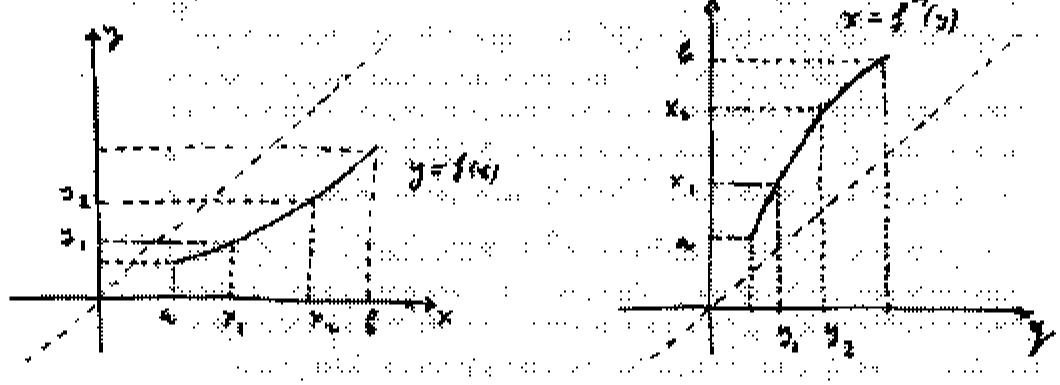
Τα σημεία (x,y), $(-x,-y)$ είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $(0,0)$. Άρα το γράφημα της $y=f(x)$ είναι συμμετρικό στο επίπεδο ως προς το σημείο $(0,0)$. Παράδειγμα: $y=x^3$ ή $y=\frac{1}{x}$.

Αντίστροφη συνάρτηση

Σε μια συνάρτηση $y=f(x)$ μπορούν, όπως είδαμε αναφέρει προηγουμένως, οι δύο μεταβλητές να αλλάξουν ρόλους. Δηλαδή η y να είναι η ανεξάρτητη και η x η εξαρτημένη μεταβλητή. Από υποθέτουμε ότι για μια τιμή της y μπορούμε να προσδιορίσουμε μια μοναδική τιμή της x. Τότε, όπως είδαμε παλαιότερα, λύνουμε την εξίσωση $y=f(x)$ ως προς x και παίρνουμε μια καινούργια έκφραση $x=g(y)$. Καθορίζουμε έτσι μια συνάρτηση η οποία ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της $y=f(x)$. Το συνηθισμένο σύμβολο για την αντίστροφη συνάρτηση είναι το $x=f^{-1}(y)$. Δηλαδή:

$$y=f(x) \iff x=f^{-1}(y)$$

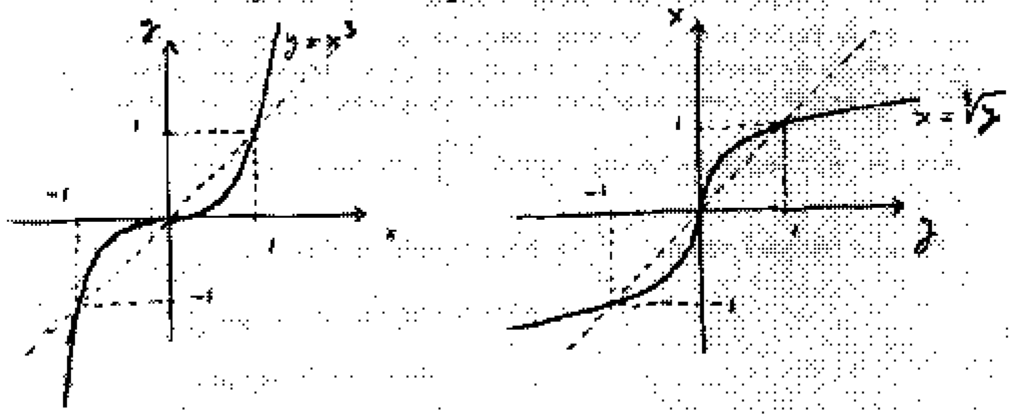
Ας τονίσουμε πάλι ότι η εξίσωση $y=f(x)$ πρέπει να έχει μοναδική λύση ως προς x. Αν σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της $y=f(x)$ η συνάρτηση δεν παίρνει την ίδια τιμή y για περισσότερα από ένα διαφορετικά x (δηλαδή: $y=f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$) τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα στο διάστημα αυτό, και τότε μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφη συνάρτηση. Είδαμε προηγουμένως ότι αυτό ακριβώς συμβαίνει όταν η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα σε κάποιο διάστημα.



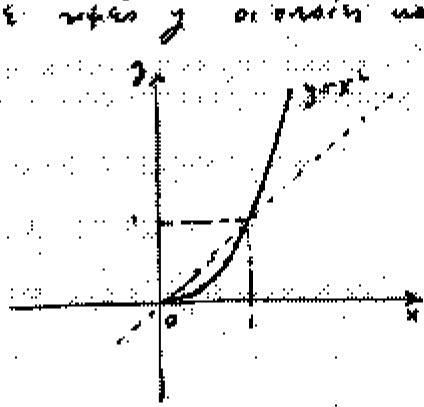
Αν το σημείο (x,y) είναι σημείο του γραφήματος της $y=f(x)$, τότε $x=f^{-1}(y)$. Άρα το (y,x) είναι σημείο του γραφήματος της αντίστροφης συνάρτησης. Τα (x,y), (y,x) είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία διαγώνιο του επιπέδου (Αναπαλογισμός!) Άρα τα γραφήματα της συνάρτησης και της αντίστροφής της είναι συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο.

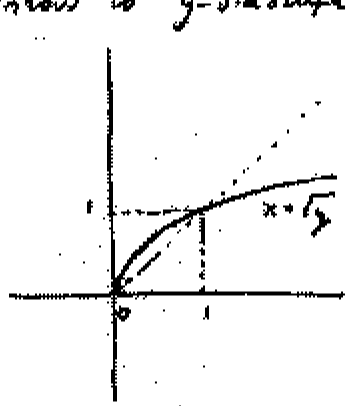
Παρατηρούμε ότι αν η $y=f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα (φθίνουσα) τότε η $x=f^{-1}(y)$ είναι επίσης γνησίως αύξουσα (φθίνουσα). [Έστω $y_1<y_2$. Αν $x_1=f^{-1}(y_1)\ge x_2=f^{-1}(y_2)$ τότε $y_1=f(x_1)\ge y_2=f(x_2)$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα. Άτοπο.] Επίσης αν το γράφημα της $y=f(x)$ είναι συνεχής καμπύλη τότε και το γράφημα της $x=f^{-1}(y)$, σαν ανάκλαση της πρώτης καμπύλης ως προς την κύρια διαγώνιο, θα είναι συνεχής καμπύλη.

<u>Παραδείγματα</u> (α) $y=x^3$. Η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σ' ολόκληρο το πεδίο ορισμού της $(-\infty,+\infty)$. Άρα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση, την οποία συμβολίζουμε $x=\sqrt[3]{y}$ ή $y^{1/3}$, και είναι επίσης γνησίως αύξουσα και συνεχής.

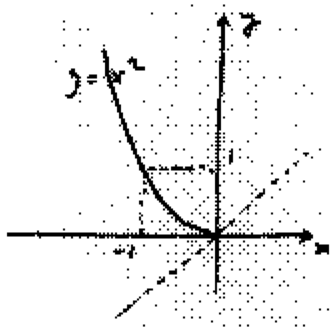


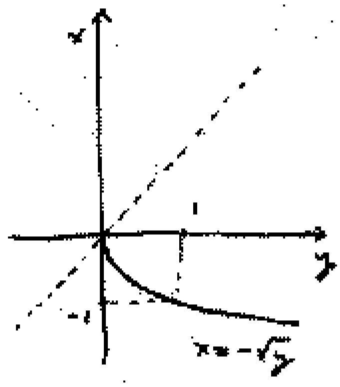
(β) $y=x^2$. Η συνάρτηση αυτή δεν είναι ένα-προς-ένα διότι, αν $y>0$, η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις: $x=\sqrt{y}$, $x=-\sqrt{y}$. Όμως στο διάστημα $[0,+\infty)$ του πεδίου ορισμού της, η $y=x^2$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής με τιμές y οι οποίες καλύπτουν το y-διάστημα $[0,+\infty)$. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση $x=\sqrt{y}$ ορίζεται στο y-διάστημα $[0,+\infty)$ με τιμές που καλύπτουν το x-διάστημα $[0,+\infty)$. Είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.





Ομοίως στο διάστημα $(-\infty,0]$ η $y=x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση $x=-\sqrt{y}$ ορίζεται στο y-διάστημα $[0,+\infty)$ με τιμές που καλύπτουν το x-διάστημα $(-\infty,0]$. Είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

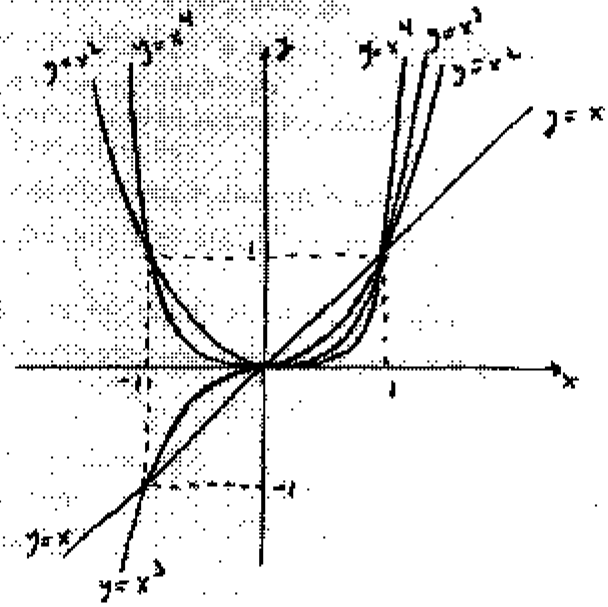




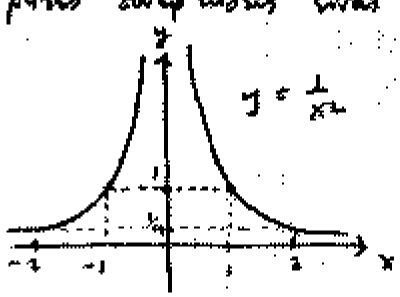
Οι ρητές συναρτήσεις

Ρητή συνάρτηση είναι η $y=\frac{a_0+a_1x+\dots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\dots+b_mx^m}$, δηλαδή πηλίκο πολυωνύμων του x. Το πεδίο ορισμού της αποτελείται από όλα τα x εκτός από εκείνα που μηδενίζουν τον παρονομαστή. Οι πιο απλές ρητές συναρτήσεις είναι τα πολυώνυμα $y=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ και από αυτές οι πιο απλές είναι οι δυνάμεις $y=x^n$ (n φυσικός αριθμός).

Αν ο n είναι άρτιος η $y=x^n$ είναι άρτια, συνεχής, γνησίως αύξουσα στο x-διάστημα $[0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο x-διάστημα $(-\infty,0]$. Αν ο n είναι περιττός η $y=x^n$ είναι περιττή, συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,+\infty)$.



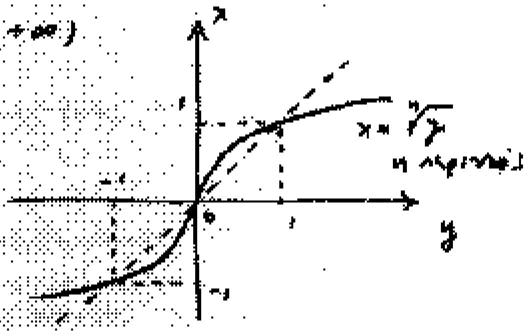
Όλες οι καμπύλες διέρχονται από τα σημεία $(0,0)$, $(1,1)$. Στο διάστημα $0<x<1$ οι καμπύλες $y=x, y=x^2, y=x^3,\dots$ είναι η καθεμία κάτω από την προηγούμενή της, ενώ στο διάστημα $1<x<+\infty$ είναι η καθεμία πάνω από την προηγούμενή της. Οι πιο απλές μη-πολυωνυμικές ρητές συναρτήσεις είναι οι $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x^2}$.



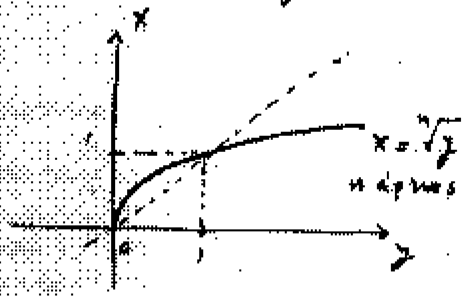
Αλγεβρικές συναρτήσεις.

Δεν θα εξετάσουμε τον ακριβή ορισμό των αλγεβρικών συναρτήσεων αλλά θα γνωρίσουμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Αφού η $y=x^n$ είναι, για n περιττό, γνησίως αύξουσα στο x-διάστημα $(-\infty,+\infty)$, συνεχής και οι τιμές της καλύπτουν το y-διάστημα $(-\infty,+\infty)$ υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $x=\sqrt[n]{y}$ ή $y^{1/n}$ και είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο y-διάστημα $(-\infty,+\infty)$.



Η $y=x^n$ είναι, για n άρτιο, γνησίως αύξουσα στο x-διάστημα $[0,+\infty)$ και συνεχής και οι τιμές της καλύπτουν το y-διάστημα $[0,+\infty)$. Άρα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $x=\sqrt[n]{y}$ ή $y^{1/n}$ με πεδίο ορισμού το y-διάστημα $[0,+\infty)$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής.

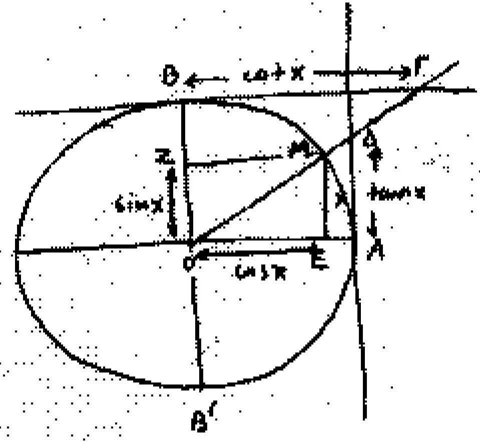


Οι συναρτήσεις $y=\sqrt[n]{x}$ είναι τα απλούστερα παραδείγματα αλγεβρικών συναρτήσεων. Άλλα τέτοια παραδείγματα είναι γενικά συναρτήσεις οι οποίες προκύπτουν από ρητές συναρτήσεις με συνδυασμό των 4 αλγεβρικών πράξεων και την εξαγωγή ριζών οποιουδήποτε βαθμού. Για παράδειγμα:

$$y=\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{\frac{x^2+1+\sqrt{x}}{x-1}}$$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους

Θεωρούμε κύκλο ακτίνας 1 και κέντρου O και παίρνουμε δύο κάθετες μεταξύ τους διαμέτρους $A'OA$ (οριζόντια) και $B'OB$ (κατακόρυφη). Δοθέντος οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού x μετράμε πάνω στην περιφέρεια του κύκλου τόξο AM μήκους $|x|$ αρχίζοντας από το A και πηγαίνοντας προς την κατεύθυνση την αντίθετη των δεικτών του ρολογιού αν το x είναι θετικό ή προς την αντίθετη



κατεβαίνει αν το x είναι αρνητικό.
Καθώς το x μεταβάλλεται, το σημείο M μεταβάλλεται ανάλογα. Επειδή η πλήρης περιφέρεια του κύκλου έχει μήκος $2\pi = 6.28\ldots$, το $x = \frac{\pi}{2}$ αντιστοιχεί στην θέση $M = B$, το $x = \pi$ αντιστοιχεί στην θέση $M = A'$, το $x = \frac{3\pi}{2}$ στην θέση $M = B'$ και το $x = 2\pi$ στην θέση $M = A$.
Καθώς το x διατρέχει το διάστημα $[0, 2\pi]$ το σημείο M διατρέχει την περιφέρεια του κύκλου $ABA'B'A$, και, όταν το x ξεπεράσει το 2π, το M ξαναρχίζει να διαγράφει την περιφέρεια. Όταν το x τρέχει αριστερά του 0 προς τα αρνητικά το M κινείται ανάποδα στην περιφέρεια $AB'A'BA$.

Για οποιοδήποτε x προσδιορίζουμε το αντίστοιχο M και σύρνουμε

(α) κάθετη ME στην διάμετρο $A'OA$. Συμβολίζουμε $\cos x = \pm$ μήκος του OE, ανάλογα αν το E είναι δεξιά ή αριστερά από το O.

(β) κάθετη MZ στην διάμετρο $B'OB$. Συμβολίζουμε $\sin x = \pm$ μήκος του OZ, ανάλογα αν το Z είναι πάνω ή κάτω από το O.

Θεωρούμε την ευθεία που εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο A.

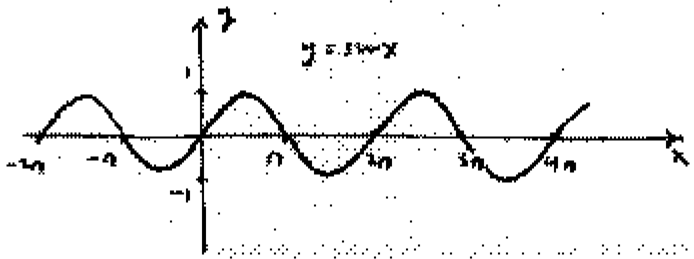
(γ) Προεκτείνουμε την ακτίνα OM μέχρι να συναντήσει αυτήν την ευθεία στο σημείο Δ. Συμβολίζουμε $\tan x = \pm$ μήκος του $A\Delta$, ανάλογα αν το Δ είναι πάνω ή κάτω από το A.

Θεωρούμε την ευθεία που εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο B.

(δ) Αν Γ είναι το σημείο που η προέκταση της OM συναντάει την ευθεία αυτή, συμβολίζουμε: $\cot x = \pm$ μήκος του $B\Gamma$, ανάλογα αν το Γ είναι δεξιά ή αριστερά του B.

Με όσα είπαμε φαίνεται ότι: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Μελετώντας προσεκτικά πως μεταβάλλονται τα διάφορα μέρη που ορίζουν τις συναρτήσεις $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ καθώς το x διατρέχει τους πραγματικούς αριθμούς βλέπουμε ότι τα γραφήματα αυτών των συναρτήσεων μοιάζουν κάπως έτσι:

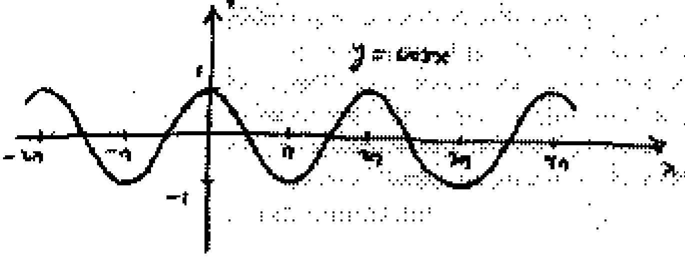


συνεχής κυματοειδής καμπύλη. οι τιμές του y καλύπτουν ακριβώς το διάστημα $[-1, 1]$.

$y = 0 \iff x =$ ακέραιο πολλ. του π

$y = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} +$ ακερ. πολλ. 2π

$y = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} +$ ακερ. πολλ. 2π

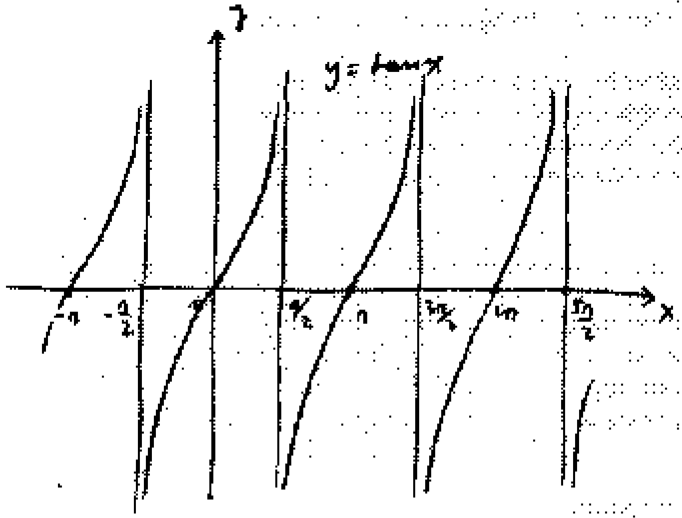


συνεχής κυματοειδής καμπύλη. οι τιμές του y καλύπτουν ακριβώς το διάστημα $[-1, 1]$.

$y = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} +$ ακερ. πολλ. π

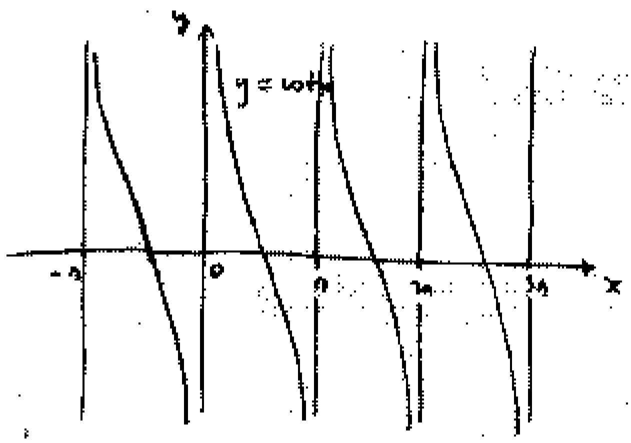
$y = 1 \iff x =$ ακερ. πολλ. 2π

$y = -1 \iff x = \pi +$ ακερ. πολλ. 2π



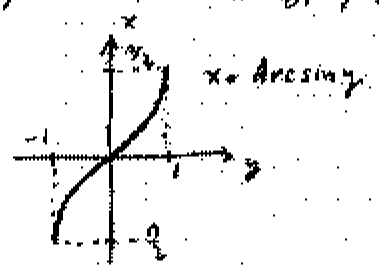
Η $y = \tan x$ δεν ορίζεται στα σημεία $x = \frac{\pi}{2} +$ ακερ. πολλ. π. Στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ η $y = \tan x$ είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής, και γίνεται απεριόριστα μεγάλη όταν το x πλησιάζει το $\frac{\pi}{2}$ και απεριόριστα μεγάλη αρνητική όταν το x πλησιάζει το $-\frac{\pi}{2}$. Η καμπύλη επαναλαμβάνεται σε όλα τα προηγούμενα και επόμενα διαστήματα μήκους π:

$\ldots, (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}), (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}), \ldots$

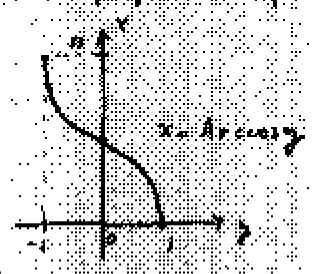


Η $y = \cot x$ δεν ορίζεται στα $x =$ ακερ. πολλ. π. Στο $(0, \pi)$ είναι γνήσια φθίνουσα και συνεχής, και γίνεται απεριόριστα μεγάλη όταν το x πλησιάζει το 0 και απεριόριστα μεγάλη αρνητική όταν το x πλησιάζει το π. Η καμπύλη επαναλαμβάνεται σε όλα τα προηγούμενα και επόμενα διαστήματα μήκους π: $\ldots (-\pi, 0)$, $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, $\ldots$.

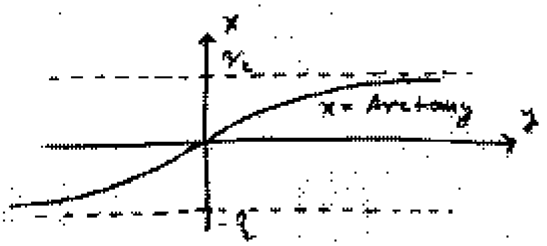
Καμμία από αυτές τις συναρτήσεις δεν έχει αντίστροφη συνάρτηση. Αρκεί να περιορίσουμε σε κάποιο x-διάστημα όπου η συνάρτηση μας είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα. Στο x-διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ η $y = \sin x$ είναι γνησίως αύξουσα, στο $[0, \pi]$ η $y = \cos x$ είναι γνησίως φθίνουσα, στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ η $y = \tan x$ είναι γνησίως αύξουσα και στο $(0, \pi)$ η $y = \cot x$ είναι γνησίως φθίνουσα. Με προσεκτική ανάκλαση ως προς την κύρια διαγώνιο σχεδιάζουμε τα γραφήματα των αντίστροφων συναρτήσεων



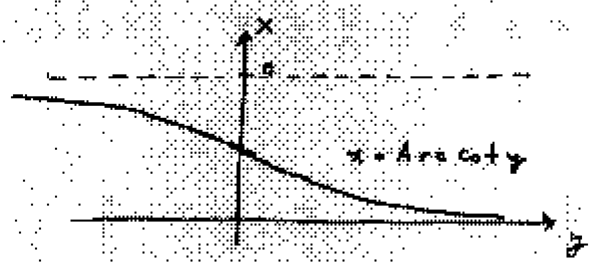
$y = \sin x$, $x = \mathrm{Arcsin}\, y$



$y = \cos x$, $x = \mathrm{Arccos}\, y$



$y = \tan x$, $x = \mathrm{Arctan}\, y$



$y = \cot x$, $x = \mathrm{Arccot}\, y$

Η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση

Αν a είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός ορίζαμε την δύναμη $a^{m/n}$, όταν $\frac{m}{n}$ είναι ρητός, τότε $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

Είναι σχετικά απλό να αποδείξουμε όλες τις γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων όταν οι εκθέτες r, s είναι ρητοί αριθμοί: $a^{r+s} = a^r a^s$, $a^{rs} = (a^r)^s$, $(ab)^r = a^r b^r$ $(a, b > 0)$, $\begin{matrix} a>1 \\ r>s \end{matrix} \Rightarrow a^r > a^s$, $\begin{matrix} 0<a<1 \\ r>s \end{matrix} \Rightarrow a^r < a^s$, $\begin{matrix} 0<a<b \\ r>0 \end{matrix} \Rightarrow a^r < b^r$, $\begin{matrix} 0<a<b \\ r<0 \end{matrix} \Rightarrow a^r > b^r$.

Σκοπός μας τώρα θα είναι να δούμε πως ορίζεται η δύναμη a^x όταν ο εκθέτης x είναι άρρητος αριθμός.

Θεωρούμε, λοιπόν, έναν άρρητο αριθμό x. Παίρνουμε κάποια ακολουθία <u>ρητών</u> αριθμών r_n η οποία αυξάνει και συγκλίνει στο x. Δηλαδή

$r_n \le r_{n+1}$ για όλα τα n

$r_n \to x$.

Σχηματίζουμε κατόπιν την αντίστοιχη ακολουθία $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, a^{r_4}, \dots$

Από δω και πέρα περιοριζόμαστε στην περίπτωση $a > 1$.

Τότε όμως η ακολουθία a^{r_n} είναι αύξουσα. Επιπλέον, αν πάρουμε οποιονδήποτε ακέραιο αριθμό M μεγαλύτερο από τον x, τότε $a^{r_n} < a^M$ (αφού $r_n < x < M$). Άρα η ακολουθία a^{r_n} είναι αύξουσα και φραγμένη. Επομένως η a^{r_n} θα συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό. Το όριο της a^{r_n} θα χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε το a^x. Δηλαδή <u>ορίζουμε</u>

$a^x = \lim a^{r_n}$.

<u>Προσοχή (1)</u>. Πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι πραγματικά <u>υπάρχει</u> ακολουθία ρητών r_n που αυξάνει και συγκλίνει στον x. Ας θυμηθούμε όμως τις διαδοχικές δεκαδικές προσεγγίσεις του x: $r_n = m + 0.a_1a_2a_3\dots a_n$. Αυτοί είναι ρητοί αριθμοί που αυξάνουν (αφού σε κάθε βήμα προστίθεται καινούργιο δεκαδικό ψηφίο) και συγκλίνουν στον x (αφού, όπως γνωρίζουμε, $0 \le x - r_n < \frac{1}{10^n}$)

<u>Προσοχή (2)</u>. Πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι το ίδιο αποτέλεσμα για το a^x θα έχουμε αν χρησιμοποιήσουμε <u>οποιαδήποτε</u> άλλη ακολουθία ρητών r_n' που αυξάνει και συγκλίνει προς το x. Δηλαδή ότι τα $\lim a^{r_n}$, $\lim a^{r_n'}$ δεν είναι διαφορετικά.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι, αν οι ακολουθίες ρητών r_n, r_n' συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό x (χωρίς να είναι αναγκαστικά αύξουσες), τότε το πηλίκο $\frac{a^{r_n}}{a^{r_n'}}$ συγκλίνει στο 1.

Ιδού σε συντομία η απόδειξη: επειδή $\lim a^{1/k} = \lim a^{-\frac{1}{k}} = 1$, αν μας δώσουν οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε αρκετά μεγάλο φυσικό k ώστε $0 < a^{1/k} - 1 < \varepsilon$ και $0 < 1 - a^{-\frac{1}{k}} < \varepsilon$.

Κατόπιν, επειδή $r_n - r_n' \to 0$, μπορούμε να βρούμε δείκτη N ώστε για όλους τους δείκτες $n > N$ να ισχύει $|r_n - r_n'| < \frac{1}{k}$ ή, ισοδύναμα, $-\frac{1}{k} < r_n - r_n' < \frac{1}{k}$, $a^{-\frac{1}{k}} < a^{r_n - r_n'} < a^{\frac{1}{k}}$,

$-\varepsilon < a^{-\frac{1}{k}} - 1 < a^{r_n - r_n'} - 1 < a^{\frac{1}{k}} - 1 < \varepsilon$.

Άρα, υπάρχει δείκτης N ώστε για όλα τα $n > N$ να ισχύει

$$|a^{r_n - r_n'} - 1| < \varepsilon .$$

Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει ότι $a^x = \lim a^{r_n}$ για οποιαδήποτε ακολουθία ρητών r_n η οποία συγκλίνει στο x (χωρίς να αυξάνει αναγκαστικά). Τελειώσαμε με την περίπτωση $a > 1$.

Αν ο αριθμός $a = 1$ τότε, προφανώς, ορίζουμε $a^x = 1$.

Αν $0 < a < 1$ τότε μπορούμε να αναχθούμε στην πρώτη περίπτωση ορίζοντας $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$, διότι ο $\frac{1}{a}$ είναι > 1.

Και γι' αυτήν την περίπτωση ισχύει ότι $a^x = \lim a^{r_n}$ για οποιαδήποτε ακολουθία ρητών r_n που συγκλίνει στο x. Διότι

$$a^{r_n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-r_n} \to \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = a^x$$

Η μεσαία σύγκλιση ισχύει διότι $\frac{1}{a} > 1$ και $-r_n \to -x$, η πρώτη ισότητα ισχύει από τις ιδιότητες των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες, και η δεύτερη ισότητα είναι ο ορισμός του a^x όταν $0 < a < 1$.

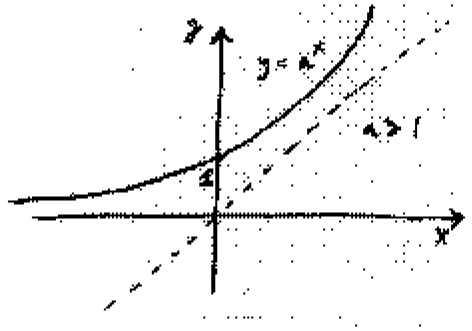
<u>Συμπέρασμα</u>: Η δύναμη a^x έχει ορισθεί για κάθε πραγματικό εκθέτη x, όταν $a > 0$, και ισχύει: $a^x = \lim a^{r_n}$ όταν τα r_n είναι ρητοί που συγκλίνουν στο x.

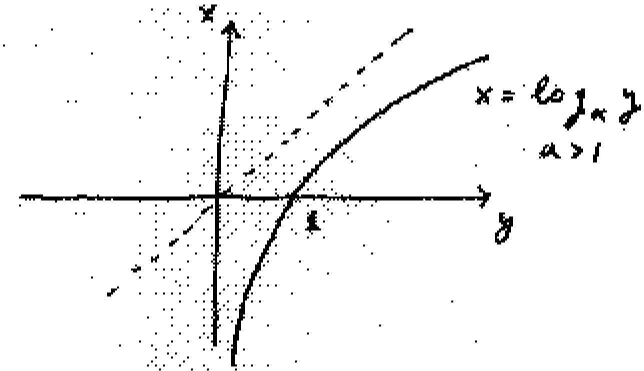
Μπορούμε τώρα να επεκτείνουμε όλες τις ιδιότητες των δυνάμεων στην περίπτωση των άρρητων εκθετών. Για παράδειγμα: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ όταν x, y είναι άρρητοι. Θεωρούμε ρητούς r_n, s_n με $r_n \to x$, $s_n \to y$. Τότε $r_n + s_n \to x + y$. Άρα

$$a^{x+y} = \lim a^{r_n + s_n} = \lim(a^{r_n} a^{s_n}) = \lim a^{r_n} \cdot \lim a^{s_n} = a^x \cdot a^y$$

Με παρόμοιο τρόπο γενικεύονται όλες οι ιδιότητες της σελίδας 50.

Μπορούμε τώρα να θεωρήσουμε την συνάρτηση $y=a^x$ με πεδίο ορισμού το x-διάστημα $(-\infty,+\infty)$. Όταν $a>1$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής και οι τιμές της καλύπτουν το y-διάστημα $(0,+\infty)$. Ο x-άξονας είναι ασύμπτωτος του γραφήματος.



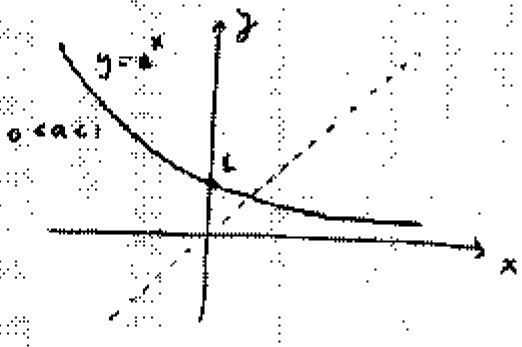


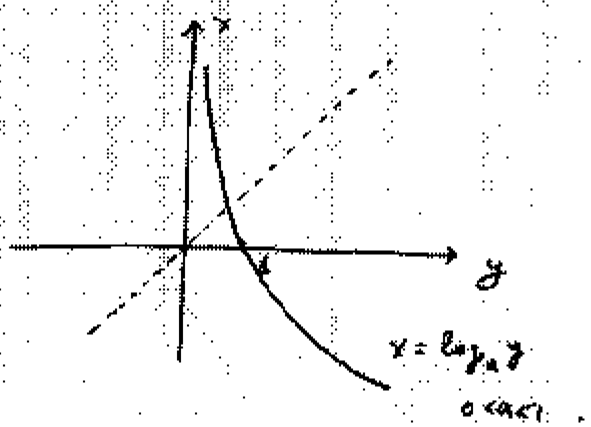
Η αντίστροφη συνάρτηση είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και συμβολίζεται $x=\log_a y$, ο <u>λογάριθμος του y με βάση a</u>.

Το πεδίο ορισμού της είναι το y-διάστημα $(0,+\infty)$.

Όταν το $a=1$, η $y=a^x=1$ είναι σταθερή και δεν έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Όταν $0<a<1$ η $y=a^x$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής με πεδίο ορισμού το x-διάστημα $(-\infty,+\infty)$ και τιμές που καλύπτουν το y-διάστημα $(0,+\infty)$. Η αντίστροφη συνάρτηση πάλι συμβολίζεται $x=\log_a y$, είναι συνεχής με πεδίο ορισμού το y-διάστημα $(0,+\infty)$.





ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1) Η γνώση των αριθμών και η πρακτική σημασία τους μας αναγκάζουν να τους θεωρούμε σταθερές και αμετάβλητες ποσότητες!! Η διαγώνιος ενός τετραγώνου πλευράς 1 είναι ο αριθμός $\sqrt{2}$. Όταν όμως θέλουμε να κάνουμε υπολογισμούς με τον αριθμό $\sqrt{2}$ ή ακόμη και να συγκρίνουμε τον αριθμό αυτόν με άλλους αριθμούς είμαστε λίγο-πολύ υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε την δεκαδική αναπαράσταση του: $1{,}41\ldots$. Τον αριθμό $\sqrt{2}$ τελικά στην πράξη δεν τον βλέπουμε σαν ένα άπειρο δεκαδικό ανάπτυγμα, αλλά σαν τις διαδοχικές προσεγγίσεις του:

$1,\ 1.4,\ 1.41,\ \ldots$

δηλ. αριθμούς οι οποίοι είναι "πλησιέστεροι" και "κοντά" στον $\sqrt{2}$.

2/ Η καθημερινή μας ζωή επηρεάζεται, περισσότερο από όσο θέλουμε, από διάφορες μεταβαλλόμενες ποσότητες. Ο χρόνος που κυλά, η απόσταση που διανύει το αυτοκίνητό μας όταν κινείται, οι καταθέσεις μας στην τράπεζα, ο πληθωρισμός (ο οποίος επηρεάζει τις προμήθειές μας) κλπ. Και τις περισσότερες φορές τις μεταβαλλόμενες ποσότητες τις βλέπουμε να πλησιάζουν κάπου: ο χρόνος κυλά και πλησιάζει το τέλος του εξαμήνου (δηλ. το τελικό διαγώνισμα), το αυτοκίνητο πλησιάζει την πόλη Ω, οι καταθέσεις μας πλησιάζουν το μηδέν! Το ότι οι τιμές μιας μεταβαλλόμενης ποσότητας x πλησιάζουν μια συγκεκριμένη τιμή α το γράφουμε συμβολικά με: $\lim x = \alpha$ ή $x \to \alpha$.

Η κατάσταση είναι πιο ενδιαφέρουσα όταν οι διάφορες ποσότητες αλληλο-εξαρτώνται. Καθώς ο χρόνος t πλησιάζει τις 23 του μήνα οι καταθέσεις μας x πλησιάζουν την τιμή 0 (και, δυστυχώς, δεν θα πληρωθούμε παρά την 1 του επόμενου μήνα). Εδώ, η ποσότητα x είναι συνάρτηση της ποσότητας t: $x = f(t)$.

Συμβολίζουμε : $\lim x = 0$ όταν $\lim t = 23$

ή $\lim_{t\to 23} x = 0$. ή $\lim_{t\to 23} f(t) = 0$.

Τώρα θα πρέπει να προσέξουμε το εξής : Μπορεί στις 23 ακριβώς του μήνα να κερδίσατε ένα λαχείο 1.000.000 δρχ. Δηλαδή $x = 1000000$ όταν $t = 23$. Δεν παύει όμως να ισχύει $\lim_{t\to 23} x = 0$.
Κατά κάποιο τρόπο δεν μας ενδιαφέρει τι γίνεται όταν $t = 23$ αλλά καθώς το t <u>πλησιάζει</u> στο 23.

<u>Ορισμός</u> : Λέμε ότι μιά συνάρτηση $y = f(x)$ έχει όριο α όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή x τείνει στο ξ, και συμβολίζουμε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \alpha$, αν : καθώς οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x πλησιάζουν στο ξ (αλλά <u>δεν</u> είναι ξ) οι αντίστοιχες τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής y πλησιάζουν το α.

Ας δούμε στην συνέχεια μια σειρά από ισοδύναμες διατυπώσεις του ορισμού αυτού :

(i) $\lim_{x\to\xi} f(x) = \alpha$

(ii) καθώς το x πλησιάζει στο ξ (αλλά δεν είναι ξ), το $y = f(x)$ πλησιάζει στο α.

(iii) το $y = f(x)$ είναι όσο κοντά θέλουμε στο α , αρκεί το x να είναι αρκετά κοντά στο ξ (αλλά όχι ίσο με ξ)

(iv) η απόσταση $|f(x) - \alpha|$ είναι όσο μικρή θέλουμε, αρκεί η απόσταση $|x - \xi|$ να είναι αρκετά μικρή (αλλά όχι μηδέν).

(v) το $|f(x) - \alpha|$ γίνεται μικρότερο από όποιον αριθμό $\varepsilon > 0$ θέλουμε, αρκεί το $|x - \xi|$ να γίνει μικρότερο από κάποιο κατάλληλο $\delta > 0$ (αλλά όχι μηδέν).

(vi) όποιον $\varepsilon>0$ και αν διαλέξουμε, το $|f(x)-a|$ θα γίνει μικρότερο από ε, αρκεί να υπάρχει κάποιο κατάλληλο $\delta>0$ ώστε το $|x-\xi|$ να είναι μικρότερο από δ (και $\neq 0$).

(vii) Για οποιοδήποτε $\varepsilon>0$, υπάρχει κατάλληλο $\delta>0$ ώστε:

$$|f(x)-a|<\varepsilon \qquad \text{όταν} \qquad 0<|x-\xi|<\delta.$$

(viii) Για οποιοδήποτε $\varepsilon>0$, υπάρχει κατάλληλο $\delta>0$ ώστε:

$$0<|x-\xi|<\delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-a|<\varepsilon$$

Από την διατύπωση (ii) η οποία εκφράζει τον "εμπειρικό" ορισμό του ορίου καταλήγουμε, μετά από μία σειρά διαδοχικών αναδιατυπώσεων (και πιστεύουμε ότι η μετάβαση από κάθε μία στην επόμενη είναι ομαλή και κατανοητή) στην διατύπωση (viii) η οποία εκφράζει τον "αυστηρό" ορισμό του ορίου.

<u>Παράδειγμα</u>: Αν $y=f(x)=3x$ τότε $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=6$. Πράγματι, είναι προφανές ότι όταν το x πλησιάζει στο 2 τότε το $3x$ πλησιάζει στο 6. Όταν όμως θέλουμε να ελέγξουμε <u>πόσο</u> κοντά πρέπει να είναι το x στο 2 ώστε το $3x$ να είναι <u>τόσο</u> κοντά στο 6, τότε θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την διατύπωση (viii). Αν <u>τόσο</u> $=\varepsilon=0.001$, δηλαδή αν θέλουμε $|3x-6|<0.001$ ή $3|x-2|<0.001$ ή $|x-2|<0.001/3$ τότε θα πρέπει το <u>πόσο</u> $=\delta$ να είναι το πολύ $\frac{0.001}{3}$. Πράγματι, αν $\delta\leq\frac{0.001}{3}$ τότε:

$$0<|x-2|<\delta \;\Longrightarrow\; 0<|x-2|<\frac{0.001}{3}$$

$$\Longrightarrow\; 3|x-2|<0.001 \;\Longrightarrow\; |3x-6|<0.001$$

Αν τόσο = ε = 0.000001 , δηλαδή αν θέλουμε $|3x-6|<0.000001$

ή $3|x-2|<0.000001$ ή $|x-2|<\frac{0.000001}{3}$ τότε

θα πρέπει το τόσο = δ να είναι το πολύ $\frac{0.000001}{3}$. Πράγματι,

αν $\delta \le \frac{0.000001}{3}$ τότε :

$$0<|x-2|<\delta \Rightarrow 0<|x-2|<\frac{0.000001}{3} \Rightarrow$$

$$3|x-2|<0.000001 \Rightarrow |3x-6|<0.000001 .$$

Και γενικά, αν τόσο = ε , δηλαδή αν θέλουμε $|3x-6|<\varepsilon$

ή $3|x-2|<\varepsilon$ ή $|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$ τότε θα πρέπει το

τόσο = δ να είναι το πολύ $\frac{\varepsilon}{3}$. Πράγματι,

αν $\delta \le \frac{\varepsilon}{3}$ τότε :

$$0<|x-2|<\delta \Rightarrow 0<|x-2|<\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 3|x-2|<\varepsilon \Rightarrow$$
$$|3x-6|<\varepsilon .$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η διατύπωση (viii) είναι η ακριβής έκφραση που εκφράζει ποσοτικά την έννοια του ορίου. Άρα ο ακριβής ορισμός είναι

Ορισμός Λέμε ότι μία συνάρτηση $y=f(x)$ έχει όριο a όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή x τείνει στο ξ, και συμβολίζουμε $\lim_{x\to\xi} f(x)=a$, αν : για οποιοδήποτε $\varepsilon>0$, υπάρχει κατάλληλο $\delta>0$ ώστε

$$0<|x-\xi|<\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$$

Παρατηρήσεις

1. Όπως φαίνεται από το προηγούμενο παράδειγμα, το δ εξαρτάται από το ε. Γενικά περιμένουμε όταν το ε μικραίνει να μικραίνει αντίστοιχα και το δ: όσο μικρότερη θέλουμε να γίνει η απόσταση του $f(x)$ από το a (δηλ. όσο μικραίνει το ε) τόσο πιο κοντά θα πρέπει να έρθει το x στο ξ (δηλ. τόσο πιο μικρό απαιτείται το δ).

2. Ξανατονίζουμε ότι ο αριθμός ξ δεν παίζει κανένα ρόλο. Η συνάρτηση $y=f(x)$ μπορεί να μην ορίζεται στο $x=\xi$, ή ακόμη κι αν ορίζεται η τιμή $f(\xi)$ δεν ενδιαφέρει καθόλου: μονάχα οι τιμές του x που είναι κοντά στο ξ αλλά όχι ίσο με το ξ, παίζουν ρόλο στον καθορισμό του ορίου $\lim_{x\to\xi} f(x)$.

3. Όταν γράφουμε: $0<|x-\xi|<\delta \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon$, συνοείται ότι οι τιμές του x που ενδιαφέρουν είναι αυτές που βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (αλλιώς δεν θα έχει νόημα το $f(x)$). Άρα αν θέλουμε να είμαστε πιο ακριβείς πρέπει να γράφουμε:

$0<|x-\xi|<\delta$ και x ανήκει στο πεδίο ορισμού της f $\Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon$

Συμφωνούμε όμως να χρησιμοποιούμε την συντομότερη έκφραση.

Πολλές φορές μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής όταν το x, η ανεξάρτητη μεταβλητή, πλησιάζει έναν αριθμό ξ μονάχα από την δεξιά ή αριστερή μεριά του. Δηλαδή όταν $x\to\xi+$ ή $x\to\xi-$ αντίστοιχως. Αυτό σημαίνει ότι το x πλησιάζει στο ξ αλλά μένει $>\xi$ ή $<\xi$ αντίστοιχως.

Έχουμε λοιπόν αντίστοιχους ορισμούς.

<u>Ορισμός</u>: Λέμε ότι μιά συνάρτηση $y=f(x)$ έχει <u>δεξιό πλευρικό όριο</u> α όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή x τείνει στο ξ, και συμβολίζουμε $\lim_{x\to\xi+} f(x)=\alpha$, αν: για οποιοδήποτε $\varepsilon>0$, υπάρχει κατάλληλο $\delta>0$ ώστε

$$0<x-\xi<\delta \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon$$

Υπάρχει και ο ανάλογος ορισμός για <u>αριστερό πλευρικό όριο</u> α, δηλαδή $\lim\limits_{x\to\xi-} f(x) = \alpha$, όπου η μόνη μεταβολή στον προηγούμενο ορισμό είναι η αντικατάσταση του $0 < x-\xi < \delta$ από το $0 < \xi - x < \delta$.

<u>Παραδείγματα</u> (1) Είδαμε προηγουμένως ότι $\lim\limits_{x\to 2} 3x = 6$. Είναι προφανές ότι $\lim\limits_{x\to 2+} 3x = 6$ και $\lim\limits_{x\to 2-} 3x = 6$. Διότι αν το $3x$ πλησιάζει το 6 όταν το x πλησιάζει το 2 ανεξαρτήτως κατευθύνσεως, τότε το ίδιο θα συμβαίνει αν το x πλησιάζει το 2 είτε από την δεξιά είτε από την αριστερή μεριά.

(2) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = -1$

Διότι, αν $x>0$ τότε $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$, ενώ αν $x<0$ τότε $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$. Άρα

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0+} 1 = 1 \quad \text{ενώ} \quad \lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0-} (-1) = -1 .$$

Τώρα είναι προφανές ότι το $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ <u>δεν υπάρχει</u>. Διότι αν υπήρχε τότε, όπως είπαμε και στο παράδειγμα 1, τα δύο πλευρικά όρια θα ήταν και τα δύο ίσα με το όριο.

(3) $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0$.

Αυτό είναι μάλλον προφανές. Όταν ο θετικός x μικραίνει απεριόριστα τότε και ο $\sqrt{x}$ μικραίνει απεριόριστα. Ας εξακριβώσουμε όμως αυτό με τον ορισμό. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να βρούμε κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε

$$0 < x < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon .$$

Όμως το $|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$ είναι ισοδύναμο με $0 \le x < \varepsilon^2$.

Άρα, κατάλληλο δ είναι οποιοδήποτε $\leq$ από το ε^2. Πράγματι, αν $\delta \leq \varepsilon^2$ τότε

$$0 < x < \delta \Rightarrow 0 < x < \varepsilon^2 \Rightarrow 0 < \sqrt{x} < \varepsilon \Rightarrow |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

Προσέξτε εδώ ότι το πεδίο ορισμού της $y = \sqrt{x}$ είναι το $[0, +\infty)$. Άρα δεν έχει νόημα να γράφουμε το $\lim_{x \to 0-} \sqrt{x}$: το x δεν μπορεί να πλησιάζει το 0 από την αριστερή μεριά του.

Επί πλέον, όταν το x πλησιάζει το 0 εξυπακούεται ότι πλησιάζει μόνο από την δεξιά μεριά του 0. Άρα μπορούμε να γράφουμε : $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = \lim_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$.

Παρόμοια ισχύουν και στο άλλο παράδειγμα

(4) $\lim_{x \to 1-} \sqrt{1-x} = 0$.

Παίρνουμε οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε $0 < 1-x < \delta \Rightarrow |\sqrt{1-x} - 0| < \varepsilon$.

Όμως το $|\sqrt{1-x} - 0| < \varepsilon$ ισοδυναμεί με $0 \leq 1-x < \varepsilon^2$. Άρα, κατάλληλο δ είναι οποιοδήποτε $\leq \varepsilon^2$. Πράγματι, αν $\delta \leq \varepsilon^2$ τότε

$$0 < 1-x < \delta \Rightarrow 0 < 1-x < \varepsilon^2 \Rightarrow 0 < \sqrt{1-x} < \varepsilon \Rightarrow$$
$$|\sqrt{1-x} - 0| < \varepsilon.$$

Εδώ το πεδίο ορισμού είναι το $(-\infty, 1]$. Άρα δεν έχει νόημα το $\lim_{x \to 1+} \sqrt{1-x}$ και, επί πλέον

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{1-x} = \lim_{x \to 1-} \sqrt{1-x} = 0$$

Μετά από αυτά τα τέσσερα παραδείγματα μπορούμε να διατυπώσουμε τα συμπεράσματά μας ως εξής:

<u>Θεώρημα</u> (i) Αν το πεδίο ορισμού της $y=f(x)$ περιλαμβάνει διάστημα $(ξ, β)$, αλλά δεν περιλαμβάνει κανένα διάστημα $(α, ξ)$, τότε το $\lim\limits_{x\to ξ-} f(x)$ δεν έχει νόημα και:

$\lim\limits_{x\to ξ} f(x)=α$ αν και μόνον αν $\lim\limits_{x\to ξ+} f(x)=α$.

(ii) Αν το πεδίο ορισμού της $y=f(x)$ περιλαμβάνει διάστημα $(α, ξ)$, αλλά κανένα διάστημα $(ξ, β)$, τότε το $\lim\limits_{x\to ξ+} f(x)$ δεν έχει νόημα και

$\lim\limits_{x\to ξ} f(x)=α$ αν και μόνον αν $\lim\limits_{x\to ξ-} f(x)=α$.

<u>Θεώρημα</u> Αν το πεδίο ορισμού της $y=f(x)$ περιλαμβάνει την ένωση $(α, ξ)\cup(ξ, β)$ τότε

$\lim\limits_{x\to ξ} f(x)=α$ αν και μόνον αν

$\lim\limits_{x\to ξ+} f(x)=α$ <u>και</u> $\lim\limits_{x\to ξ-} f(x)=α$

Μερικές φορές όταν το x, η ανεξάρτητη μεταβλητή, πλησιάζει έναν αριθμό $ξ$ τότε η εξαρτημένη μεταβλητή y δεν πλησιάζει κανέναν αριθμό αλλά αυξάνεται απεριόριστα. Τότε λέμε ότι

$\lim y=+\infty$ όταν $x\to ξ$, ή $\lim\limits_{x\to ξ} y=+\infty$.

<u>Προσοχή</u>: συμφωνούμε να λέμε ότι, όταν $\lim\limits_{x\to ξ} y=+\infty$, τότε το $\lim\limits_{x\to ξ} y$ <u>δεν υπάρχει</u> ή ότι η y <u>δεν</u> έχει όριο όταν $x\to ξ$. Όμοια και στην περίπτωση όπου η y γίνεται απεριόριστα μεγάλη αρνητική, δηλαδή όταν $\lim\limits_{x\to ξ} y=-\infty$.

Συνιστάται στον αναγνώστη να αποδείξει, ξεκινώντας από τον επακριβή ορισμό που μόλις δώσαμε, κάποια αναδιατυπώσεις παρόμοια με την (i) ⟶ (viii) των σελίδων 55-56 και να κατασκευάσει τους αντίστοιχους ορισμούς:

<u>Ορισμός</u> (i) Λέμε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ αν, για οποιοδήποτε $M>0$, υπάρχει κατάλληλο $\delta>0$ ώστε

$$0<|x-\xi|<\delta \Rightarrow f(x) > M.$$

(ii) Λέμε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$ αν, για οποιοδήποτε $M>0$, υπάρχει κατάλληλο $\delta>0$ ώστε

$$0<|x-\xi|<\delta \Rightarrow f(x) < -M.$$

<u>Παράδειγμα</u> $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

Θεωρούμε οποιοδήποτε $M>0$. Πρέπει να βρούμε $\delta>0$ ώστε

$$0<|x-1|<\delta \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2}>M.$$

Όμως $\frac{1}{(x-1)^2}>M \iff (x-1)^2<\frac{1}{M}$ και $x\neq 1 \iff$ $0<|x-1|<\frac{1}{\sqrt{M}}$.

Άρα οποιοδήποτε δ, το οποίο είναι $\le \frac{1}{\sqrt{M}}$, είναι κατάλληλο. Διότι, αν $0<\delta\le\frac{1}{\sqrt{M}}$ τότε

$$0<|x-1|<\delta \Rightarrow 0<|x-1|<\frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow 0<(x-1)^2<\frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2}>M$$

Ας ορίσει ο αναγνώστης τα <u>πλευρικά όρια</u> $\lim_{x\to\xi+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\xi+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\xi-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\xi-} f(x) = -\infty$ και ας διατυπώσει τα αντίστοιχα των θεωρημάτων της σελίδας 61 δίνοντας παραδείγματα.

Μένει να εξετάσουμε τις περιπτώσεις όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή x γίνεται απεριόριστα μεγάλη (θετική) ή απεριόριστα μεγάλη αρνητική δηλ. όταν $x\to+\infty$ ή $x\to-\infty$.

Πάλι η εξαρτημένη μεταβλητή $y=f(x)$ υπάρχει περίπτωση να πλησιάζει έναν αριθμό α ή να γίνεται απεριόριστα μεγάλη θετική ή να γίνεται απεριόριστα μεγάλη αρνητική. Έχουμε δηλαδή τις εξής περιπτώσεις:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\alpha \;,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \;,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\alpha \;,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \;,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty .$$

Οι αυστηροί ορισμοί διατυπώνονται ως εξής:

<u>Ορισμοί</u> (1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\alpha$ αν, για οποιοδήποτε $\varepsilon>0$, υπάρχει κατάλληλο $\Delta>0$ ώστε: $x>\Delta \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon$

(2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ αν, για οποιοδήποτε $E>0$, υπάρχει κατάλληλο $\Delta>0$ ώστε: $x>\Delta \Rightarrow f(x)>E$.

(3) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ αν, για οποιοδήποτε $E>0$, υπάρχει κατάλληλο $\Delta>0$ ώστε: $x>\Delta \Rightarrow f(x)<-E$.

(4) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\alpha$ αν, για οποιοδήποτε $\varepsilon>0$, υπάρχει κατάλληλο $\Delta>0$ ώστε: $x<-\Delta \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon$

(5) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ αν, για οποιοδήποτε $E>0$, υπάρχει κατάλληλο $\Delta>0$ ώστε: $x<-\Delta \Rightarrow f(x)>E$

(6) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ αν, για οποιοδήποτε $E>0$, υπάρχει κατάλληλο $\Delta>0$ ώστε: $x<-\Delta \Rightarrow f(x)<-E$.

<u>Προσοχή</u>: Θα πρέπει να αποτελεί <u>έσχατη</u> η υποχρέωση να μάθει κανείς <u>απ' έξω</u> τους ορισμούς αυτούς!! Συνιστάται, επομένως, στον αναγνώστη να <u>κατανοήσει</u> τους ορισμούς ξεκινώντας από "εμπειρική" διατύπωση και καταλήγοντας μετά από σειρά αναδιατυπώσεων σ' αυτούς.

Επίσης και μπορεί με να έχει ανάλογα παραδείγματα.

<u>Παραδείγματα</u> $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} (-\sqrt{x}) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{1-x} = -1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{|x|} = +\infty$,

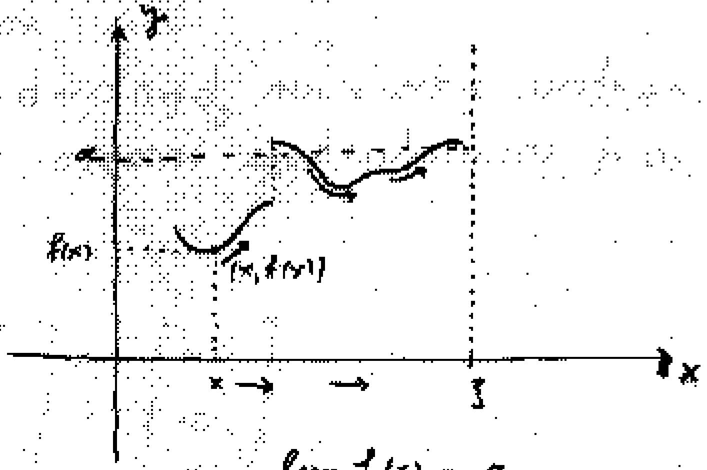
$\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^2) = -\infty$.

<u>Παρατήρηση</u>: Όταν εξετάζουμε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ εξυπακούεται ότι το πεδίο ορισμού της $y=f(x)$ περιλαμβάνει κάποιο διάστημα $(\alpha, +\infty)$. Επίσης όταν εξετάζουμε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ πρέπει το πεδίο ορισμού της $y=f(x)$ να περιλαμβάνει κάποιο διάστημα $(-\infty, \beta)$.

Για παράδειγμα δεν έχουν νόημα τα $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1-x}$.

<u>Γεωμετρική σημασία του ορίου</u>

Το διπλανό σχήμα περιγράφει την κατάσταση $\lim\limits_{x\to\xi-} f(x) = \alpha$.
Το x "κινείται" προς τα δεξιά πλησιάζοντας το ξ. Το σημείο $(x, f(x))$ κινείται πάνω στο γράφημα της $y=f(x)$.

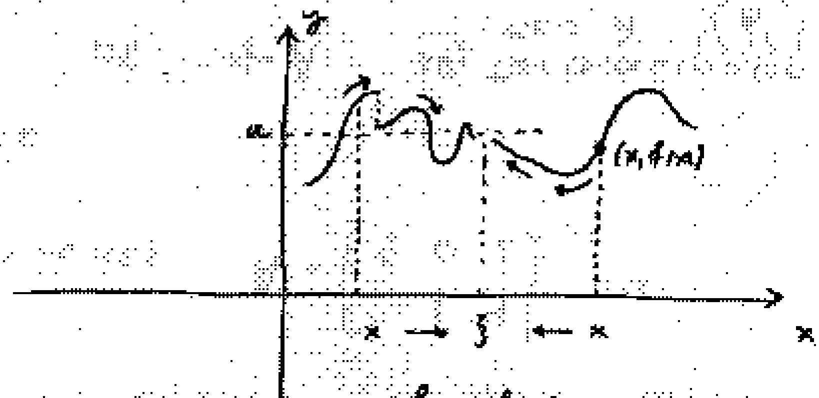


$\lim\limits_{x\to\xi-} f(x) = \alpha$

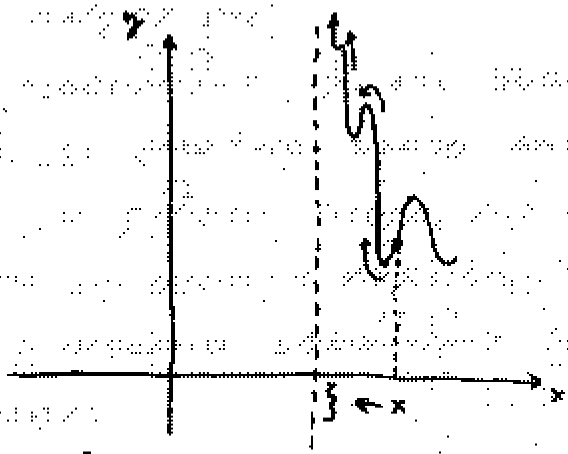
Μπορεί το γράφημα να έχει κοψίματα ή κυματοειδήματα καθώς το x πλησιάζει προς το ξ. Όμως το "ύψος" $f(x)$ θα πρέπει να πλησιάζει το ύψος α. Δηλαδή το σημείο $(x, f(x))$ θα πρέπει να πλησιάζει το σημείο (ξ, α) του επιπέδου. Επομένως το κομμάτι του γραφήματος που βρίσκεται στο αριστερό ημιεπίπεδο που ορίζει η κάθετη ευθεία $x=\xi$ τείνει να συγκεντρωθεί στο σημείο (ξ, α).

Το κομμάτι του γραφήματος στο δεξιό ημιεπίπεδο, αν υπάρχει, δεν μας ενδιαφέρει. Ανάλογες εικόνες έχουμε και στις άλλες περιπτώσεις.

$\lim\limits_{x \to \xi+} f(x) = \alpha$

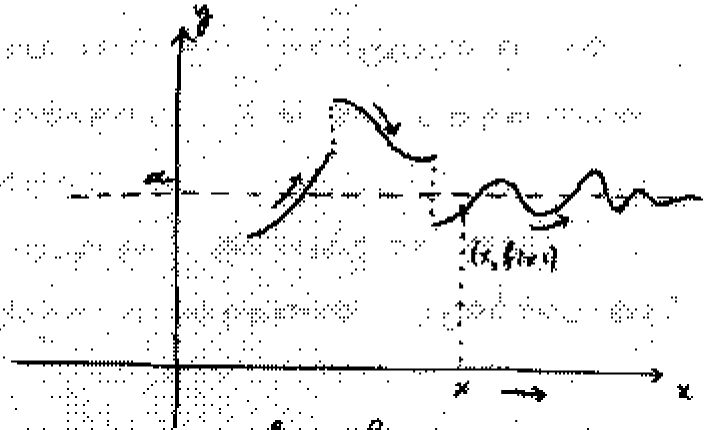


$\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = \alpha$



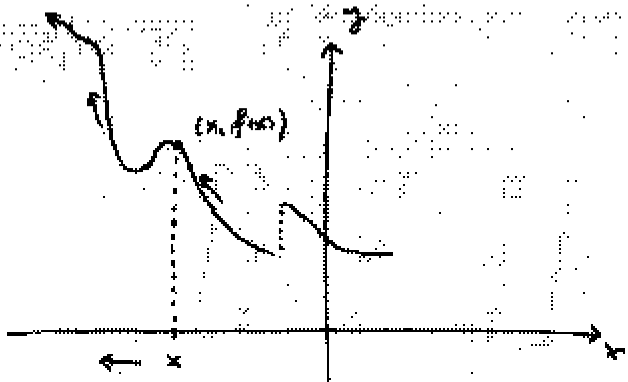
$\lim\limits_{x \to \xi+} f(x) = +\infty$

"κάθετη ασύμπτωτος"



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \alpha$

"οριζόντια ασύμπτωτος"



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Γενικά λέμε ότι η οριζόντια ευθεία $y = \alpha$ είναι <u>οριζόντια ασύμπτωτος</u> του γραφήματος αν: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \alpha$ ή αν $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \alpha$.

Και ότι η κατακόρυφη ευθεία $x = \xi$ είναι <u>κάθετη ασύμπτωτος</u> του γραφήματος αν: είτε $\lim\limits_{x \to \xi+} f(x) = \pm\infty$ είτε $\lim\limits_{x \to \xi-} f(x) = \pm\infty$

Αλγεβρικές ιδιότητες

Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα (α) Αν $\lim f(x) = \alpha$ και $\lim g(x) = b$, τότε

$$\lim (f(x) + g(x)) = \alpha + b$$

(β) Αν $\lim f(x) = \alpha$ και λ είναι σταθερός αριθμός, τότε

$$\lim (\lambda f(x)) = \lambda \alpha$$

(γ) Αν $\lim f(x) = \alpha$ και $\lim g(x) = b$, τότε

$$\lim (f(x) g(x)) = \alpha b$$

(δ) Αν $\lim f(x) = \alpha$ και $\lim g(x) = b$, τότε

$$\lim \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\alpha}{b}$$, αρκεί να ισχύει $b \neq 0$.

Θα προσέξατε ότι γράφουμε $\lim$ και όχι $\lim\limits_{x \to \xi}$ ή $\lim\limits_{x \to \xi +}$ ή $\lim\limits_{x \to +\infty}$ ή οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.

Ο λόγος είναι ότι το θεώρημα ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις συμπεριφοράς του x. (Αρκεί βεβαίως στις υποθέσεις και στο συμπέρασμα να ισχύει η ίδια περίπτωση)

Απόδειξη (όχι αυστηρή)

(α) Καθώς το $x \to \xi$ ή $x \to \xi-$ ή $x \to +\infty$ ή σε κάθε άλλη περίπτωση, το $|f(x) - \alpha|$ και το $|g(x) - b|$ γίνονται απεριόριστα μικρά. Τότε όμως και το

$$|(f(x) + g(x)) - (\alpha + b)| = |(f(x) - \alpha) + (g(x) - b)| \leq$$

$$\leq |f(x) - \alpha| + |g(x) - b|$$

θα γίνεται απεριόριστα μικρό.

(β) Το $|f(x) - \alpha|$ γίνεται απεριόριστα μικρό. Άρα και το $|\lambda f(x) - \lambda a| = |\lambda| \cdot |f(x) - a|$ γίνεται απεριόριστα μικρό αφού το $|\lambda|$ είναι αμετάβλητος αριθμός.

(γ) Παρατηρούμε ότι

$$|f(x)g(x) - ab| = |f(x)g(x) - f(x)b + f(x)b - ab| \le$$

$$\le |f(x)|\,|g(x) - b| + |b|\,|f(x) - a| =$$

$$= |f(x) - a + a|\,|g(x) - b| + |b|\,|f(x) - a|$$

$$\le |f(x) - a|\,|g(x) - b| + |a|\,|g(x) - b| + |b|\,|f(x) - a| .$$

Αφού τα $|f(x) - a|$, $|g(x) - b|$ γίνονται απεριόριστα μικρά, το γινόμενό τους $|f(x) - a|\,|g(x) - b|$ καθώς και τα σταθερά πολλαπλάσιά τους με τα $|b|$, $|a|$ αντιστοίχως γίνονται επίσης απεριόριστα μικρά.

(δ) Αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση $\lim \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}$ αν $b \neq 0$.

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|g(x) - b|}{|g(x)|\,|b|}$$

Καθώς το $|g(x) - b|$ γίνεται απεριόριστα μικρό, όταν το x θα έχει προχωρήσει αρκετά προς το όριό του (ξ ή $+\infty$ ή ό,τι άλλο) η διαφορά αυτή θα γίνει $< \frac{|b|}{2}$. Τότε

$$|g(x)| = |g(x) - b + b| > |b| - |g(x) - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} .$$

Αν δηλαδή το x είναι αρκετά κοντά στο όριό του

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b} \right| < \frac{|g(x) - b|}{\frac{|b|}{2}\,|b|} = \frac{2}{|b|^2}\,|g(x) - b| .$$

Καθώς το x συνεχίζει να πλησιάζει το όριό του, το $|g(x) - b|$ γίνεται απεριόριστα μικρό. Άρα και το σταθερό πολλαπλάσιο του $\frac{2}{|b|^2}\,|g(x) - b|$ γίνεται απεριόριστα μικρό.

Στο θεώρημα αυτό τα όρια α και β είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν επιτραπούν τα $+\infty$, $-\infty$ τότε η κατάσταση γίνεται πιο περίπλοκη και άλλοι κανόνες ισχύουν ενώ άλλοι δεν ισχύουν.

<u>Θεώρημα</u> (1) Αν $\lim f(x) = \pm\infty$ και $\lim g(x) = \pm\infty$ ή β, τότε $\lim (f(x)+g(x)) = \pm\infty$.

Αλλά, αν $\lim f(x) = \pm\infty$ και $\lim g(x) = \mp\infty$, τότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε τίποτε γενικό για το $\lim(f(x)+g(x))$.

(2) Αν $\lim f(x) = \pm\infty$ και $\lim g(x) = +\infty$ ή $\beta>0$, τότε $\lim (f(x)g(x)) = \pm\infty$.

Αν $\lim f(x) = \pm\infty$ και $\lim g(x) = -\infty$ ή $\beta<0$, τότε $\lim (f(x)g(x)) = \mp\infty$.

Αλλά αν $\lim f(x) = \pm\infty$ και $\lim g(x) = 0$, τότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε τίποτε γενικό για το $\lim(f(x)g(x))$.

(3) Αν $\lim g(x) = \pm\infty$, τότε $\lim \frac{1}{g(x)} = 0$

Αν $\lim g(x) = 0$ και $g(x)>0$ για κάθε x που είναι κοντά στο όριο του x, τότε $\lim \frac{1}{g(x)} = +\infty$

Αν $\lim g(x) = 0$ και $g(x)<0$ για κάθε x που είναι κοντά στο όριο του x, τότε $\lim \frac{1}{g(x)} = -\infty$

Αλλά, αν $\lim g(x) = 0$ και το $g(x)$ έχει μεταβλητό πρόσημο καθώς το x τείνει στο όριό του, τότε το $\lim \frac{1}{g(x)}$ δεν υπάρχει.

Ας προσπαθήσει ο αναγνώστης να καταλάβει τα θετικά συμπεράσματα και να ψάξει με παραδείγματα για τις αρνητικές καταστάσεις. Γενικά πρέπει να αποφεύγουμε: πρόσθεση "απείρων" με διαφορετικά πρόσημα, πολλαπλασιασμό "απείρου" με μηδέν, αντιστροφή του μηδενός (εκτός αν υπάρχει παραπάνω πληροφορία για το πρόσημο της μεταβλητής ποσότητας) και διαίρεση "απείρου" με "άπειρο".

και μηδενός με μηδέν.

Παραδείγματα. (1) Προφανώς $\lim\limits_{x\to\xi} x = \xi$. Με διαδοχική εφαρμογή του κανόνα του γινομένου παίρνουμε $\lim\limits_{x\to\xi} x^2 = \lim\limits_{x\to\xi}(x\cdot x) =$ $\lim\limits_{x\to\xi} x \cdot \lim\limits_{x\to\xi} x = \xi\cdot\xi = \xi^2$ και επαγωγικά:

$$\lim_{x\to\xi} x^n = \lim_{x\to\xi}(x^{n-1}\cdot x) = \lim_{x\to\xi} x^{n-1}\cdot \lim_{x\to\xi} x = \xi^{n-1}\cdot\xi = \xi^n.$$

Και με εφαρμογή των κανόνων (β) και (γ) έχουμε για πολυώνυμο

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$$\lim_{x\to\xi} P(x) = \lim_{x\to\xi}(a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to\xi}(a_n x^n) + \dots + \lim_{x\to\xi}(a_1 x) + a_0$$

$$= a_n \lim_{x\to\xi} x^n + a_{n-1}\lim_{x\to\xi} x^{n-1} + \dots + a_1 \lim_{x\to\xi} x + a_0 =$$

$$= a_n \xi^n + a_{n-1}\xi^{n-1} + \dots + a_1\xi + a_0 = P(\xi)$$

Αν $Q(x) = \dfrac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$ είναι ρητή συνάρτηση, τότε:

$$\lim_{x\to\xi} Q(x) = \frac{\lim\limits_{x\to\xi}(a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0)}{\lim\limits_{x\to\xi}(b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0)} = \frac{a_n\xi^n + \dots + a_1\xi + a_0}{b_m\xi^m + \dots + b_1\xi + b_0} = Q(\xi),$$

αρκεί το ξ να μην μηδενίζει τον παρονομαστή.

Έχουμε λοιπόν

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\xi} P(x) = P(\xi), \quad \text{αν } P(x) = \text{πολυώνυμο} \\ \lim\limits_{x\to\xi} Q(x) = Q(\xi), \quad \text{αν } Q(x) = \text{ρητή συνάρτηση και το } \xi \text{ δεν} \\ \qquad\qquad \text{μηδενίζει τον παρονομαστή.} \end{array}}$$

Αν το ξ μηδενίζει τον παρονομαστή του $Q(x)$ τότε δεν υπάρχει γενικό αποτέλεσμα: (i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ (ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$ δεν υπάρχει, διότι

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1} = +\infty$ ενώ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1} = -\infty$,

(iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x-2) = -1$.

(2) Αν $Q(x) = \dfrac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$ είναι ρητή συνάρτηση και ζητάμε τα $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} Q(x)$ τότε διακρίνουμε περιπτώσεις.

(α) $n<m$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} Q(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \dots + a_0\frac{1}{x^n}}{b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \dots + b_0\frac{1}{x^m}} \cdot \dfrac{1}{x^{m-n}}\right)$

$$= \frac{a_n}{b_m}\cdot 0 = 0$$

(β) $n=m$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} Q(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \dots + a_0\frac{1}{x^n}}{b_n + b_{n-1}\frac{1}{x} + \dots + b_0\frac{1}{x^n}} = \dfrac{a_n}{b_n}$

(γ) $n>m$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} Q(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \dots + a_0\frac{1}{x^n}}{b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \dots + b_0\frac{1}{x^m}} \cdot x^{n-m}\right)$

$$= \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_m}\cdot(+\infty) & \text{αν } n-m = \text{άρτιος} \\[2ex] \dfrac{a_n}{b_m}\cdot(\pm\infty) & \text{αν } n-m = \text{περιττός} \end{cases}$$

Διότι, αρχίζοντας από τα προφανή $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ βρίσκουμε διαδοχικά για όλες τις δυνάμεις του x :

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2 = \lim_{x\to\pm\infty}(x\cdot x) = (\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^3 = \lim_{x\to\pm\infty}(x^2\cdot x) = (+\infty)(\pm\infty) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^4 = \lim_{x\to\pm\infty}(x^3\cdot x) = (\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^5 = \lim_{x\to\pm\infty}(x^4\cdot x) = (+\infty)(\pm\infty) = \pm\infty$$

. . . .

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^N = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } N = \text{άρτιος} \\ \pm\infty, & \text{αν } N = \text{περιττός} \end{cases}$

Θεωρήματα σύγκρισης και θεώρημα "σάντουιτς"

Θα δούμε τώρα μερικά αποτελέσματα με μεγάλη πρακτική και θεωρητική σημασία.

Θεώρημα σύγκρισης: Έστω $f(x) \le g(x)$ για κάθε x κοντά στο όριο του. Αν $\lim f(x) = \alpha$ και $\lim g(x) = \beta$, τότε $\alpha \le \beta$.

__Παρατήρηση:__ πάλι το θεώρημα ισχύει σε κάθε περίπτωση: $x \to \xi$, $x \to \xi+$, $x \to \xi-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

__Απόδειξη (όχι αυστηρή)__ Υποθέτουμε, για να φτάσουμε σε άτοπο, ότι $\beta < \alpha$. Ο αριθμός $\frac{\beta+\alpha}{2}$ βρίσκεται ανάμεσα στους β, α και στη μέση απόσταση.

Αφού το $|f(x)-\alpha|$ γίνεται απεριόριστα μικρό, όπως και το $|g(x)-\beta|$, όταν το x πλησιάζει αρκετά το όριό του (όποιο κι αν είναι αυτό) τότε το $f(x)$ θα βρεθεί δεξιά του $\frac{\beta+\alpha}{2}$, ενώ το $g(x)$ θα βρεθεί αριστερά του $\frac{\beta+\alpha}{2}$. Τότε όμως $g(x) < \frac{\beta+\alpha}{2} < f(x)$. Άτοπο!

__Εφαρμογή__ 1) Αν όλες οι τιμές μιας συνάρτησης είναι $f(x) \geq \alpha$, όπου α είναι σταθερός αριθμός, και αν $\lim f(x) = \beta$, τότε $\beta \geq \alpha$. (Εφαρμόζουμε με την σταθερή συνάρτηση $g(x) = \alpha$)

2) Αν όλες οι τιμές της $f(x)$ είναι $f(x) \leq \alpha$, και $\lim f(x) = \beta$, τότε $\beta \leq \alpha$.

3) Αν όλες οι τιμές της $f(x)$ είναι σε ένα διάστημα $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ και αν $\lim f(x) = \gamma$, τότε $\alpha \leq \gamma \leq \beta$.

__Θεώρημα σάντουιτς__ (α) Έστω $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ για κάθε x κοντά στο όριό του. Αν $\lim f(x) = \lim h(x) = \alpha$, τότε $\lim g(x) = \alpha$.

__Παρατήρηση__ Προσέξτε ότι __δεν__ είναι ανάγκη να γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι υπάρχει το $\lim g(x)$. Αρκεί να γνωρίζουμε ότι υπάρχουν τα όρια των ακριανών συναρτήσεων $f(x)$, $h(x)$ και ότι είναι ίσα.

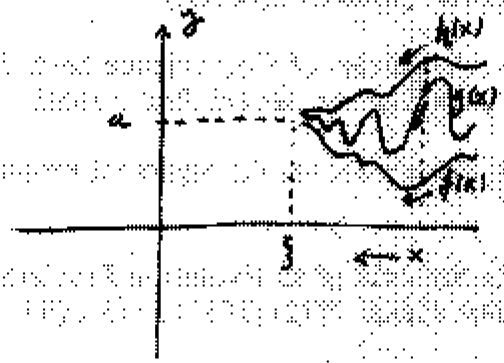
(β) Έστω $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο όριό του.
Αν $\lim f(x) = +\infty$, τότε $\lim g(x) = +\infty$.
Αν $\lim g(x) = -\infty$, τότε $\lim f(x) = -\infty$.

<u>Απόδειξη (ισχυρισμού)</u> (α) $f(x) \le g(x) \le h(x) \Rightarrow$

$$-|f(x)-a| \le f(x)-a \le g(x)-a \le h(x)-a \le |h(x)-a|$$

Αφού τα $|h(x)-a|$ και $|f(x)-a|$ γίνονται αυθαίρετα μικρά, άρα και το $g(x)-a$ γίνεται αυθαίρετα μικρό, καθώς το x τείνει στο όριό του.

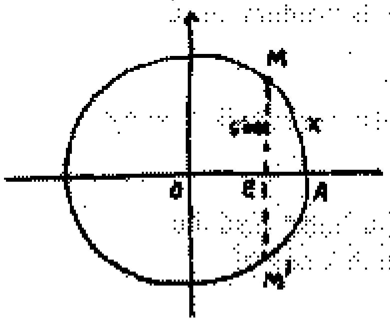
(β) Προφανές.



<u>Παραδείγματα</u>

(1) $\boxed{\lim_{x\to\xi} \sin x = \sin\xi \quad , \quad \lim_{x\to\xi} \cos x = \cos\xi}$

Χρησιμοποιούμε την βασική ανισότητα: $|\sin x| \le |x|$.



Καταρχήν, αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$, και το μήκος του τόξου AM είναι x, τότε η κατακόρυφη ME είναι $\sin x$. Αν M' είναι το συμμετρικό του σημείου M, τότε:

$0 < 2\sin x =$ μήκος ευθ. τμήματος $MEM' <$ μήκος τόξου $MAM' = 2x$.

Άρα $0 < \sin x < x$, δηλαδή $0 < |\sin x| < |x|$.

Αν $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, τότε $0 < -x < \frac{\pi}{2}$. Άρα $0 < \sin(-x) < -x$

δηλαδή $0 < |\sin x| < |x|$.

Αν $x = 0$, τότε προφανώς $|\sin x| \le |x|$

Αν $\frac{\pi}{2} \le |x|$, τότε $|\sin x| \le 1 < \frac{\pi}{2} \le |x|$.

Άρα η βασική ανισότητα ισχύει σε κάθε περίπτωση.

Τώρα χρησιμοποιούμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\sin x - \sin\xi = 2\sin\frac{x-\xi}{2}\cos\frac{x+\xi}{2} \quad , \quad \cos x - \cos\xi = 2\sin\frac{x-\xi}{2}\sin\frac{x+\xi}{2}.$$

Από την πρώτη : $|\sin x - \sin\xi| = 2\left|\sin\frac{x-\xi}{2}\right|\left|\cos\frac{x+\xi}{2}\right| \le 2\cdot\left|\frac{x-\xi}{2}\right|\cdot 1$

$= |x-\xi|$.

Όμοια, από την δεύτερη : $|\cos x - \cos\xi| \le |x-\xi|$.

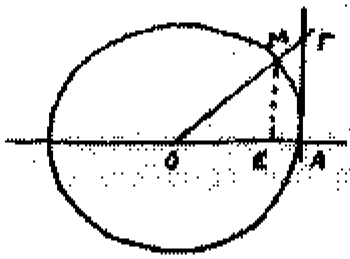
Άρα $$-|x-\xi| \le \sin x - \sin\xi \le |x-\xi|$$
$$-|x-\xi| \le \cos x - \cos\xi \le |x-\xi|$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα σάντουιτς και βρίσκουμε $\lim_{x\to\xi}(\sin x - \sin\xi) = 0$,

δηλαδή $\lim_{x\to\xi}\sin x = \sin\xi$

Όμοια $\lim_{x\to\xi}\cos x = \cos\xi$.

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$



Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$ τότε:

$0 < \sin x =$ μήκος MK $< x =$ μήκος τόξου MA $<$

$< \tan x =$ μήκος $ΓA$ (γιατί;)

δηλ. $0 < \sin x < x < \tan x$,

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

Από το θεώρημα σάντουιτς : $\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = 1$

Τώρα $\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0-}\frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = 1$ (διότι αν $x\to 0-$, τότε $-x\to 0+$) Άρα $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

(3) $$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{x\to\xi} x^a = \xi^a \quad (\xi>0), \quad \lim_{x\to 0+} x^a = \begin{cases} 0, & \text{αν } a>0 \\ +\infty, & \text{αν } a<0 \end{cases} \\ \lim_{x\to +\infty} x^a = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a>0 \\ 0, & \text{αν } a<0 \end{cases} \end{array}}$$

Απόδειξη (i) $\xi = 1$ και $a>0$: Διαλέγουμε φυσικό αριθμό $n > a$.

Τότε $1 < x^a < x^n$, όταν $1 < x$.

Αφού $\lim_{x\to 1+} x^n = 1^n = 1$, από θεώρημα σάντουιτς :

$$\lim_{x\to 1+} x^a = 1 = \xi^a.$$

Κατόπιν, $\lim_{x\to 1-} x^a = \lim_{x\to 1-} \frac{1}{(\frac{1}{x})^a} = \lim_{y\to 1+} \frac{1}{y^a} = \frac{1}{1} = 1 = \xi^a$.

Περίπτωση (ii) γενικό $\xi>0$, και $a>0$:

$$\lim_{x\to\xi} x^a = \lim_{x\to\xi} \left(\frac{x}{\xi}\right)^a \cdot \xi^a = \lim_{y\to 1} y^a \cdot \xi^a = 1\cdot\xi^a = \xi^a.$$

Περίπτωση (iii) γενικό $\xi>0$ και $a<0$:

$$\lim_{x\to\xi} x^a = \lim_{x\to\xi} \frac{1}{x^{-a}} = \frac{1}{\xi^{-a}} = \xi^a.$$

Άρα αποδείξαμε ότι $\lim_{x\to\xi} x^a = \xi^a$ όταν $\xi>0$.

Οι περιπτώσεις $x\to 0+$ και $x\to+\infty$ αποδεικνύονται εύκολα με τον ορισμό του ορίου και ας τις μελετήσει ο αναγνώστης!

(4)
$$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{x\to\xi} a^x = a^\xi \ (a>0), \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{αν } a>1 \\ +\infty, & \text{αν } 0<a<1 \end{cases} \\ \lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a>1 \\ 0, & \text{αν } 0<a<1 \end{cases} \end{array}}$$

Περίπτωση (i) $a>1$: ως γνωστόν $a^{1/n}\to 1$. Άρα αν μας δώσουν οποιοδήποτε $\varepsilon>0$ υπάρχει φυσικός n αρκετά μεγάλος ώστε $-\varepsilon < a^{-\frac{1}{n}}-1 < a^{\frac{1}{n}}-1 < \varepsilon$.

Αν τώρα το x είναι τόσο κοντά στο ξ ώστε $-\frac{1}{n} < x-\xi < \frac{1}{n}$, τότε: $-\varepsilon < a^{-\frac{1}{n}}-1 < a^{x-\xi}-1 < a^{\frac{1}{n}}-1 < \varepsilon$ (διότι $a>1$)

Άρα $\lim_{x\to\xi} a^{x-\xi} = 1$, $\lim_{x\to\xi}\left(\frac{a^x}{a^\xi}\right) = 1$, $\lim_{x\to\xi} a^x = a^\xi$.

Περίπτωση (ii) $0<a<1$: $\lim_{x\to\xi} a^x = \lim_{x\to\xi} \frac{1}{(\frac{1}{a})^x} = \frac{1}{(\frac{1}{a})^\xi} = a^\xi$.

Άρα αποδείξαμε ότι $\lim_{x\to\xi} a^x = a^\xi$ όταν $a>0$.

(Χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα "σάντουιτς".)

Ας μελετήσουμε τώρα το $\lim_{x\to+\infty} a^x$ όταν $a>1$.

Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $[x] \le x < [x]+1$, όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x. Όταν το $x\to+\infty$

τότε το $[x]$ είναι φυσικός αριθμός.

$$a^x \geq a^{[x]} \quad (\text{διότι } a>1) = (1+(a-1))^{[x]} \geq 1+(a-1)[x]$$

(Bernoulli) $> 1+(a-1)(x-1)$.

Επειδή $(a-1)>0$, $\lim_{x\to+\infty}\{1+(a-1)(x-1)\} = +\infty$.

Άρα $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

Αν τώρα $0<a<1$, τότε $\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = 0$.

Αν $a>1$, τότε $\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{a^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0$.

Αν $0<a<1$, τότε $\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = +\infty$.

<u>Θεώρημα</u> Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \alpha$ και η ακολουθία $x_n \to \xi$ με $x_n \neq \xi$ για όλα τα n. Τότε $f(x_n) \to \alpha$.

<u>Απόδειξη</u> (όχι αυστηρή). Καθώς ο δείκτης n αυξάνει, ο όρος x_n πλησιάζει το ξ (χωρίς να γίνεται ίσος με ξ). Άρα το x_n είναι μία από τις τιμές του x καθώς το x πλησιάζει προς το ξ. Αφού το $y=f(x)$ θα πλησιάζει με την σειρά του το α, και αφού το $y_n=f(x_n)$ είναι μία από τις τιμές του y, είναι φανερό ότι το y_n θα πλησιάζει απεριόριστα το α.

Είναι προφανές ότι το θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει αν το α γίνει $+\infty$ ή $-\infty$. Επίσης αν το $x\to\xi$ γίνει $x\to\xi+$ ή $x\to\xi-$ ή $x\to+\infty$ ή $x\to-\infty$. Αρκεί τα ανάλογα να ισχύουν και για την ακολουθία x_n. Για παράδειγμα, αν $x\to\xi+$, θα πρέπει να υποθέσουμε ότι $x_n\to\xi$ και ότι $x_n>\xi$ για όλα τα n.

Το κριτήριο αυτό χρησιμοποιείται πολλές φορές για να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση δεν έχει όριο: αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι το $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ δεν υπάρχει, αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες x_n και x_n' ώστε (1) $x_n \to \xi$, $x_n' \to \xi$ και $x_n \neq \xi$, $x_n' \neq \xi$ για όλα τα n και (2) $\lim f(x_n) \neq \lim f(x_n')$.

Αν το όριο $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει, τότε τα $\lim f(x_n)$, $\lim f(x_n')$ θα είναι ίσα μ' αυτό το όριο, άρα και μεταξύ τους ίσα.

<u>Παραδείγματα</u> (1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, όπου $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.

Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $x_n' = \dfrac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$.

Παρατηρούμε ότι $x_n \to 0$, $x_n' \to 0$ και $x_n \neq 0$, $x_n' \neq 0$.

Όμως $f(x_n) = 1 \to 1$, $f(x_n') = -1 \to -1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, όπου $f(x) = \frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x})$.

Θεωρούμε τις ίδιες ακολουθίες. Τότε

$$f(x_n) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty, \quad f(x_n') = \frac{\pi}{2} - 2n\pi \to -\infty .$$

(3) Η συνάρτηση $y = \sin(\frac{1}{x})$ του παραδείγματος 1 είναι αρκετά ενδιαφέρουσα και θα την προσέξουμε λίγο παραπάνω. Το πεδίο ορισμού της είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί εκτός από το $x=0$. Όλες οι τιμές της περιέχονται στο διάστημα $[-1,1]$, διότι

$-1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1$. Δηλαδή η συνάρτηση είναι φραγμένη.

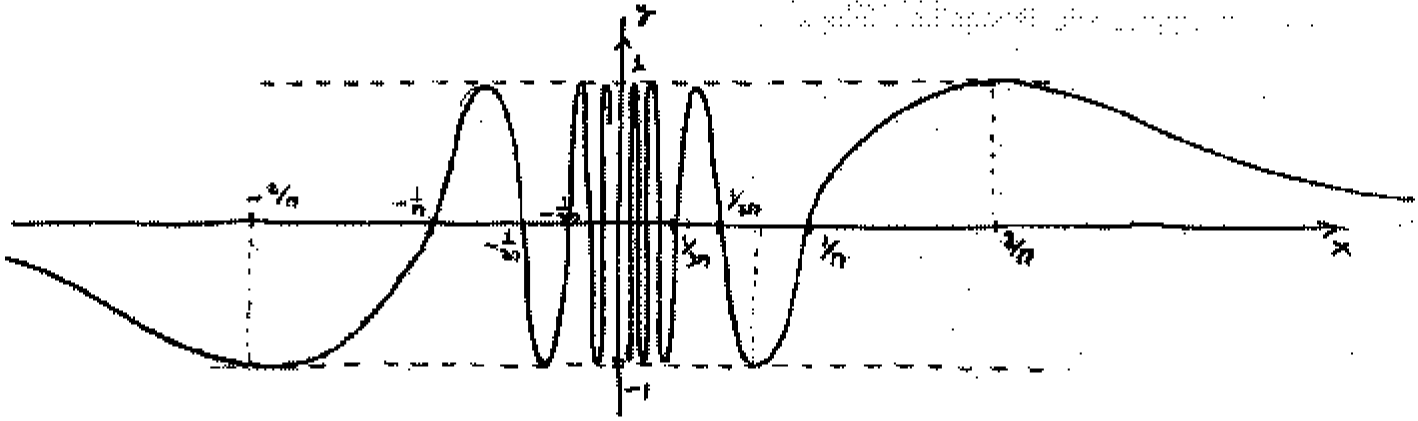
Λύνοντας την εξίσωση $\sin(\frac{1}{x}) = 1$ βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\sin(\tfrac{1}{x}) = 1 \iff x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \quad n = \text{ακέραιος}$$

Επίσης βρίσκουμε ότι

$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = -1 \iff x = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, n = ακέραιος.

$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff x = \frac{1}{n\pi}$, n ακέραιος $\neq 0$.



Η συνάρτηση είναι περιττή, άρα το γράφημά της για $x<0$ είναι το συμμετρικό του γραφήματος για $x>0$ ως προς το σημείο $(0,0)$. Καθώς, όταν το x είναι >0, η συνάρτηση μηδενίζεται στις τιμές $x = \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \frac{1}{4\pi}, \dots$ οι οποίες αποτελούν ακολουθία η οποία συγκλίνει στο 0. Στο διάστημα $\left(\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$ η συνάρτηση είναι θετική, έχει μέγιστη τιμή $+1$ στο $x = \frac{2}{\pi}$ και $\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
Στα ενδιάμεσα διαστήματα $\left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right), \left(\frac{1}{3\pi}, \frac{1}{2\pi}\right), \left(\frac{1}{4\pi}, \frac{1}{3\pi}\right), \dots$ είναι εναλλάξ αρνητική και θετική και "πιάνει" από μία φορά στο καθένα την ελάχιστη ή μέγιστη τιμή $-1, +1, -1, \dots$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι καθώς το $x \to 0+$ οι τιμές της $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ δεν συγκλίνουν σε κάποιο όριο, αλλά κυμαίνονται άπειρες φορές ανάμεσα στο -1 και στο $+1$. Οποιαδήποτε τιμή y, $-1 \le y \le 1$, "πιάνεται" άπειρες φορές καθώς το $x \to 0+$.

Ενδιαφέρον, επίσης, παρουσιάζουν τρεις παρόμοιες συναρτήσεις

$$y = x\sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad y = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad y = \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Η πρώτη είναι περιττή ενώ οι δύο άλλες είναι άρτιες. Όταν το x είναι >0, όλες μηδενίζονται στα ίδια, όπως προηγουμένως, σημεία:

$x = \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \frac{1}{4\pi}, \dots$. Τώρα όμως οι συναρτήσεις δεν περιορίζονται από τις οριζόντιες ευθείες $y=+1$, $y=-1$.

Παρατηρούμε ότι: $-x \le x\sin(\frac{1}{x}) \le x$, $-x^2 \le x^2\sin(\frac{1}{x}) \le x^2$,

$-\frac{1}{x} \le \frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x}) \le \frac{1}{x}$

και ότι ισχύουν οι αριστερές ισότητες ακριβώς όπου $\sin(\frac{1}{x}) = -1$, και οι δεξιές ισότητες ακριβώς όπου $\sin(\frac{1}{x}) = +1$.

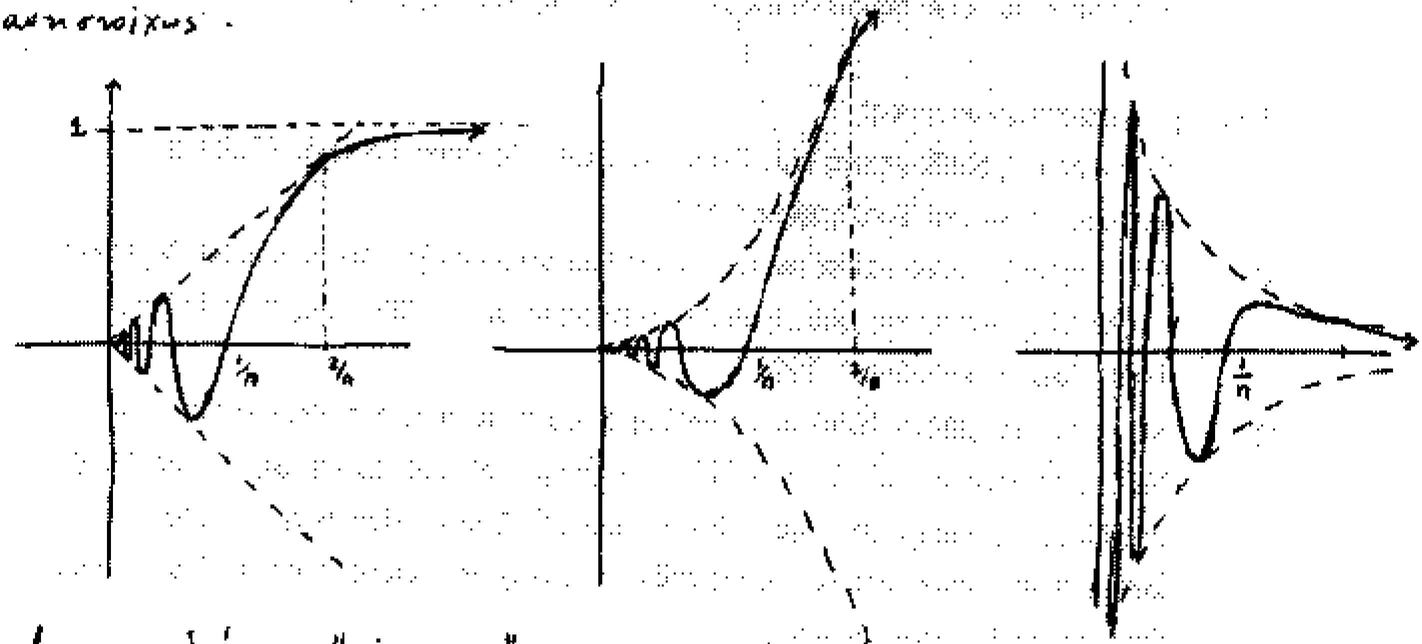
Στο διάστημα $(\frac{1}{\pi}, +\infty)$ και οι τρείς συναρτήσεις είναι θετικές

και: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 1$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sin(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot x\sin(\frac{1}{x}) = (+\infty)\cdot 1 = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(\frac{1}{x}) = 0\cdot 0 = 0$

Στα ενδιάμεσα διαστήματα $(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi})$, $(\frac{1}{3\pi}, \frac{1}{2\pi})$, $(\frac{1}{4\pi}, \frac{1}{3\pi})$, ... και οι τρείς γίνονται εναλλάξ αρνητικές και θετικές και "ακουμπάνε" από μία φορά στο καθένα τις καμπύλες $y=\pm x$, $y=\pm x^2$, $y=\pm\frac{1}{x}$ αντιστοίχως.



Από την ιδιότητα "σάντουιτς" έχουμε για τις δύο πρώτες ότι:

$\lim\limits_{x\to0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$, $\lim\limits_{x\to0} x^2\sin(\frac{1}{x}) = 0$.

Η τρίτη όμως, καθώς το $x \to 0+$, έχει τιμές οι οποίες ανεβαίνουν απεριόριστα σε όλο και μεγαλύτερα θετικά και αρνητικά όρια. $\lim\limits_{x\to0+}\frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x})$ δεν υπάρχει.

Αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις

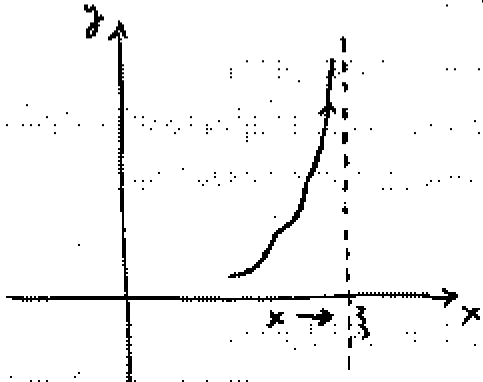
Γενικά, όταν μιά συνάρτηση $y=f(x)$ είναι φραγμένη καθώς το x πλησιάζει έναν αριθμό ξ, δεν συνεπάγεται ότι θα υπάρχει το $\lim f(x)$. Αυτό φαίνεται με την συνάρτηση $y=\sin(\frac{1}{x})$ όταν $x\to 0$.

Όταν όμως, εκτός από φραγμένη, η συνάρτηση είναι και μονότονη, τότε η κατάσταση είναι σχετικά απλή και περιγράφεται από το

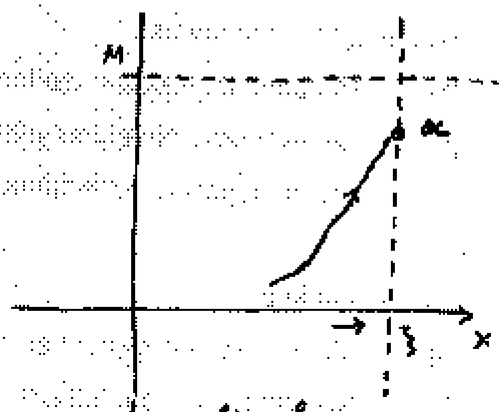
Θεώρημα Έστω $y=f(x)$ της οποίας το πεδίο ορισμού περιέχει διάστημα (α,ξ). Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα στο (α,ξ). Σχετικά με το $\lim\limits_{x\to\xi-} f(x)$ ισχύουν ακριβώς δύο περιπτώσεις:

(i) καθώς το $x\to\xi-$ οι τιμές $y=f(x)$ είναι άνω-φραγμένες, δηλαδή υπάρχει αριθμός M ώστε $f(x)\leq M$ όταν το x είναι κοντά στο ξ. Σ' αυτήν την περίπτωση υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\xi-} f(x)$.

(ii) καθώς το $x\to\xi-$ οι τιμές $y=f(x)$ μεγαλώνουν απεριόριστα. Σ' αυτήν την περίπτωση $\lim\limits_{x\to\xi-} f(x)=+\infty$.



$\lim\limits_{x\to\xi-} f(x)=+\infty$



$\lim\limits_{x\to\xi-} f(x)=\alpha\leq M$

Το θεώρημα αυτό δεν θα το αποδείξουμε. Βασιζόμαστε μονάχα στην γεωμετρική κατανόηση του, όπως αυτή υποδηλώνεται στα δύο σχήματα. Ας βρεί ο αναγνώστης και ας διατυπώσει τι συμβαίνει όταν η $y=f(x)$ είναι φθίνουσα στο (α,ξ). Επίσης τι συμβαίνει όταν η $y=f(x)$

είναι μονότονη σε διάστημα (ξ, β), σχετικά με το $\lim_{x\to\xi+} f(x)$.

και τι συμβαίνει όταν $x\to+\infty$ ή όταν $x\to-\infty$.

<u>Εφαρμογή</u> (Δύο από τα όρια της σελίδας 73)

Αν $\alpha>0$, τότε: $\lim_{x\to0+} x^{\alpha} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty$

(i) Η $y=x^{\alpha}$ είναι αύξουσα συνάρτηση στο x-διάστημα $(0,+\infty)$, επειδή το α είναι >0. Επίσης είναι και <u>κάτω-φραγμένη</u>, διότι $x^{\alpha}>0$ για κάθε $x>0$. (Έχει δηλαδή το 0 σαν κάτω-φράγμα).
Άρα δεν ισχύει $\lim_{x\to0+} x^{\alpha} = -\infty$. Αποδείξαμε το όριο $\lim_{x\to0+} x^{\alpha} = A$ υπάρχει. Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to0+}(2x)^{\alpha} = \lim_{2x\to0+}(2x)^{\alpha} = A$.
Επίσης: $(2x)^{\alpha} = 2^{\alpha}\cdot x^{\alpha}$. Παίρνοντας όρια και στις δύο πλευρές έχουμε: $A = \lim_{x\to0+}(2x)^{\alpha} = 2^{\alpha}\cdot\lim_{x\to0+} x^{\alpha} = 2^{\alpha}\cdot A$.
Επειδή $2^{\alpha}\neq 1$, καταλήγουμε στο $A=0$.

(ii) Επειδή η $y=x^{\alpha}$ είναι αύξουσα στο $(0,+\infty)$, είτε το $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}$ υπάρχει, είτε $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty$.
Έστω ότι $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = A$.
Πάλι παρατηρούμε ότι: $\lim_{x\to+\infty}(2x)^{\alpha} = \lim_{2x\to+\infty}(2x)^{\alpha} = A$
Άρα, από την σχέση $(2x)^{\alpha} = 2^{\alpha}\cdot x^{\alpha}$ έχουμε:
$A = \lim_{x\to+\infty}(2x)^{\alpha} = 2^{\alpha}\cdot\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = 2^{\alpha}\cdot A$.
Επειδή $2^{\alpha}\neq 1$, έπεται ότι $A=0$.
Όμως η $y=x^{\alpha}$ είναι αύξουσα. Δηλαδή $x^{\alpha}\geq 1$ όταν $x>1$.
Άρα $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = A \geq 1$.
Καταλήγουμε σε άτοπο, και μένει η περίπτωση $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty$.

ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Λέμε ότι μία συνάρτηση $y = f(x)$ είναι <u>συνεχής</u> σε κάποιο $x = \xi$, όταν πληρούνται οι δύο προϋποθέσεις:

(α) το ξ είναι σημείο του πεδίου ορισμού της f, δηλαδή ορίζεται το $f(\xi)$

και (β) $\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$.

Ας προσέξουμε την ανάλογη σημείωση στο προηγούμενο κεφάλαιο και ας διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(i) αν το πεδίο ορισμού περιλαμβάνει δύο διαστήματα $(\alpha, \xi) \cup (\xi, \beta)$, τότε το (β) σημαίνει $\lim_{x \to \xi+} f(x) = \lim_{x \to \xi-} f(x) = f(\xi)$.

Σ' αυτό το σημείο πρέπει να αναφέρουμε ότι αν $\lim_{x \to \xi+} f(x) = f(\xi)$, αλλά $\lim_{x \to \xi-} f(x) \neq f(\xi)$ (ή το $\lim_{x \to \xi-} f(x)$ δεν υπάρχει) τότε η f λέγεται <u>συνεχής από δεξιά στο ξ</u>. Αν $\lim_{x \to \xi-} f(x) = f(\xi)$, αλλά $\lim_{x \to \xi+} f(x) \neq f(\xi)$ (ή το $\lim_{x \to \xi+} f(x)$ δεν υπάρχει) τότε η f λέγεται <u>συνεχής από αριστερά στο ξ</u>.

Για <u>παράδειγμα</u>: (1) η $y = x^2$ είναι συνεχής στο $x = 3$ διότι

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9 = 3^2 ,$$

(2) η $y = [x]$ είναι συνεχής από δεξιά στο $x = 3$, αλλά όχι συνεχής στο $x = 3$, διότι $\lim_{x \to 3+} [x] = 3 = [3] \neq \lim_{x \to 3-} [x] = 2$.

(ii) αν το πεδίο ορισμού περιλαμβάνει διάστημα (ξ, β), αλλά δεν περιλαμβάνει κανένα διάστημα (α, ξ), τότε το (β) σημαίνει

$$\lim_{x \to \xi+} f(x) = f(\xi).$$

Δηλαδή, σ' αυτήν την περίπτωση η συνέχεια από δεξιά στο ξ είναι ταυτόσημη με την συνέχεια στο ξ.

<u>Παράδειγμα</u>: $y = \sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $x = 0$, διότι

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = \lim_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0} .$$

(iii) Αν το πεδίο ορισμού περιλαμβάνει διάστημα (α,ξ), αλλά δεν περιλαμβάνει κανένα διάστημα (ξ,β), τότε το (6) σημαίνει

$$\lim_{x\to \xi^-} f(x) = f(\xi).$$

Σ' αυτήν την περίπτωση η συνέχεια από αριστερά στο ξ είναι ταυτόσημη με την συνέχεια στο ξ.

<u>Παράδειγμα</u>: Η $f = \sqrt{1-x}$ είναι συνεχής στο $x=1$, διότι

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} = 0 = \sqrt{1-1}.$$

(iv) Αν το πεδίο ορισμού δεν περιλαμβάνει ούτε διάστημα (α,ξ) ούτε διάστημα (ξ,β), τότε το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ <u>δεν έχει νόημα ύπαρξης</u>. Έτσι το $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ αποδεικνύεται να μην ισχύει!

Το ξ είναι, όπως λέμε συνήθως, <u>μεμονωμένο σημείο</u> του πεδίου ορισμού, και η f είναι αυτομάτως συνεχής στο ξ.

<u>Παράδειγμα</u>: $y = \sqrt{-(x-1)^2}$. Το πεδίο ορισμού είναι το μονοσύνολο $\{1\}$. Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x=1$.

Ας θυμηθούμε τον αυστηρό ορισμό του ορίου: $\lim_{x\to\xi} f(x) = \alpha$, αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει κάποιο $\delta>0$ ώστε

(✱) $$0<|x-\xi|<\delta \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon$$

Είδαμε, μάλιστα, ότι το x δεν είναι ίσο με ξ (γι' αυτό: $0<|x-\xi|$) διότι, είτε μπορεί το $f(\xi)$ να μην ορίζεται, είτε μπορεί το όριο α να μην είναι ίσο με $f(\xi)$. Όμως στην περίπτωση της συνέχειας στο ξ <u>και</u> το $f(\xi)$ ορίζεται <u>και</u> το όριο είναι ίσο με $f(\xi)$. Άρα η "συνεπαγωγή" (✱) ισχύει και για $x=\xi$.

Μπορούμε, επομένως, να επαναδιατυπώσουμε τον ορισμό της συνέχειας στο $x=\xi$ ως εξής: για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει κάποιο $\delta>0$ ώστε

$$|x-\xi|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(\xi)|<\varepsilon.$$

Αυτό, απλούστερα, λέει: <u>το $f(x)$ είναι όσο κοντά θέλουμε στο $f(\xi)$</u>

αρκεί το x να είναι αρκετά κοντά στο ξ.

Παραδείγματα (1) Κάθε πολυώνυμο $P(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση σε οποιοδήποτε $x=\xi$ και κάθε ρητή συνάρτηση $Q(x)$ είναι συνεχής σε οποιοδήποτε $x=\xi$ αρκεί το ξ να μην μηδενίζει τον παρονομαστή. (Βλ. σελ 69)

(2) Οι συναρτήσεις $\sin x$ και $\cos x$ είναι συνεχείς σε οποιοδήποτε $x=\xi$. (Βλ. σελ 72)

(3) Η συνάρτηση x^{α} (α άρρητος) είναι συνεχής σε κάθε $x=\xi>0$ και, αν το $\alpha>0$, είναι συνεχής και στο $\xi=0$. (Βλ σελ. 73)

(4) Η συνάρτηση α^{x} $(\alpha>0)$ είναι συνεχής σε κάθε $x=\xi$. (Βλ σελ 79)

Από το θεώρημα της σελίδας 66, χρησιμοποιώντας $a=f(\xi)$, $b=g(\xi)$, μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε το

Θεώρημα (α) Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x=\xi$ και λ είναι σταθερός αριθμός, τότε και η $\lambda f(x)$ είναι συνεχής στο $x=\xi$.

(β) Αν οι $f(x)$, $g(x)$ είναι συνεχείς στο $x=\xi$ τότε και οι $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι συνεχείς στο $x=\xi$. Στην τελευταία περίπτωση πρέπει κατ' ανάγκην $g(\xi)\neq 0$.

Παράδειγμα Η $y=\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{\sin x+\cos x}$ είναι συνεχής σε οποιοδήποτε $x=\xi$, αρκεί το $\xi\geq 0$ και $\xi\neq -\frac{\pi}{4}+$ πολλαπλάσιο του π.

Όπως φαίνεται από το παράδειγμα, η χρησιμότητα του προηγούμενου θεωρήματος είναι η δημιουργία νέων συνεχών συναρτήσεων από ήδη γνωστές. Την ίδια χρησιμότητα λειτουργεί και το επόμενο θεώρημα. Χονδρικά λέει ότι "σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση". Προσέχουμε όμως λίγο τα πεδία ορισμού.

Θεώρημα Έστω ότι η $y=f(x)$ έχει στο πεδίο ορισμού ένα σύνολο A και ότι το σύνολο τιμών της περιέχεται στο πεδίο ορισμού μιας δεύτερης συνάρτησης $z=g(y)$. Αν η $y=f(x)$ είναι συνεχής στο $x=\xi$ και αν $z=g(y)$ είναι συνεχής στο $y=\eta=f(\xi)$, τότε η σύνθετη συνάρτηση $z=g(f(x))$ είναι συνεχής στο $x=\xi$.

Απόδειξη Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το $g(f(x))$ είναι όσο θέλουμε κοντά στο $g(f(\xi))$, αρκεί το x να είναι αρκετά κοντά στο ξ.

Όπως γνωρίζουμε, λόγω της συνέχειας της $g(y)$ στο $y=\eta$, ότι το $g(f(x))$ είναι όσο θέλουμε κοντά στο $g(\eta)$ αρκεί το $f(x)$ να είναι αρκετά κοντά στο η.

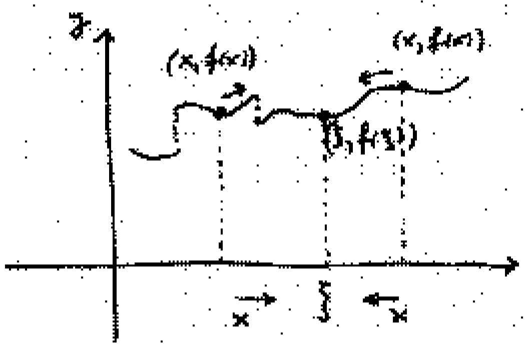
Και, λόγω της συνέχειας της $f(x)$ στο $x=\xi$, το $f(x)$ είναι αρκετά κοντά στο $\eta=f(\xi)$ αρκεί το x να είναι αρκετά κοντά στο ξ.

Επομένως, μπορούμε να πάρουμε το x αρκετά κοντά στο ξ, ώστε το $f(x)$ να βρίσκεται τόσο κοντά στο $\eta=f(\xi)$, όσο χρειάζεται ώστε, με την σειρά του, το $g(f(x))$ να βρεθεί όσο θέλουμε κοντά στο $g(f(\xi))=g(\eta)$.

Παράδειγμα Η $\sin(\sqrt{x})$ είναι συνεχής σε κάθε $x=\xi\geq 0$.
Διότι είναι σύνθεση των $z=\sin y$ και $y=\sqrt{x}=x^{1/2}$

Γεωμετρική σημασία της συνέχειας

Σύμφωνα με την εξήγηση που κάναμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το $\lim_{x\to\xi} f(x)=f(\xi)$ σημαίνει ότι : καθώς το x κινείται πλησιάζοντας το ξ το σημείο $(x, f(x))$ κινείται πάνω στο γράφημα της $y=f(x)$ πλησιάζοντας όλο και περισσότερο το $(\xi, f(\xi))$.



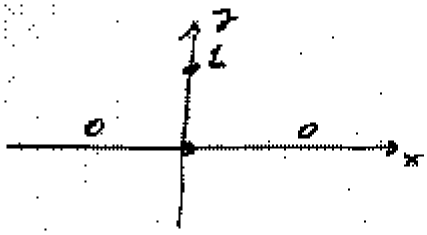
Αλλοιώς λέγοντας: το γράφημα "ράβεται" κοντά στο $(\xi, f(\xi))$ όταν το x πλησιάζει κοντά στο ξ. Δηλαδή το γράφημα δεν παρουσιάζει "χάσμα" στο σημείο ξ.

Αν επί πλέον η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο ξ ενός ολόκληρου διαστήματος τότε η εικόνα που παρουσιάζει το γράφημα στο διάστημα αυτό είναι η εικόνα μιας καμπύλης χωρίς κανένα χάσμα, δηλαδή ακριβώς ό,τι ονομάσαμε <u>συνεχή καμπύλη</u> στην σελίδα 42.

Δικαιολογείται επομένως η χρήση των όρων: "συνεχής καμπύλη" και "συνεχής συνάρτηση" των οποίων κάναμε χωρίς ιδιαίτερη ανησυχία σε όλα τα σχετικά παραδείγματα.

Και μετά από τα παραδείγματα της σελίδας 83 δικαιολογείται η σχεδίαση των γραφημάτων των $y =$ πολυώνυμο του x, $y =$ ρητή συνάρτηση του x, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = x^{\alpha}$, $y = \alpha^{x}$ σαν συνεχών καμπυλών όπως των κάναμε μέχρι τώρα.

<u>Παραδείγματα</u> (1) $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$

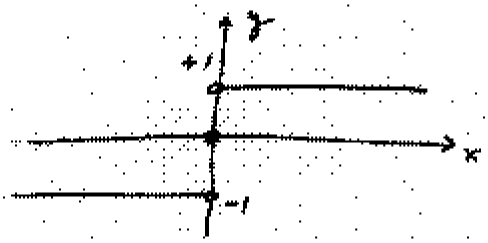


$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, $f(0) = 1$.

Η f δεν είναι συνεχής στο 0. Παρατηρούμε ότι το $\lim_{x \to 0} f(x)$ υπάρχει και, απλώς, δεν είναι ίσο με την τιμή $f(0)$.

Αν η τιμή $f(0)$ ήταν 0, αντί για 1, τότε η f θα ήταν συνεχής στο 0. Λέμε γι' αυτήν την περίπτωση ότι η f παρουσιάζει <u>άρσιμη ασυνέχεια</u> στο $x = 0$. Πιό γενικά: λέμε ότι μιά συνάρτηση f παρουσιάζει άρσιμη ασυνέχεια στο σημείο ξ του πεδίου ορισμού της αν το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει και είναι $\neq f(\xi)$.

(2) $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$



$\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = -1$.

Τώρα, το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει, διότι, αν και τα πλευρικά όρια υπάρχουν, αυτά δεν είναι ίσα. Παρατηρούμε ότι, ακόμα και αν αλλάξει η τιμή $f(0)$, η f δεν μπορεί να γίνει συνεχής στο $x=0$. Λέμε σ' αυτήν την περίπτωση ότι η f παρουσιάζει ασυνέχεια α' είδους ή πήδημα στο $x=0$. Πιο γενικά: λέμε ότι μια συνάρτηση f παρουσιάζει ασυνέχεια α' είδους ή πήδημα στο $x=\xi$ αν τα $\lim_{x\to\xi+} f(x)$, $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ υπάρχουν αλλά δεν είναι ίσα.

Η διαφορά $\lim_{x\to\xi+} f(x) - \lim_{x\to\xi-} f(x)$ ονομάζεται πήδημα της f στο $x=\xi$.

(3) Η τρίτη περίπτωση που απομένει είναι η λεγόμενη ασυνέχεια β' είδους ή ουσιώδης ασυνέχεια στο ξ: όταν ένα τουλάχιστον από τα $\lim_{x\to\xi+} f(x)$, $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ δεν υπάρχει (συμπεριλαμβάνεται η περίπτωση κάποιο από αυτά να είναι $+\infty$ ή $-\infty$)

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = +\infty$

$f(x)=\begin{cases}\sin(\frac{1}{x}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 0+} f(x)$, $\lim_{x\to 0-} f(x)$ δεν υπάρχουν

(4) $f(x)=\begin{cases}x\sin(\frac{1}{x}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $\qquad$ Εδώ $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0 = f(0)$

και η f είναι συνεχής στο $x=0$.

Συνέχεια και ακολουθίες

Πολύ χρήσιμο είναι το εξής

Θεώρημα Αν μιά $y=f(x)$ είναι συνεχής στο $x=\xi$ και έχουμε μιά ακολουθία x_n, της οποίας όλοι οι όροι είναι στο πεδίο ορισμού της f, και $x_n \to \xi$, τότε $f(x_n) \to f(\xi)$.

Απόδειξη (όχι αυστηρή). Διαλέγουμε δείκτη n αρκετά μεγάλο ώστε το x_n να βρεθεί (αφού $x_n \to \xi$) τόσο κοντά στο ξ όσο χρειάζεται (λόγω συνέχειας της f στο ξ) γιά να βρεθεί το $f(x_n)$ όσο θέλουμε κοντά στο $f(\xi)$.

Παραδείγματα (1) Αν $x_n \geq 0$ και $x_n \to \xi$ τότε $\sqrt{x_n} \to \sqrt{\xi}$.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα με $f(x)=\sqrt{x}$.

(α) Αν $x_n \to 0$, τότε $x_n \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \to 0$.

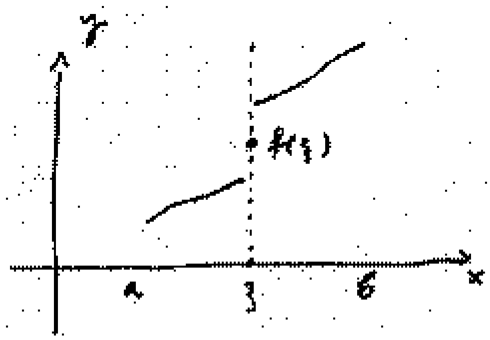
Εφαρμόζουμε με $f(x)= x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

(β) Αν $x_n \to \xi$, τότε $a^{x_n} \to a^{\xi}$ $(a>0)$

(γ) Αν $x_n \to \xi$ και $x_n \geq 0, \xi>0$, τότε $x_n^{\alpha} \to \xi^{\alpha}$.

(δ) Αν $x_n \to \xi$ τότε $\sin(x_n) \to \sin\xi$.

Συνέχεια και μονότονες συναρτήσεις



Θεωρούμε μιά συνάρτηση $y=f(x)$ ορισμένη σε διάστημα (a,b) και αύξουσα στο διάστημα αυτό. Επί πλέον έστω ξ εσωτερικό σημείο : $a<\xi<b$.

Επειδή η f είναι αύξουσα στο (a,ξ) και $f(x) \leq f(\xi)$ γιά κάθε x στο (a,ξ), σύμφωνα με το Θεώρημα της σελίδας 79, υπάρχει το $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ και είναι $\leq f(\xi)$.

Ομοίως: επειδή η f είναι αύξουσα στο (ξ, b) και $f(\xi) \leq f(x)$ για κάθε x στο (ξ, b), υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και είναι $\geq f(\xi)$.

Άρα
$$\lim_{x\to\xi-} f(x) \leq f(\xi) \leq \lim_{x\to\xi+} f(x)$$.

Με παρόμοιο σκεπτικό μπορεί κανείς να δείξει ότι, αν η f είναι φθίνουσα τότε τα $\lim_{x\to\xi-} f(x)$, $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ υπάρχουν και
$$\lim_{x\to\xi+} f(x) \leq f(\xi) \leq \lim_{x\to\xi-} f(x)$$. Άρα :

<u>Θεώρημα</u> Αν η f είναι μονότονη στο (a, b) και $a<\xi<b$, τότε η τιμή $f(\xi)$ βρίσκεται ανάμεσα στα πλευρικά όρια $\lim_{x\to\xi+} f(x)$, $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ τα οποία υπάρχουν. Η f είναι είτε συνεχής στο $x=\xi$ είτε παρουσιάζει ασυνέχεια α' είδους (πήδημα) στο $x=\xi$. Σε καμμιά περίπτωση δεν παρουσιάζει η f ασυνέχεια ανωμαλία στο ξ.

<u>Παράδειγμα</u> Η $y=[x]$ είναι αύξουσα συνάρτηση και παρουσιάζει πήδημα σε κάθε $\xi=$ ακέραιο, ενώ είναι συνεχής σε κάθε άλλο ξ.

<u>Δύο σημαντικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις</u> .

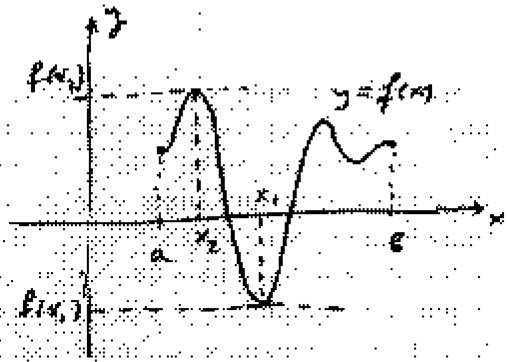
Θα δούμε τώρα δύο πολύ σημαντικά θεωρήματα με πολλές πρακτικές και θεωρητικές εφαρμογές. Δεν θα τα αποδείξουμε, διότι η απόδειξή τους είναι μέσα στα πλαίσια της "αυστηρής" θεμελίωσης των εννοιών του Απειροστικού Λογισμού η οποία θα μελετηθεί σε επόμενο μάθημα.

Θεώρημα (μέγιστης και ελάχιστης τιμής) Έστω συνάρτηση $y = f(x)$ ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και συνεχής σε κάθε σημείο του $[\alpha, \beta]$. Τότε, υπάρχουν (τουλάχιστον) δύο αριθμοί x_1, x_2 στο $[\alpha, \beta]$ ώστε:

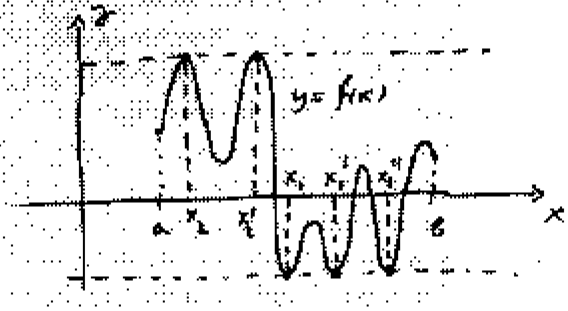
$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \quad \text{για κάθε } x \text{ στο } [\alpha, \beta].$$

Παρατηρήσεις (1) Η τιμή $f(x_1)$ είναι, προφανώς, η ελάχιστη τιμή της f και η $f(x_2)$ είναι η μέγιστη τιμή της $f(x)$, καθώς το x διατρέχει το διάστημα $[\alpha, \beta]$. Λέμε ότι: "η f παίρνει μέγιστη τιμή στο x_2 και ελάχιστη τιμή στο x_1" ή ότι "το x_1 είναι σημείο (ολικού) ελαχίστου και το x_2 είναι σημείο (ολικού) μεγίστου της συνάρτησης f.

(2) Η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος βρίσκεται στο διπλανό σχήμα. Τα $f(x_2)$, $f(x_1)$ είναι τα μέγιστα και ελάχιστα, αντιστοίχως, ύψη του γραφήματος. Το γράφημα της $y=f(x)$ βρίσκεται ανάμεσα στις δύο οριζόντιες ευθείες $y=f(x_2)$ και $y=f(x_1)$, και τις ακουμπάει.



(3) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ότι τα x_1, x_2 μπορεί να μην είναι μοναδικά: η f παίρνει μέγιστη τιμή στα x_2, x_2' και ελάχιστη τιμή στα x_1, x_1', x_1''.



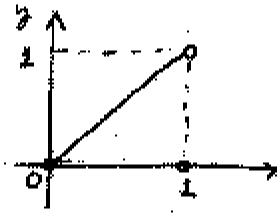
(4) Οι υποθέσεις του θεωρήματος είναι δύο: (α) το διάστημα όπου ορίζεται η $y=f(x)$ είναι κλειστό, και (β) η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος.

Αν ισχύουν και οι δύο υποθέσεις, το συμπέρασμα του θεωρήματος ισχύει. Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $y = x^4 - 3x^2 + 4x - 1$ και $y = \sin(x^2+1)$ έχουν μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα $[-5, 100]$.

Κάτι τέτοιο έχει μεγάλη σημασία όταν αναζητούμε μέγιστη ή ελάχιστη τιμή μιας συνάρτησης. Αν ισχύουν οι πιο πάνω προϋποθέσεις, τότε η <u>ύπαρξη</u> αυτών των τιμών είναι εξασφαλισμένη. Μετά μπορούμε να προχωρήσουμε στον ακριβή <u>προσδιορισμό</u> αυτών των τιμών, αν θέλουμε. Προσοχή: το θεώρημα δεν μας λέει πώς θα βρούμε αυτές τις τιμές $f(x_1)$, $f(x_2)$ ή τα x_1, x_2. Μας λέει απλώς ότι υπάρχουν.

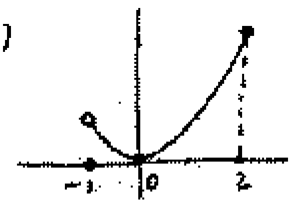
(ϛ) Αν μία τουλάχιστον από τις υποθέσεις δεν ισχύει τότε, ανάλογα με την περίπτωση, τα αποτελέσματα μπορεί να ισχύουν αλλά μπορεί και να μην ισχύουν. <u>Παραδείγματα</u>:

"συνεχής συνάρτηση — όχι κλειστό διάστημα"

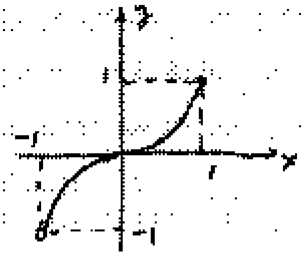
(α) 

$y=x$, $0\le x<1$: ελάχιστη τιμή 0 (για $x=0$), δεν υπάρχει μέγιστη τιμή.

(Καθώς το x αυξάνει προς το 1, οι τιμές y αυξάνουν και πλησιάζουν όλο και πιο πολύ την τιμή 1 αλλά δεν "πιάνουν" την τιμή 1).

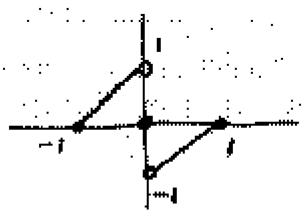
(β) 

$y=x^2$, $-1<x\le 2$: ελάχιστη τιμή 0 (για $x=0$), μέγιστη τιμή 4 (για $x=2$)

(γ) 

$y=x^3$, $-1<x<1$: δεν υπάρχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.

"κλειστό διάστημα — όχι συνεχής συνάρτηση"

(α) 

$$y=\begin{cases} x+1, & -1\le x<0 \\ 0, & x=0 \\ x-1, & 0<x\le 1 \end{cases}$$

: δεν υπάρχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.

(β)

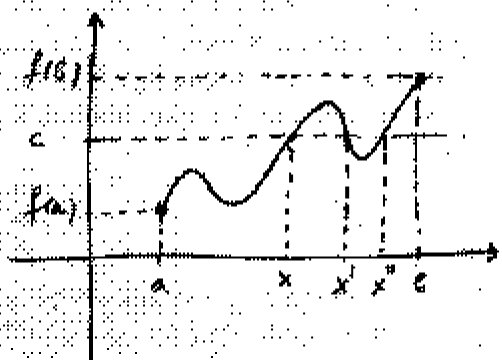
$$y=\begin{cases} 1, & 0<x\le 1 \\ 0, & x=0 \\ -1, & -1\le x<0 \end{cases}$$

: μέγιστη τιμή $=1$, ελάχιστη τιμή $=-1$.

<u>Θεώρημα (ενδιάμεσης τιμής)</u> Έστω συνάρτηση $y=f(x)$ ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και συνεχής σε κάθε σημείο του $[\alpha,\beta]$. Αν $f(\alpha)\neq f(\beta)$, τότε η f "πιάνει" οποιαδήποτε τιμή y ανάμεσα στις $f(\alpha)$, $f(\beta)$. Δηλαδή: αν $y=c$ είναι οποιοσδήποτε αριθμός ανάμεσα στους $f(\alpha)$, $f(\beta)$ (είτε $f(\alpha)<c<f(\beta)$ είτε $f(\beta)<c<f(\alpha)$), τότε υπάρχει (τουλάχιστον) ένα x ανάμεσα στα α,β ώστε $f(x)=c$.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

(1) Η γεωμετρική σημασία του θεωρήματος φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η συνεχής καμπύλη πρέπει να ξεκινήσει από το ύψος $f(\alpha)$ και να καταλήξει στο ύψος $f(\beta)$. Αναγκαστικά θα περάσει από όλα τα ενδιάμεσα ύψη.

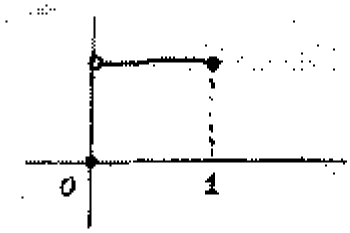


(2) Για το ίδιο c, όπως φαίνεται και στο σχήμα, μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα x ώστε $f(x)=c$.

(3) Πολύ πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με τις υποθέσεις του θεωρήματος. Για να μπορούμε να συμπεράνουμε <u>χωρίς ιδιαίτερη διερεύνηση</u> ότι η f "πιάνει" κάθε τιμή ανάμεσα στις $f(\alpha)$, $f(\beta)$ πρέπει η f να είναι συνεχής σε ολόκληρο το διάστημα από το α (συμπεριλαμβανομένου) μέχρι το β (συμπεριλαμβανομένου).

<u>Παραδείγματα</u>: όπου η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

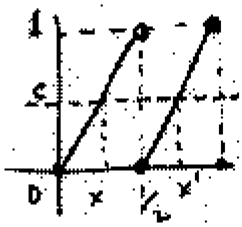
(α)



$$y=\begin{cases} 1, & 0<x\le 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$f(0)=0$, $f(1)=1$

Η f δεν "πιάνει" την τιμή $\frac{1}{2}$ (και καμμία τιμή c ανάμεσα στις τιμές $0, 1$).

(6) 

$$y=\begin{cases} 2x, & 0\le x<\frac{1}{2} \\ 2x-1, & \frac{1}{2}\le x\le 1 .\end{cases}$$

$f(0)=0$, $f(1)=1$ και η f "πιάνει" κάθε τιμή ανάμεσα στις $0, 1$.

Από τα παραδείγματα γίνεται ότι αν η f δεν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[\alpha,\beta]$ τότε το συμπέρασμα του Θεωρήματος, ανάλογα με την περίπτωση, μπορεί να ισχύει αλλά μπορεί και να μην ισχύει.

<u>Παραδείγματα εφαρμογής των δύο Θεωρημάτων (Πρακτικά και θεωρητικά)</u>

(1) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\sin x = x-1$ έχει λύση στο διάστημα $[0,\pi]$.

Σχηματίζουμε την συνάρτηση $f(x)=\sin x - x + 1$. Η ερώτηση είναι αν η $f(x)=0$ έχει λύση στο $[0,\pi]$. Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος $[0,\pi]$. Αν η τιμή $y=0$ είναι ανάμεσα στις $f(0), f(\pi)$ τότε η ύπαρξη του x με $f(x)=0$ θα είναι συνέπεια του Θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής.

Πράγματι: $f(0)=1$, $f(\pi)=-\pi+1=-2.14\ldots$,

$f(\pi)<0<f(0)$.

(2) Αποδείξτε ότι η $x^3-x^2+2x-1=0$ έχει λύση.

Η εξίσωση έχει την μορφή $f(x)=0$, όπου f είναι η συνεχής συνάρτηση $f(x)=x^3-x^2+2x-1$. (Και στο προηγούμενο παράδειγμα, αν και δεν ξεκινούσατε με τέτοια μορφή εξίσωσης, εσείς καταλήξατε) Αρκεί να βρούμε ένα α και ένα β ώστε το $f(\alpha)$ και το $f(\beta)$ να έχουν <u>ανάμεσά τους</u> την τιμή 0. Τότε θα εφαρμόσουμε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής στο διάστημα από α ως β και θα έχουμε την ύπαρξη του x που ζητάμε. Μάλιστα θα έχουμε και <u>μία παραπάνω</u>

από αυτό που μας ζητάνε. Όχι μόνον θα ξέρουμε ότι υπάρχει λύση x, αλλά και ότι η λύση αυτή είναι ανάμεσα σε δύο συγκεκριμένους αριθμούς a, b. (Αυτό έχει σημασία σε <u>προσεγγιστικούς υπολογισμούς</u> των λύσεων εξισώσεων: όσο πιο κοντά είναι οι a, b τόσο πιο καλά προσδιορίζουμε την θέση της λύσης x).

Αν δοκιμάσουμε $a=0$: $f(0)=-1$

$b=1$: $f(1)=1$

Άρα υπάρχει λύση x ανάμεσα στα $0, 1$: $0<x<1$, $f(x)=0$.

(3) Απόδειξη ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία ρίζα: $P(x)=0$, όπου $P(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_0$

Αυτό αποτελεί γενίκευση του προηγούμενου παραδείγματος.

Αρκεί να βρούμε δύο αριθμούς a, b ώστε $P(a)<0<P(b)$.

<u>Πώς</u> θα τους βρούμε αφού το πολυώνυμο δεν είναι καν συγκεκριμένο;!

Αλλά, προσέξτε: αρκεί να αποδείξουμε ότι <u>υπάρχουν</u> οι a, b και ας μην είναι συγκεκριμένοι. Προς τούτο, αρκεί να προσέξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty .$$

Υπάρχουν, λοιπόν, αρκετά μεγάλα x ώστε το $P(x)$ να είναι όσο μεγάλο θέλουμε. Υπάρχει, έτσι, b ώστε $P(b)>0$.

Ομοίως υπάρχει αρκετά μεγάλο αρνητικό a ώστε $P(a)<0$.

(4) Απόδειξη ότι το σύνολο τιμών ενός πολυωνύμου περιττού βαθμού αποτελείται από όλους τους πραγματικούς αριθμούς.

Έστω c οποιοσδήποτε αριθμός, και $P(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_0$.

Η εξίσωση $P(x)=c$ ισοδυναμεί με $P(x)-c=0$.

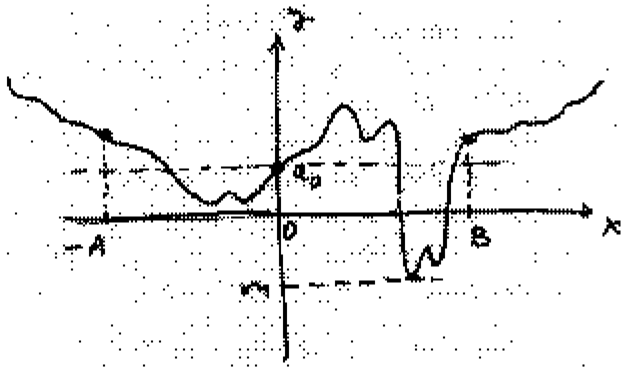
Το $P(x)-c$ είναι επίσης πολυώνυμο ίδιου βαθμού. Από το (3) υπάρχει λύση της εξίσωσης. Άρα το c είναι τιμή του P.

(5) Αποδείξτε ότι ένα πολυώνυμο άρτιου βαθμού

$P(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_0$

έχει ελάχιστη τιμή m, και ότι το σύνολο τιμών του είναι το $[m, +\infty)$.

(α) Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα ελάχιστης τιμής διότι, αν και το $P(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση, ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και όχι σε κλειστό διάστημα.



Ας θεωρήσουμε για $x=0$ την τιμή $P(0) = a_0$.

Επειδή $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, υπάρχει αρκετά μεγάλο θετικό B ώστε:

$B < x \Rightarrow a_0 < P(x)$.

Επίσης, επειδή $\lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$, υπάρχει αρκετά μεγάλο αρνητικό $-A$ ώστε: $x < -A \Rightarrow a_0 < P(x)$.

(*) Άρα: για κάθε x έξω από το $[-A, B]$ ισχύει $a_0 < P(x)$.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα ελάχιστης τιμής στο $[-A, B]$.

Η συνεχής συνάρτηση $P(x)$ "πιάνει" ελάχιστη τιμή στο $[-A, B]$.

Δηλ. υπάρχει x_1 στο $[-A, B]$ ώστε

(**) $P(x_1) \leq P(x)$ για κάθε x στο $[-A, B]$.

Ειδικότερα $P(x_1) \leq P(0) = a_0$.

Ο $m = P(x_1)$ είναι η ζητούμενη ελάχιστη τιμή του $P(x)$.

Διότι, από την (**): $m \leq P(x)$ για x στο $[-A, B]$

και από την (*): $m \leq a_0 < P(x)$ για x έξω από το $[-A, B]$. Άρα $m \leq P(x)$ για όλα τα x.

(β) Αφού το m είναι η ελάχιστη τιμή, το σύνολο τιμών δεν περιέχει αριθμούς έξω από το $[m, +\infty)$.

Μένει να δούμε αν κάθε αριθμός $y > m$ είναι τιμή της P.
Επειδή $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, υπάρχει x_2 αρκετά μεγάλο ώστε

$P(x_2) > y$ $\quad$ (y = σταθερό).

Έχουμε λοιπόν x_1, x_2 ώστε $m = P(x_1) < y < P(x_2)$.
Λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει x ανάμεσα στα x_1, x_2 ώστε $y = P(x)$. Άρα το y είναι τιμή του πολυωνύμου.

(6) (Ύπαρξη n-οστής ρίζας). Κάθε θετικός αριθμός έχει μοναδική n-οστή θετική ρίζα: δηλαδή, αν $n \in \mathbb{N}$, για κάθε $y > 0$ υπάρχει μοναδικό $x > 0$ ώστε $x^n = y$.

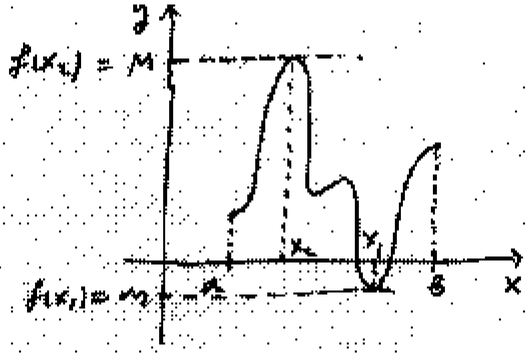
Το σημαντικό είναι να αποδειχθεί η ύπαρξη του x. Η μοναδικότητα είναι απλή: η συνάρτηση x^n είναι γνησίως αύξουσα για $x > 0$.
Καταρχήν $0^n = 0 < y$. Κατόπιν, επειδή $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ (γιατί; σιγουρευτείτε ότι γνωρίζετε αυτό το καλά!) μπορούμε να βρούμε αρκετά μεγάλο A ώστε $A^n > y$.
Εφαρμόζουμε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής στο διάστημα $[0, A]$.
Η τιμή y είναι ανάμεσα στις τιμές 0^n, A^n.
Άρα υπάρχει x ώστε $y = x^n$.

(7) Έστω συνάρτηση $y = f(x)$ ορισμένη και συνεχής σε κάθε σημείο ενός κλειστού διαστήματος $[a, b]$. Τότε το σύνολο τιμών της είναι επίσης ένα κλειστό διάστημα.

Πράγματι, το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής εξασφαλίζει καταρχήν ότι η f "πιάνει" μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Δηλαδή υπάρχουν x_1, x_2 στο $[a, b]$ ώστε:

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \quad \text{για κάθε } x \text{ στο } [a, b].$$

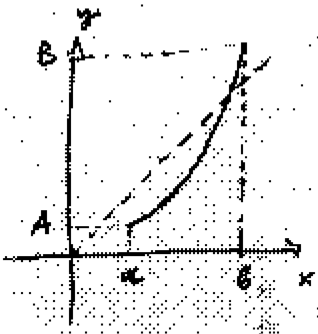
Αν τώρα πάρουμε τυχόν y ανάμεσα στους αριθμούς $f(x_1)$ και $f(x_2)$, τότε από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, εξασφαλίζεται η ύπαρξη κάποιου x στο διάστημα ανάμεσα στα x_1 και x_2 ώστε $f(x)=y$. Άρα κάθε y ανάμεσα στα $f(x_1)$, $f(x_2)$ είναι τιμή της f.

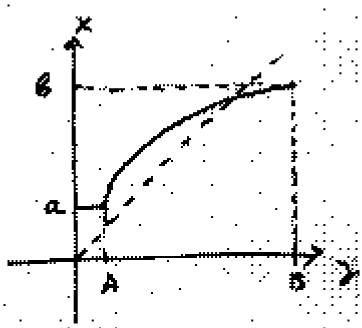


Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[f(x_1), f(x_2)]$.

Συνέχεια και αντίστροφες συναρτήσεις

Έστω συνάρτηση $y=f(x)$ ορισμένη σε διάστημα $[\alpha,\beta]$ και γνησίως μονότονη και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Ας





εξετάσουμε την περίπτωση που η f είναι γνησίως αύξουσα. Η ελάχιστη τιμή της είναι τότε η $A=f(\alpha)$, και η μέγιστη τιμή της είναι η $B=f(\beta)$. Μόλις πριν από λίγο είδαμε (με την βοήθεια του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής) ότι το σύνολο τιμών της f είναι ακριβώς το διάστημα $[A,B]$.

Ορίζεται τότε, ως γνωστόν, η αντίστροφη συνάρτηση

$$x=f^{-1}(y)$$

με πεδίο ορισμού το $[A,B]$ και σύνολο τιμών το $[\alpha,\beta]$. Η f^{-1} είναι επίσης γνησίως αύξουσα και <u>συνεχής</u>, διότι (ας μην είμαστε πολύ "αυστηροί" και ας περιοριστούμε στην γεωμετρική ερμηνεία) όταν κάνουμε ανάκλαση συνεχούς καμπύλης ως προς μια ευθεία το αποτέλεσμα είναι, φανερά, μια συνεχής καμπύλη. Άρα:

__Θεώρημα__ Η αντίστροφη συνάρτηση μιας γνησίως μονότονης και συνεχούς συνάρτησης είναι επίσης γνησίως μονότονη και συνεχής.

__Παραδείγματα:__ (1) Η $y = a^x$ είναι συνεχής, άρα και η $x = \log_a y$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(2) Η $y = \sin x$ είναι συνεχής, άρα και η $x = \mathrm{Arcsin}\, y$ είναι συνεχής. Ομοίως τις περιπτώσεις

$y = \cos x$, $x = \mathrm{Arccos}\, y$

$y = \tan x$, $x = \mathrm{Arctan}\, y$

$y = \cot x$, $x = \mathrm{Arccot}\, y$

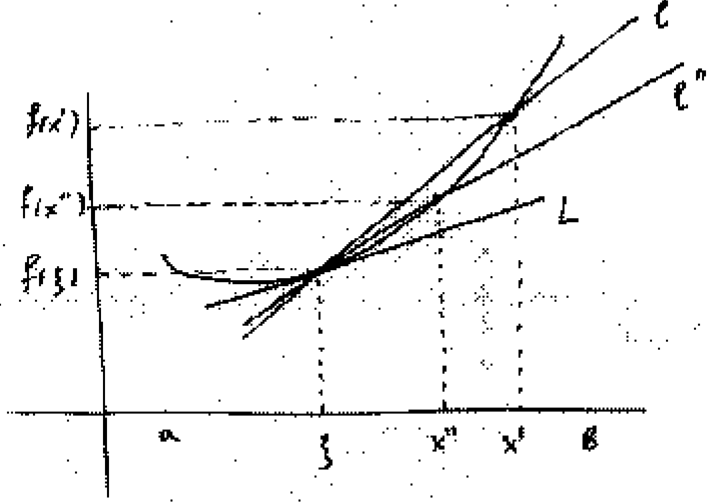
(Προσοχή! Σημειώστε τα πεδία ορισμού και σύνολα τιμών. Δείτε τις σελίδες 50, 53 σε συνδυασμό με τα όρια της σελ. 74)

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ένα γεωμετρικό και ένα φυσικό πρόβλημα

(α) Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μιαν καμπύλη στο επίπεδο και ένα σημείο πάνω στην καμπύλη. Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο αυτό και εφάπτεται (στο ίδιο σημείο) στην καμπύλη. Ας δεχτούμε ότι η καμπύλη αποτελεί το γράφημα μιας συνάρτησης $y=f(x)$, ορισμένης στο διάστημα $\alpha<x<\beta$, και ότι το δοσμένο σημείο είναι το $(\xi, f(\xi))$, όπου $\alpha<\xi<\beta$.

Έστω L η εφαπτόμενη της οποίας την εξίσωση ζητάμε. Γνωρίζουμε ότι η L περνάει από το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και μένει να βρούμε την κλίση της. Το πρόβλημα είναι ότι



δε γνωρίζουμε άλλο σημείο της L.

Ας θεωρήσουμε όμως ένα δεύτερο σημείο $(x, f(x))$, με $x \neq \xi$. Η ευθεία ℓ η οποία περνάει από τα σημεία $(\xi, f(\xi))$ και $(x, f(x))$, (δηλαδή η ευθεία η οποία περιέχει την "χορδή"), όταν το x κινείται πρός το ξ, "τείνει να γίνει" η ζητούμενη εφαπτόμενη L. (Στο σχήμα φαίνονται δύο θέσεις της ℓ, οι ℓ', ℓ'', όταν το x γίνει x', x'' στην πορεία του προς το ξ). Άρα η κλίση της ευθείας ℓ "τείνει να γίνει" η κλίση της ευθείας L. Όμως η κλίση της L είναι

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \frac{\text{διαφορά } y\text{-συντεταγμένων}}{\text{διαφορά } x\text{-συντεταγμένων}}$$

Άρα: κλίση της $L = \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$.

(β) Ας υποθέσουμε ότι ένα όχημα τρέχει πάνω σε έναν ευθύ δρόμο με μεταβαλλόμενη ταχύτητα. Η ταχύτης δεν είναι γνωστή (το ταχύμετρο είναι χαλασμένο) αλλά το ρολόι δουλεύει καλώς και ο δείκτης χιλιομετρικών αποστάσεων. Ζητάμε την ταχύτητα.

Αν μετρήσουμε τις χιλιομετρικές αποστάσεις $s(t_1)$, $s(t_2)$ σε δύο χρονικές στιγμές t_1, t_2, τότε η "μέση ταχύτης" από την μιά χρονική στιγμή μέχρι την άλλη είναι

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{\text{(προσημασμένη) χιλιομετρική απόσταση}}{\text{χρονική διαφορά}}$$

Ποιά είναι όμως η "στιγμιαία ταχύτης" σε μιά χρονική στιγμή $t=\tau$; Θα πρέπει να υποθέσουμε ότι η ταχύτης του οχήματος, αν και αλλάζει, δεν έχει απότομες αλλαγές σε κοντινούς χρόνους, και έτσι η στιγμιαία ταχύτης όταν $t=\tau$ μπορεί να προσεγγισθεί από την μέση ταχύτητα από την στιγμή $t=\tau$ στην στιγμή $t=\tau'$, αρκεί η τ' να προσεγγίζει την τ.

Άρα: στιγμιαία ταχύτης $= \lim\limits_{\tau'\to\tau} \dfrac{s(\tau')-s(\tau)}{\tau'-\tau}$.

Παράγωγος

Είναι φανερή η ομοιότης των τύπων της κλίσης της εφαπτομένης και της στιγμιαίας ταχύτητας. Και είναι σίγουρα συναρπαστική η "σύμπτωση" αυτή στην λύση δύο διαφορετικών προβλημάτων. Τα προβλήματα είναι οπωσδήποτε διαφορετικά, αλλά αυτό που κρύβεται είναι κοινό: ρυθμός μεταβολής (του ύψους $f(x)$ στο πρώτο πρόβλημα, απόσταση $s(t)$ στο δεύτερο πρόβλημα). Οπωσδήποτε κάθε ζήτημα υπολογισμού του ρυθμού μεταβολής μιας ποσότητας, σε οποιοδήποτε πεδίο της εφαρμοσμένης ή μη επιστήμης, η κατάληξη είναι πάντοτε ένας ανάλογος τύπος. Δικαιολογείται, λοιπόν, ο ακόλουθος

<u>Ορισμός</u> Έστω συνάρτηση $y=f(x)$, $a \le x \le b$, και σημείο ξ με $a \le \xi \le b$. Αν το όριο $\lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ υπάρχει, τότε λέμε ότι η f <u>είναι παραγωγίσιμη στο ξ</u>, ή ότι <u>έχει παράγωγο στο ξ</u>, ή ότι <u>είναι διαφορίσιμη στο ξ</u>. Το όριο αυτό ονομάζεται <u>παράγωγος</u> της f στο ξ. Συμβολίζεται:

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi) = Df(\xi) = \frac{df}{dx}(\xi) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\xi} .$$

Και οι τέσσερις συμβολισμοί είναι αρκετά συνηθισμένοι.

<u>Παραδείγματα</u>

(1) $y=f(x)=c$, όπου c είναι σταθερός αριθμός.

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}\frac{c-c}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} 0 = 0$$

Άρα $f'(\xi) = \left.\dfrac{dc}{dx}\right|_{x=\xi} = 0$, για οποιοδήποτε ξ.

(2) $y=f(x)=x^n$, n φυσικός αριθμός.

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}\frac{x^n-\xi^n}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}\left(x^{n-1}+x^{n-2}\xi+\dots+x^{n-k}\xi^{k-1}+\dots\right.$$

$$\left.+\,x\xi^{n-2}+\xi^{n-1}\right) = \underbrace{\xi^{n-1}+\xi^{n-1}+\dots+\xi^{n-1}}_{n \text{ φορές}} = n\xi^{n-1}.$$

Άρα $f'(\xi) = \left.\dfrac{d(x^n)}{dx}\right|_{x=\xi} = n\xi^{n-1}$, για οποιοδήποτε ξ.

(3) $y=f(x)=x^{m/n}=x^p$, $p=\dfrac{m}{n}$ = ρητός αριθμός θετικός.

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}\frac{x^{m/n}-\xi^{m/n}}{x-\xi}$$

Για να βρούμε το όριο, θέτουμε $z=x^{1/n}$, $w=\xi^{1/n}$, ή ισοδύναμα $z^n=x$, $w^n=\xi$. Τότε, το $x\to\xi$ είναι ισοδύναμο με το $z\to w$.

Άρα το προηγούμενο όριο είναι $= \lim_{z\to w} \dfrac{z^m - w^m}{z^n - w^n} =$

$$= \lim_{z\to w} \frac{z^{m-1} + z^{m-2}w + \dots + z w^{m-2} + w^{m-1}}{z^{n-1} + z^{n-2}w + \dots + z w^{n-2} + w^{n-1}} = \frac{m w^{m-1}}{n w^{n-1}} = \frac{m}{n} w^{m-n} =$$

$$= p\, \xi^{\frac{m}{n}-1} = p\, \xi^{p-1}.$$

Αν ο $p = \frac{m}{n}$ είναι αρνητικός ρητός, τότε θέτοντας $r = -p > 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to\xi} \frac{x^p - \xi^p}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{x^{-r} - \xi^{-r}}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \left(- \frac{x^r - \xi^r}{x-\xi} \cdot \frac{1}{x^r \xi^r} \right)$$

$$= -r\,\xi^{r-1} \cdot \frac{1}{\xi^r \xi^r} = -r\,\xi^{-r-1} = p\,\xi^{p-1}.$$

Άρα

$$f'(\xi) = \left.\frac{d(x^p)}{dx}\right|_{x=\xi} = p\,\xi^{p-1}, \quad \text{για οποιοδήποτε } \xi.$$

Παρατήρηση (α) Ξαναθυμηθείτε τα πεδία ορισμού της $y = x^p$: αν $p = \frac{m}{n}$ είναι η μορφή του p σε ανάγωγο κλάσμα τότε, αν ο n είναι περιττός, το ξ είναι οποιοδήποτε, ενώ αν ο n είναι άρτιος, το ξ είναι >0. Επίσης, το $\xi = 0$ παραλείπεται όταν "αρνητικούς παρονομαστές".

(β) Ο τύπος $\left.\frac{d(x^p)}{dx}\right|_{x=\xi} = p\,\xi^{p-1}$ ισχύει και για άρρητο p, αλλά αυτό είναι πιο δύσκολο να αποδειχθεί και θα το δούμε αργότερα.

(4) $y = \sin x$.

$$\lim_{x\to\xi} \frac{\sin x - \sin\xi}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{2\sin\left(\frac{x-\xi}{2}\right)\cos\left(\frac{x+\xi}{2}\right)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{\sin\left(\frac{x-\xi}{2}\right)}{\frac{x-\xi}{2}} \cdot \lim_{x\to\xi} \cos\left(\frac{x+\xi}{2}\right)$$

$$= 1 \cdot \cos\xi = \cos\xi$$

Άρα: $\left.\dfrac{d(\sin x)}{dx}\right|_{x=\xi} = \cos\xi$, για οποιοδήποτε ξ

Ομοίως: $\left.\dfrac{d(\cos x)}{dx}\right|_{x=\xi} = -\sin\xi$, για οποιοδήποτε ξ.

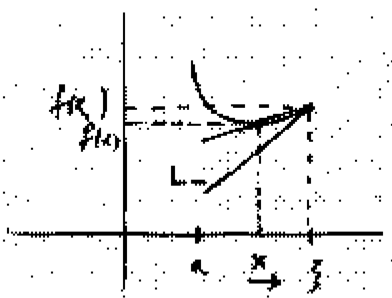
Πλευρικές παράγωγοι

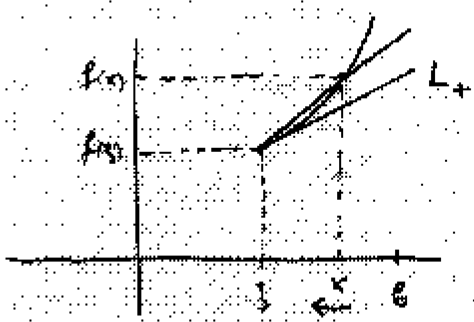
Το $\lim\limits_{x\to\xi+}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ ονομάζεται δεξιά πλευρική παράγωγος της f στο ξ και συμβολίζεται $f'_+(\xi)$.

Το $\lim\limits_{x\to\xi-}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ ονομάζεται αριστερή πλευρική παράγωγος της f στο ξ και συμβολίζεται $f'_-(\xi)$.

Αν η f ορίζεται σε διάστημα που περιέχει το ξ σαν εσωτερικό σημείο τότε η f έχει παράγωγο στο ξ αν και μόνον αν έχει δεξιά και αριστερή πλευρική παράγωγο και είναι ίσες: $f'(\xi)=a \Leftrightarrow f'_+(\xi)=f'_-(\xi)=a$.

Αν η f ορίζεται σε διάστημα μονάχα από μία μεριά του ξ τότε η παράγωγος ταυτίζεται με την ανάλογη πλευρική παράγωγο.



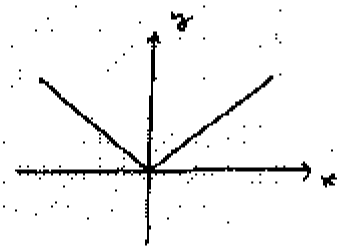


Όπως είναι φανερό από τα αντίστοιχα σχήματα, η $f'_+(\xi)$ είναι η κλίση της ημιευθείας, η οποία εφάπτεται στο κομμάτι του γραφήματος της $y=f(x)$ που βρίσκεται δεξιά του ξ. Ενώ η $f'_-(\xi)$ είναι η κλίση της ημιευθείας, η οποία εφάπτεται στο κομμάτι του γραφήματος που βρίσκεται αριστερά του ξ.

Παράδειγμα $f(x)=|x|$, $\xi=0$.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0+}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to0+}1=1$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0-}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to0+}(-1)=-1.$$



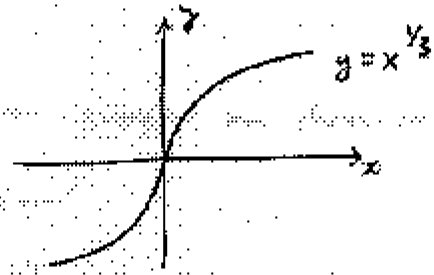
Άρα $f'(0)$ δεν υπάρχει. Υπάρχουν οι δύο εφαπτόμενες ημιευθείες, αλλά επειδή οι κλίσεις τους είναι διαφορετικές, δεν σχηματίζουν εφαπτόμενη ευθεία.

Αν $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = +\infty$ ή $-\infty$, τότε γράφουμε $f'(\xi)=+\infty$ ή $-\infty$ αντιστοίχως. Αν $f'(\xi)=+\infty$, τότε η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας είναι $+\infty$, που σημαίνει ότι οι χορδές τείνουν να γίνουν κατακόρυφες αλλά "κοιτάζοντας προς τα πάνω" (δηλαδή με κλίση πολύ μεγάλη θετική).
Αν $f'(\xi)=-\infty$, τότε η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας είναι $-\infty$, και σημαίνει ότι οι χορδές τείνουν να γίνουν κατακόρυφες αλλά "κοιτάζοντας προς τα κάτω" (δηλαδή με κλίση πολύ μεγάλη αρνητική).

Ανάλογα σχόλια ισχύουν και για πλευρικές παραγώγους.

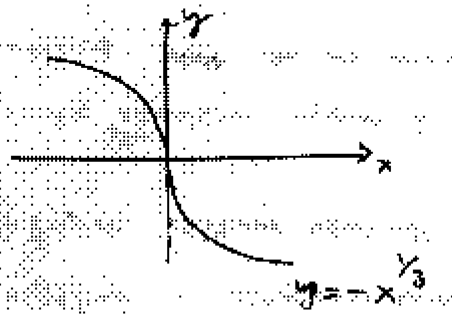
Παραδείγματα (α) $f(x)=x^{1/3}$, $\xi=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^{1/3}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2/3}}=+\infty$$



(β) $f(x)=-x^{1/3}$, $\xi=0$

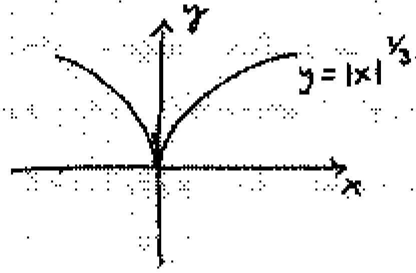
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{-x^{1/3}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^{2/3}}\right)=-\infty$$



(γ) $f(x)=|x|^{1/3}$, $\xi=0$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{|x|^{1/3}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^{2/3}}=+\infty$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{|x|^{1/3}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\left(-\frac{1}{x^{2/3}}\right)=-\infty$$



Κανόνες παραγώγισης

Θεώρημα (α) Αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ και λ αριθμός, τότε και η $\lambda f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ και $(\lambda f)'(\xi)=\lambda f'(\xi)$.

(β) Αν οι $f(x)$, $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο ξ, τότε και η $f(x)+g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ και $(f+g)'(\xi)=f'(\xi)+g'(\xi)$.

(γ) Αν οι $f(x), g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο ξ τότε και η $f(x)g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ, και $(fg)'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi)$.

Επίσης, αν επιπλέον $g(\xi) \neq 0$, τότε και η $f(x)/g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο ξ, και $\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \dfrac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{(g(\xi))^2}$.

<u>Παραδείγματα</u> (α) $y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Εφαρμογή των κανόνων (α) και (β) (αφού επεκτείνουμε τον κανόνα (β) με επαγωγή σε περισσότερους από δύο προσθέτους) δίνει:

$$P'(\xi) = na_n\xi^{n-1} + (n-1)a_{n-1}\xi^{n-2} + \dots + 2a_2\xi + a_1 .$$

(β) Αν $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ είναι ρητή συνάρτηση, υπολογίζουμε την παράγωγό της με εφαρμογή του κανόνα (γ):

$$y = \frac{x^2+x-1}{x^3+2}, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\xi} = \frac{(2\xi+1)(\xi^3+2) - (\xi^2+\xi-1)(3\xi^2)}{(\xi^3+2)^2} =$$

$$= \frac{-\xi^4 - 2\xi^3 + 3\xi^2 + 4\xi + 2}{(\xi^3+2)^2}$$

(γ) $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$f'(\xi) = \frac{\cos\xi \cdot \cos\xi - \sin\xi(-\sin\xi)}{(\cos\xi)^2} = \frac{1}{\cos^2\xi}, \quad \xi \neq \frac{\pi}{2} + \text{πολλ. } \pi$$

$g(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$$g'(\xi) = \frac{(-\sin\xi)\sin\xi - \cos\xi \cdot \cos\xi}{(\sin\xi)^2} = -\frac{1}{\sin^2\xi}, \quad \xi \neq \text{πολλ. } \pi$$

<u>Απόδειξη του Θεωρήματος</u>

(α) $(\lambda f)'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \dfrac{\lambda f(x) - \lambda f(\xi)}{x-\xi} = \lambda \lim_{x\to\xi} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lambda f'(\xi)$.

(β) $(f+g)'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \dfrac{(f(x)+g(x)) - (f(\xi)+g(\xi))}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}\left(\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} + \dfrac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\right)$

$$= \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} + \lim_{x\to\xi}\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi) + g'(\xi).$$

(γ) $(fg)'(\xi) = \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)g(x) - f(\xi)g(\xi)}{x-\xi} = \lim\limits_{x\to\xi}\left(\dfrac{f(x)(g(x)-g(\xi))}{x-\xi} + \dfrac{(f(x)-f(\xi))g(\xi)}{x-\xi}\right)$

$$= \lim_{x\to\xi} f(x)\cdot \lim_{x\to\xi}\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} + \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\cdot g(\xi) =$$

$$= f(\xi)\, g'(\xi) + f'(\xi)\, g(\xi).$$

και

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \lim_{x\to\xi}\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(\xi)}{g(\xi)}}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)g(\xi) - f(\xi)g(x)}{(x-\xi)\, g(x)\, g(\xi)} =$$

$$= \lim_{x\to\xi}\left(\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\cdot g(\xi) - f(\xi)\cdot\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\right)\frac{1}{g(x)g(\xi)} =$$

$$= \left(f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)\right)\lim_{x\to\xi}\left(\frac{1}{g(x)\,g(\xi)}\right) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{(g(\xi))^2}.$$

Ο προσεκτικός αναγνώστης πιθανόν να παρατήρησε ότι στην απόδειξη των κανόνων (γ) χρησιμοποιήσαμε ότι: $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$, $\lim\limits_{x\to\xi} g(x) = g(\xi)$ χωρίς όμως να περιλαμβάνεται στις υποθέσεις ότι οι f, g είναι συνεχείς στο ξ. Όμως

<u>Θεώρημα</u> Αν η συνάρτηση $y=f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x=\xi$, τότε είναι και συνεχής στο ξ.

<u>Απόδειξη</u> $\lim\limits_{x\to\xi}(f(x) - f(\xi)) = \lim\limits_{x\to\xi}\left(\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\cdot(x-\xi)\right) =$

$$= \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\cdot\lim_{x\to\xi}(x-\xi) = f'(\xi)\cdot 0 = 0.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \lim\limits_{x\to\xi}\left(f(x) - f(\xi) + f(\xi)\right) = 0 + f(\xi) = f(\xi)$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Μπορεί η $f(x)$ να είναι συνεχής σε $x=\xi$ αλλά να μην είναι παραγωγίσιμη στο ξ.

<u>Παράδειγμα</u> $f(x) = |x|$, $\xi = 0$.

Ένας άλλος πολύ σημαντικός κανόνας παραγώγισης εκφράζεται από το

<u>Θεώρημα (κανόνας της αλυσίδας)</u> Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $y=f(x)$ και $z=g(y)$. Η πρώτη ορίζεται σε κάποιο διάστημα $\alpha<x<\beta$ και η δεύτερη σε κάποιο διάστημα $\gamma<y<\delta$. Επιπλέον οι τιμές $y=f(x)$ βρίσκονται στο (γ,δ) για κάθε x στο (α,β). Άρα η $g\circ f$ ορίζεται στο (α,β).

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=\xi$ $(\alpha<\xi<\beta)$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $y=\eta$, με $\eta=f(\xi)$, τότε η $g\circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x=\xi$ και:

$$(g\circ f)'(\xi) = g'(\eta)\, f'(\xi)$$

<u>Παρατήρηση</u>: Με τον συμβολισμό $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\xi} = f'(\xi)$, ο τελευταίος τύπος γράφεται:

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=\xi} = \left.\frac{dz}{dy}\right|_{y=\eta} \cdot \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\xi}$$

ή, πιο απλά: $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$

<u>Παραδείγματα</u>: (1) $z = \sin(x^2+3)$. Ζητάμε το $\frac{dz}{dx}$.

Γράφουμε: $y = x^2+3$. Τότε $z=\sin y$.

Θεωρούμε τυχόν $x=\xi$. Τότε $y=\eta=\xi^2+3$.

Ο τύπος της αλυσίδας γίνεται τότε:

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=\xi} = \left.\cos y\right|_{y=\eta} \cdot \left.2x\right|_{x=\xi} = \cos\eta\cdot 2\xi = \cos(\xi^2+3)\cdot 2\xi .$$

Άρα $\left.\frac{d(\sin(x^2+3))}{dx}\right|_{x=\xi} = 2\xi\cos(\xi^2+3)$.

(2) $z = \sin^n x$. Ζητάμε το $\frac{dz}{dx}$.

Γράφουμε: $y=\sin x$. Τότε $z=y^n$.

Θεωρούμε τυχόν $x=\xi$. Τότε $y=\eta=\sin\xi$

και ο τύπος της αλυσίδας γίνεται :

$$\frac{dz}{dx}\Big|_{x=\xi} = n y^{n-1}\Big|_{y=\eta} \cdot \cos x\Big|_{x=\xi} = n\cdot \eta^{n-1}\cdot \cos\xi = n \sin^{n-1}\xi \,\cos\xi .$$

<u>Απόδειξη του Θεωρήματος της αλυσίδας</u> (όχι αυστηρή).

Θα υπολογίσουμε το όριο $(g\circ f)'(\xi) = \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{g(f(x))-g(f(\xi))}{x-\xi}$.

<u>1η περίπτωση</u>. Ας υποθέσουμε ότι καθώς το $x\to\xi$, οι τιμές της $f(x)$ δεν είναι <u>ποτέ</u> <u>ίσες</u> με την τιμή $f(\xi)$. (Παρά το γεγονός ότι οι τιμές $f(x)$ προσεγγίζουν την $f(\xi)$).

Τότε
$$\lim_{x\to\xi} \frac{g(f(x))-g(f(\xi))}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{g(f(x))-g(f(\xi))}{f(x)-f(\xi)}\cdot\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

$$= \lim_{x\to\xi} \frac{g(f(x))-g(f(\xi))}{f(x)-f(\xi)} \cdot \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

$$= \lim_{y\to\eta} \frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta}\cdot f'(\xi)$$

(στο πρώτο όριο χρησιμοποιούμε ότι $y=f(x)\longrightarrow \eta=f(\xi)$ όταν $x\to\xi$)

$$= g'(\eta)\cdot f'(\xi) .$$

<u>2η περίπτωση</u>. Ας υποθέσουμε τώρα ότι καθώς το $x\to\xi$, υπάρχουν πάντα κάποιες τιμές του x για τις οποίες $f(x)=f(\xi)$.

Ένα πρώτο συμπέρασμα που μπορούμε να βγάλουμε τότε είναι ότι $f'(\xi)=0$.

Διότι, χρησιμοποιώντας <u>αυτές</u> τις τιμές του x πλησιάζοντας το ξ,

έχουμε : $f'(\xi) = \lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim\limits_{x\to\xi} 0 = 0$

Και τώρα :

$$\lim_{x\to\xi}\frac{g(f(x))-g(f(\xi))}{x-\xi} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{g(f(x))-g(f(\xi))}{f(x)-f(\xi)}\cdot\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}, & \text{για } f(x)\neq f(\xi) \\[2ex] \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{g(f(\xi))-g(f(\xi))}{x-\xi}, & \text{για } f(x)=f(\xi) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{y\to\eta} \dfrac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta} \cdot \lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} & , \text{ για } f(x)\neq f(\xi) \\ \lim\limits_{x\to\xi} 0 & , \text{ για } f(x)=f(\xi) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} g'(\eta)\cdot f'(\xi) \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} g'(\eta)\cdot 0 \\ 0 \end{cases} = 0 .$$

Άρα, και σ' αυτήν την περίπτωση: $(g\circ f)'(\xi) = g'(\eta)\cdot f'(\xi)$ αφού και τα δύο μέλη της ισότητας είναι $=0$.

<u>Θεώρημα (Αντίστροφης συνάρτησης)</u> Έστω συνάρτηση $y=f(x)$ η οποία ορίζεται και είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα σε διάστημα $a\leq x\leq b$. Γνωρίζουμε τότε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $x=f^{-1}(y)$ στο διάστημα $A\leq y\leq B$, όπου $A=f(a)$, $B=f(b)$.

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=\xi$, τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $y=\eta=f(\xi)$ και:

$$(f^{-1})'(\eta) = \begin{cases} \dfrac{1}{f'(\xi)} & \text{αν } f'(\xi)\neq 0 \\ +\infty & \text{αν } f'(\xi)=0 \end{cases}$$

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε: "$A=f(b)$, $B=f(a)$" και "$(f^{-1})'(\eta) = -\infty$ αν $f'(\xi)=0$" είναι οι μόνες αλλαγές στην προηγούμενη διατύπωση.

<u>Παρατήρηση</u> Με άλλον συμβολισμό: $\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=\eta} = \dfrac{1}{\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\xi}}$

ή, πιο απλά: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$.

Παραδείγματα (1) $y = x^n$ ($-\infty < x < \infty$ αν $n =$ περιττός φυσικός,

$0 < x < \infty$ αν $n =$ άρτιος φυσικός)

Τότε $x = y^{1/n}$. Θεωρούμε τυχόν $x = \xi$ και $y = \eta = \xi^n$

$$\frac{d(y^{1/n})}{dy}\Big|_{y=\eta} = \frac{dx}{dy}\Big|_{y=\eta} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\xi}} = \frac{1}{n x^{n-1}\big|_{x=\xi}} = \frac{1}{n\,\xi^{n-1}} = \frac{1}{n}\,\eta^{\frac{1}{n}(1-n)} = \frac{1}{n}\,\eta^{\frac{1}{n}-1}$$

Ξαναβρίσκουμε λοιπόν τον παράγωγο $\frac{d(y^{\alpha})}{dy} = \alpha\, y^{\alpha-1}$,

όταν $\alpha = \frac{1}{n}$, $n =$ φυσικός.

(2) $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Τότε $x = \mathrm{Arcsin}\, y$, $-1 \le y \le 1$

Θεωρούμε τυχόν $x = \xi$ και $y = \eta = \sin\xi$

$$\frac{d\,\mathrm{Arcsin}\,y}{dy}\Big|_{y=\eta} = \frac{dx}{dy}\Big|_{y=\eta} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\xi}} = \frac{1}{\cos\xi}$$

Όμως $\cos\xi = \pm\sqrt{1-\sin^2\xi}$. Επειδή $-\frac{\pi}{2} \le \xi \le \frac{\pi}{2}$, $\cos\xi \ge 0$.

Άρα $\cos\xi = \sqrt{1-\sin^2\xi} = \sqrt{1-\eta^2}$

Άρα
$$\frac{d\,\mathrm{Arcsin}\,y}{dy}\Big|_{y=\eta} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}, & -1 < \eta < 1 \\ +\infty, & \eta = \pm 1 \end{cases}$$

ή, πιο απλά
$$\frac{d\,\mathrm{Arcsin}\,y}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & -1 < y < 1 \\ +\infty, & y = \pm 1 \end{cases}$$

(3) $y = \tan x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Τότε $x = \mathrm{Arctan}\, y$, $-\infty < y < \infty$

Θεωρούμε τυχόν $x = \xi$ και $y = \eta = \tan\xi$

$$\frac{d\,\mathrm{Arctan}\,y}{dy}\Big|_{y=\eta} = \frac{dx}{dy}\Big|_{y=\eta} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\xi}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\xi}} = \cos^2\xi = \frac{1}{1+\tan^2\xi}$$

$$= \frac{1}{1+y^2} .$$

Ή, πιο απλά : $\frac{d\,\mathrm{Arctan}\,y}{dy} = \frac{1}{1+y^2}$, $-\infty < y < \infty$.

<u>Απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος:</u>

$$(f^{-1})'(\eta) = \lim_{y\to\eta} \frac{(f^{-1})(y) - (f^{-1})(\eta)}{y-\eta} = \lim_{x\to\xi} \frac{x-\xi}{f(x)-f(\xi)} = \frac{1}{\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}$$

$$= \frac{1}{f'(\xi)} , \quad \text{όταν } f'(\xi) \neq 0 .$$

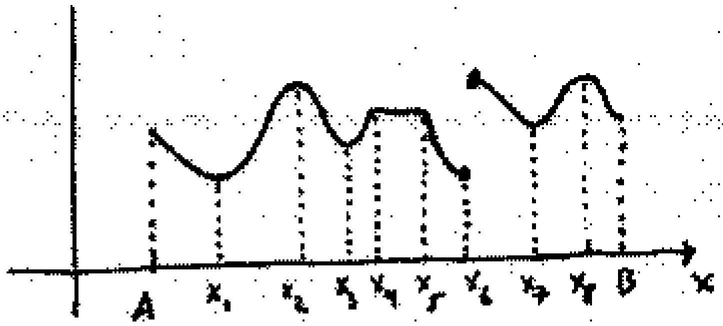
Όταν $f'(\xi)=0$, τότε το κλάσμα $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ έχει όριο 0 αλλά είναι και θετικό (λόγω της αυξητικότητας της f). Άρα το ζητούμενο όριο είναι $+\infty$.

Όλες σχεδόν οι περιπτώσεις υπολογισμού παραγώγων ανάγονται στις παραγώγους απλών συναρτήσεων με την βοήθεια των προηγουμένων θεωρημάτων : πρόσθεσης , πολλαπλασιασμού , διαίρεσης , σύνθεσης και αντιστρόφου συνάρτησης .

<u>Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και Εφαρμογές.</u>

Λέμε ότι ένα σημείο ξ είναι <u>σημείο τοπικού μεγίστου</u> μιας συνάρτησης $y=f(x)$, αν η τιμή $f(\xi)$ είναι η πιο μεγάλη από όλες τις τιμές $f(x)$ όταν το x βρίσκεται μέσα σε μιά περιοχή του ξ : $a<x<b$ με $\xi\in(a,b)$. (και δηλαδή : $f(x) \le f(\xi)$ για όλα τα x με $a<x<b$ (και που βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της f).

Ο ορισμός του <u>σημείου τοπικού ελαχίστου</u> είναι ανάλογος.



Αν το διάγραμμα της f είναι όπως στο παραπάνω σχήμα, τότε τα σημεία A, x_2, x_8, καθώς και οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος $[x_4, x_5]$, είναι σημεία τοπικού μεγίστου της f.

Τα σημεία x_1, x_3, x_6, x_7, B, καθώς και κάθε σημείο του διαστήματος (x_4, x_5), είναι σημεία τοπικού ελαχίστου της f.

Προσέξτε την διαφορά: το $x=\xi$ λέγεται <u>σημείο ολικού μεγίστου</u> της f όταν η τιμή $f(\xi)$ είναι η μεγαλύτερη από όλες τις τιμές $f(x)$ καθώς το x διατρέχει <u>ολόκληρο</u> το πεδίο ορισμού της f (και όχι μονάχα μιά περιοχή γύρω από το ξ). Ο ορισμός του <u>σημείου ολικού ελαχίστου</u> είναι ανάλογος.

<u>Θεώρημα (Fermat)</u> Έστω $y=f(x)$ ορισμένη σε διάστημα $a<x<b$, και σημείο ξ εσωτερικό του διαστήματος: $a<\xi<b$. Αν το ξ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f (δηλ. είτε τοπικού μεγίστου είτε τοπικού ελαχίστου), και αν η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ, τότε $f'(\xi)=0$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω ότι το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f. Δηλαδή, $f(x) \leq f(\xi)$ για όλα τα x που βρίσκονται αρκετά κοντά στο ξ, και από τις δύο μεριές του.

Για αυτά τα x: $\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$ αν $x<\xi$

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0 \quad \text{αν} \quad x>\xi .$$

Άρα $\lim\limits_{x\to\xi-} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \ge 0$, $\lim\limits_{x\to\xi+} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \le 0$.

Επειδή υπάρχει η $f'(\xi)$, θα πρέπει τα δύο όρια να είναι ίσα.

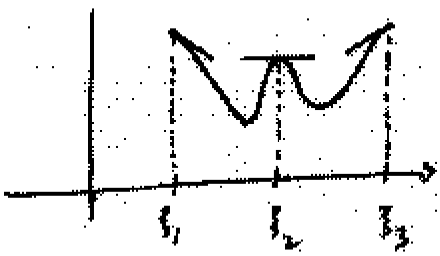
Δηλαδή $f'(\xi)=0$.

<u>Παρατήρηση</u> (1) Αν το σημείο τοπικού μεγίστου ξ είναι άκρο του διαστήματος που ορίζεται η f : $[\xi=a, b)$, και η f παραγωγίζεται στο ξ (δηλαδή έχει δεξιά πλευρική παράγωγο) τότε $f'(\xi)=f'_+(\xi) \le 0$

Αν το ξ είναι το άλλο άκρο $(a, \xi=b]$ τότε

$$f'(\xi)=f'_-(\xi) \ge 0 .$$

Και οι τρείς περιπτώσεις για την θέση του ξ φαίνονται στο σχήμα



(2) Αν το ξ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου, αλλά η f δεν παραγωγίζεται στο ξ τότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε (προφανώς) ότι $f'(\xi)=0$.

<u>Παράδειγμα</u> $f(x)=|x|$. $\xi=0$. Το 0 είναι σημείο τοπικού (και μάλιστα ολικού) ελαχίστου , αλλά η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 .

Η πιο άμεση εφαρμογή του θεωρήματος του Fermat είναι στον προσδιορισμό των τοπικών ακροτάτων μιας $y=f(x)$, $a \le x \le b$.
Αν ένα ξ είναι τοπικό ακρότατο της f, τότε ανήκει σε μία από τις τρείς κατηγορίες :

(i) είναι ένα από τα άκρα : $\xi=\alpha$ ή $\xi=\beta$

(ii) είναι εσωτερικό σημείο $\alpha<\xi<\beta$ και η f δεν έχει παράγωγο στο ξ

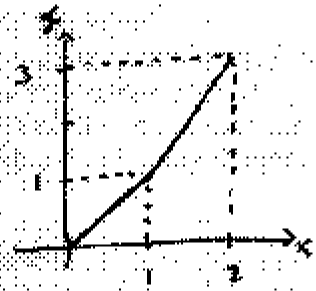
(iii) είναι εσωτερικό σημείο $\alpha<\xi<\beta$, η f έχει παράγωγο στο ξ οπότε, αναγκαστικά, $f'(\xi)=0$.

Τίποτε από αυτά δεν αναγκάζει το ξ να είναι σημείο τοπικού ακρότατου.

<u>Παραδείγματα</u>: (1) $f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & 0<x\le 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Το άκρο $\xi=0$, δεν είναι ούτε σημείο τοπικού μεγίστου ούτε σημείο τοπικού ελαχίστου.

(2) $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ 2x-1, & 1\le x\le 2 \end{cases}$



Στο εσωτερικό σημείο $\xi=1$ η f δεν έχει παράγωγο και δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

(3) $f(x)=x^3$, $-1\le x\le 1$

Στο εσωτερικό σημείο $\xi=0$ η f έχει παράγωγο και $f'(0)=0$.
Αλλά το 0 δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

Οι τρεις παραπάνω κατηγορίες σημείων ξ έχουν την έννοια ενός πρώτου ξεκαθαρίσματος σημείων που <u>σίγουρα δεν είναι</u> σημεία τοπικού ακροτάτου. Δηλαδή των ξ που είναι εσωτερικά σημεία <u>και</u> που η f έχει παράγωγο στο ξ <u>και</u> που $f'(\xi)\neq 0$.
Τα υπόλοιπα σημεία (δηλαδή των τριών κατηγοριών) πρέπει να εξεταστούν περαιτέρω ώστε να αποφασισθεί αν, πράγματι,

αποτελούν σημεία τοπικού ακροτάτου.

<u>Παράδειγμα</u>: $f(x) = |\sin x|$, $0 \le x \le 2\pi$.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x , & 0 \le x \le \pi \\ -\sin x , & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

Στο $\xi = \pi$ η f δεν έχει παράγωγο:

$f'_+(\pi) = 1$, $f'_-(\pi) = 1$.

Εκτός από τα άκρα $\xi = 0$, $\xi = 2\pi$ και το $\xi = \pi$, η f έχει παράγωγο

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x , & 0 < x < \pi \\ -\cos x , & \pi < x < 2\pi . \end{cases}$$

και $f'(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}$ ή $x = \frac{3\pi}{2}$.

Άρα έχουμε τα εξής <u>πιθανά</u> σημεία τοπικού ακροτάτου:

$\xi = 0, 2\pi, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

$f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0$

$f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{3\pi}{2}) = 1$.

Προφανώς: $0 \le |\sin x| \le 1$ για κάθε x στο $[0, 2\pi]$.

Άρα τα $0, \pi, 2\pi$ είναι σημεία ολικού ελαχίστου και τα $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ είναι σημεία ολικού μεγίστου.

<u>Θεώρημα (Rolle)</u> Θεωρούμε συνάρτηση $y = f(x)$ ορισμένη και συνεχή σε κάθε σημείο του κλειστού διαστήματος $[a, b]$. Επί πλέον υποθέτουμε ότι η f έχει παράγωγο σε κάθε σημείο του ανοικτού (a, b).

Αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει κάποιο σημείο ξ με $a < \xi < b$ και $f'(\xi) = 0$.

Απόδειξη. Περίπτωση (1): υπάρχει κάποιο x με τιμή $f(x) > f(a) = f(b)$. Τότε, επειδή η f είναι συνεχής στο κλειστό $[a,b]$, έχει μέγιστη τιμή $f(\xi)$ σε κάποιο ξ. Επειδή $f(\xi) \geq f(x) > f(a) = f(b)$, το ξ δεν είναι ούτε a ούτε b. Άρα $a < \xi < b$. Και, επειδή το ξ είναι σημείο μεγίστου, $f'(\xi) = 0$

Περίπτωση (2): υπάρχει κάποιο x με τιμή $f(x) < f(a) = f(b)$. Εργαζόμαστε όπως και στην περίπτωση (1) με την ελάχιστη τιμή $f(\xi)$.

Περίπτωση (3): δεν υπάρχει κανένα x με $f(x) > f(a)$, και κανένα x με $f(x) < f(a)$. Άρα $f(x) = f(a) =$ σταθερά. $f'(x) = 0$ γιά κάθε x και οποιοδήποτε ξ μας κάνει.

Παρατήρηση. Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη έστω και σε ένα σημείο του (a,b) τότε το αποτέλεσμα μπορεί να μην ισχύει. Γιά παράδειγμα η $f(x) = |x|$, $-1 \leq x \leq 1$.

$f(-1) = f(1) = 1$, και δεν υπάρχει κανένα ξ με $f'(\xi) = 0$.

Θεώρημα Μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού. Θεωρούμε συνάρτηση $y = f(x)$ ορισμένη και συνεχή σε κάθε σημείο του $[a,b]$ και παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του (a,b). Τότε, υπάρχει κάποιο ξ στο (a,b) ώστε:
$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση
$$y = g(x) = (b-a)(f(x) - f(a)) - (f(b) - f(a))(x-a), \quad a \leq x \leq b.$$
Αυτή έχει τις ίδιες ιδιότητες με την $f(x)$, και επιπλέον
$g(b) = g(a) = 0$.

Από το θεώρημα του Rolle, υπάρχει κάποιο ξ στο (a,b) ώστε $g'(\xi) = 0$.

Όπως $g'(x) = (b-a)f'(x) - (f(b)-f(a))$, $a<x<b$.

Άρα $0 = (b-a)f'(\xi) - (f(b)-f(a))$

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Παρατήρηση. Το Θεώρημα του Rolle είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορ. Λογισμού. Διότι, αν $f(b)=f(a)$, τότε $f'(\xi) = \dfrac{0}{b-a} = 0$.

Θα δούμε τώρα μερικές πολύ γνωστές και σημαντικές εφαρμογές του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφ. Λογισμού.

Θεώρημα (α) Αν σε ένα διάστημα $f'(x)=0$, τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση στο διάστημα αυτό.

(β) Αν σε ένα διάστημα $f'(x)\geq 0$ (≤ 0), τότε η f είναι αύξουσα συνάρτηση (φθίνουσα συνάρτηση).

(γ) Αν σε ένα διάστημα $f'(x)>0$ (<0), τότε η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση (γνησίως φθίνουσα συνάρτηση).

Απόδειξη (α) Έστω $x_1<x_2$ οποιαδήποτε σημεία στο διάστημα. Εφαρμόζουμε το Θεώρ. Μέσης Τιμής στο $[x_1, x_2]$. Υπάρχει, λοιπόν, κάποιο ξ $(x_1<\xi<x_2)$ ώστε

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) = 0$$

Άρα $f(x_2) = f(x_1)$. Έτσι, οποιεσδήποτε τιμές της f είναι ίδιες και, επομένως, η f είναι σταθερή.

(β) Τώρα παίρνουμε $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) \geq 0$ (≤ 0)

Άρα, $f(x_2)\geq f(x_1)$ $(f(x_2)\leq f(x_1))$ για οποιαδήποτε $x_2>x_1$. Έτσι, η f είναι αύξουσα (φθίνουσα).

(γ) Όμοια.

<u>Παρατήρηση</u>: Ισχύουν και τα αντίστροφα των (α), (β) και, μάλιστα, η απόδειξή τους είναι απλή και δεν χρειάζεται το Θεώρ. Μέσης Τιμής: (α) Προφανές.

(β) Έστω f αύξουσα. Από τον ορισμό της παραγώγου

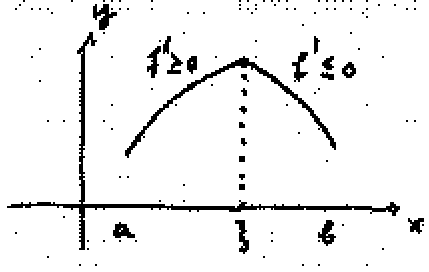
$$f'(x) = \lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \ge 0 ,$$

διότι το κλάσμα $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ είναι ≥ 0 (είτε $x<y$, είτε $y<x$).

Από την άλλη μεριά, του (γ) δεν ισχύει το αντίστροφο. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, συμπεραίνουμε $f'(x) \ge 0$ (που είναι ειδική περίπτωση του αντιστρόφου του (β)) αλλά όχι $f'(x)>0$. Για παράδειγμα: $f(x)=x^3$. Η f είναι γνησίως αύξουσα, αλλά $f'(0)=0$.

<u>Πόρισμα</u>: Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα (α,β), το ξ είναι σημείο του διαστήματος, και η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,ξ) και στο (ξ,β) με $f'(x) \ge 0$ στο (α,ξ), $f'(x)\le 0$ στο (ξ,β) ή αντίστροφα. Τότε το ξ είναι σημείο μεγίστου της f ή σημείο ελαχίστου αντιστοίχως.

<u>Απόδειξη</u>: $f'(x)\ge 0$ στο (α,ξ) και f συνεχής στο $(\alpha,\xi]$ συνεπάγονται ότι η f είναι αύξουσα στο $(\alpha,\xi]$. Όμοια η f είναι φθίνουσα στο $[\xi,\beta)$. Άρα το ξ είναι σημείο μεγίστου της f.



__Παρατήρηση:__ Προσέξτε ότι δεν χρειάζεται η παραγωγισιμότητα της f στο ξ, αλλά χρειάζεται αριστερά και δεξιά του ξ.

__Παράδειγμα__ Εύρεση ακροτάτων μιας συνάρτησης: μας δίδουν μια συνάρτηση $y=f(x)$ σε ένα διάστημα $[a,b]$ και ζητείται να προσδιορίσουμε τα (τοπικά) ακρότατά της. Συνήθως παρουσιάζεται η εξής απλή σχετικά περίπτωση. Η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[a,b]$ και παραγωγίσιμη επίσης σε κάθε σημείο του $[a,b)$ εκτός, ίσως, από πεπερασμένου πλήθους σημεία.

(α) Μαζεύουμε τα σημεία όπου η f δεν είναι παραγωγίσιμη και τα σημεία όπου η παράγωγος είναι 0:

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Προσθέτουμε και τα άκρα a, b.

(β) Προσδιορίζουμε το πρόσημο της f' στα ενδιάμεσα διαστήματα. Αν κάποιο από τα ξ χωρίζει διαστήματα όπου η f' αλλάζει πρόσημο, τότε το ξ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου (ανάλογα με τα πρόσημα). Αν το ξ χωρίζει διαστήματα όπου η f' έχει το ίδιο πρόσημο, τότε το ξ δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

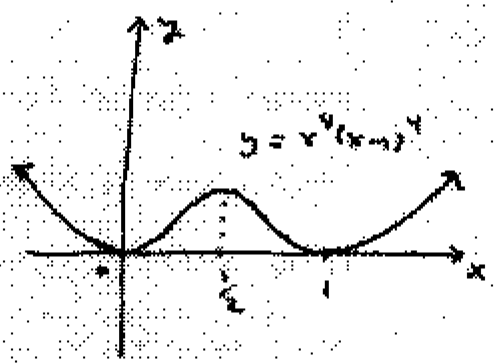
(1) $f(x) = x^4(x-1)^4 \quad , \quad -\infty < x < \infty$

$$f'(x) = 4x^3(x-1)^4 + 4x^4(x-1)^3 = 8x^3(x-1)^3\left(x-\tfrac{1}{2}\right).$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η f' μηδενίζεται στα $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \frac{1}{2}$, $\xi_3 = 1$, και ότι $f'(x) < 0$ όταν $-\infty < x < 0$, $\frac{1}{2} < x < 1$

και $f'(x) > 0$ όταν $0 < x < \frac{1}{2}$, $1 < x < +\infty$.

Άρα τα ξ_1, ξ_3 είναι σημεία τοπικού ελαχίστου και το ξ_2 είναι σημείο τοπικού μεγίστου. Επειδή $f(x) \geq 0$ για κάθε x, τα ξ_1, ξ_3 είναι σημεία ολικού ελαχίστου. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, το ξ_2 δεν είναι σημείο ολικού μεγίστου.



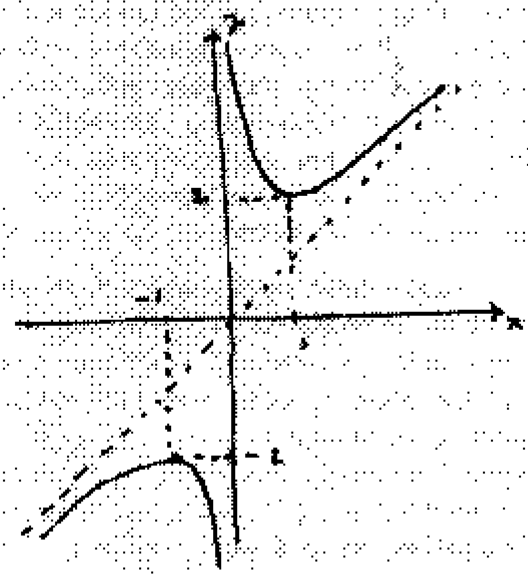
(ε) $y = f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$, $\quad -\infty < x < 0$ ή $0 < x < +\infty$.

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

Η f' μηδενίζεται για $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = +1$

Επίσης: $f'(x) > 0$ όταν $-\infty < x < -1$ ή $1 < x < +\infty$, και $f'(x) < 0$ όταν $-1 < x < 0$ ή $0 < x < 1$.

Άρα στα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ η $f(x)$ είναι αύξουσα γνησίως, ενώ στα $(-1, 0)$, $(0, 1)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Τα $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 1$ είναι τοπικά ακρότατα.



Επίσης, για να έχουμε μιά πιό πλήρη εικόνα της συμπεριφοράς της f παρατηρούμε τα εξής:

- $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -\infty$.

  Άρα ο κάθετος άξονας $x=0$ είναι ασύμπτωτος του γραφήματος.

- Αν θεωρήσουμε την ευθεία $y = x$, έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 .$$

Δηλαδή η απόσταση της καμπύλης $y=f(x)$ από την ευθεία $y=x$ γίνεται απεριόριστα μικρή όταν $x\to+\infty$. Λέμε τότε ότι η ευθεία $y=x$ είναι <u>δεξιά ασύμπτωτος</u> του γραφήματος.

Επίσης, η ίδια ευθεία $y=x$ είναι και <u>αριστερή ασύμπτωτος</u> του γραφήματος, αφού $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$.

<u>Δεύτερη παράγωγος</u>

Αν μιά συνάρτηση $y=f(x)$ έχει παράγωγο σε κάθε σημείο ενός διαστήματος $a<x<b$, έχει νόημα να ρωτήσουμε αν η συνάρτηση $f'(x)$ έχει με τη σειρά της παράγωγο σε κάποιο (ή κάποια) σημείο ξ του διαστήματος:

$$f''(\xi) = \lim_{x\to\xi}\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}$$

Αν υπάρχει αυτό το όριο, ονομάζεται <u>δεύτερη παράγωγος</u> της f στο ξ. Συμβολίζεται επίσης: $f''(\xi) = D^2f(\xi) = \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=\xi} =$

$$= \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\xi}$$

Επαγωγικά μπορούμε να ορίσουμε παραγώγους n-τάξης στο ξ.

$$f^{(n)}(\xi) = \lim_{x\to\xi}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(\xi)}{x-\xi} ,$$

αρκεί η παράγωγος $(n-1)$-τάξης να ορίζεται σε ένα διάστημα το οποίο περιέχει το ξ.

Συμβ: $f^{(n)}(\xi) = D^nf(\xi) = \left.\frac{d^nf}{dx^n}\right|_{x=\xi} = \left.\frac{d^ny}{dx^n}\right|_{x=\xi}$

Υπάρχουν δύο εφαρμογές της δεύτερης παραγώγου στην μελέτη της συμπεριφοράς μιας συνάρτησης.

(1) <u>Θεώρημα</u>. Έστω ότι η f έχει παράγωγο σε κάθε σημείο του διαστήματος $a<x<b$, το ξ είναι στο διάστημα αυτό, και η f έχει δεύτερη παράγωγο στο ξ. Αν $f'(\xi)=0$ και $f''(\xi)>0$ (<0), τότε η f έχει σημείο τοπικού ελαχίστου (μεγίστου) το ξ.

<u>Απόδειξη</u> (όχι αυστηρή)

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}=f''(\xi)>0.$$ Άρα η ποσότης $\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}$

θα είναι θετική (αφού προσεγγίζει αυθαίρετα τον θετικό αριθμό $f''(\xi)$) όταν το x βρεθεί αρκετά κοντά στο ξ.

Άρα $f'(x)>f'(\xi)=0$ όταν $x>\xi$ (και το x είναι αρκετά κοντά στο ξ), και $f'(x)<f'(\xi)=0$ όταν $x<\xi$ (και το x είναι αρκετά κοντά στο ξ).

Άρα, κοντά στο ξ και δεξιά του ξ η f είναι αύξουσα, ενώ κοντά στο ξ και αριστερά του ξ η f είναι φθίνουσα. Επομένως, το ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

<u>Παράδειγμα</u> $f(x)=x^2$. $f'(x)=2x$, $f''(x)=2$.

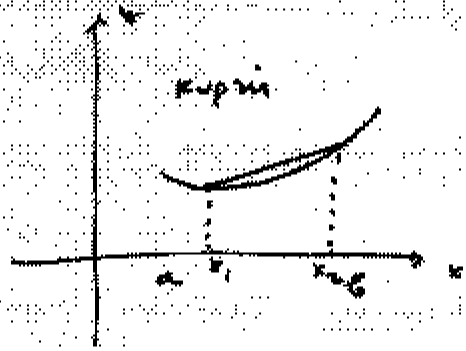
$\xi=0$: $f'(0)=0$, $f''(0)=2>0$. Άρα το $\xi=0$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

<u>Παρατήρηση</u>. Αν $f'(\xi)=0$, η f έχει δεύτερη παράγωγο στο ξ και το ξ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου, τότε <u>δεν</u> συνεπάγεται ότι $f''(\xi)$ είναι θετικό ή αρνητικό:

$f(x)=x^4$. $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$

$f'(0)=f''(0)=0$, και το 0 είναι τοπικό ελάχιστο.

(2) Λέμε ότι μια συνάρτηση $y=f(x)$ ορισμένη στο διάστημα $a<x<b$ είναι κυρτή στο διάστημα αυτό αν ισχύει το εξής:

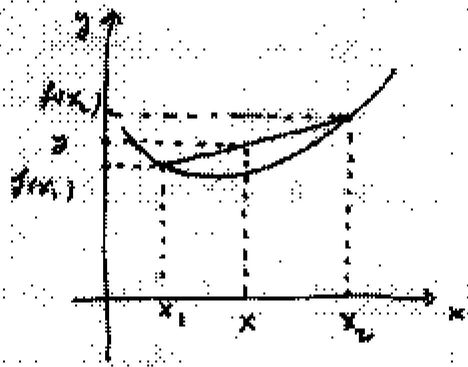


για οποιαδήποτε $x_1<x_2$ στο διάστημα (a,b) το κομμάτι του γραφήματος της $y=f(x)$, που αντιστοιχεί στο $x_1<x<x_2$, βρίσκεται "κάτω" από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$.

Αν στην προηγούμενη διατύπωση το "κάτω" γίνει "πάνω" τότε η συνάρτηση είναι κοίλη.

Θεώρημα. Έστω ότι η $y=f(x)$ έχει δεύτερη παράγωγο σε κάθε σημείο του διαστήματος $a<x<b$. Αν $f''(x)\geq 0$ για κάθε x στο (a,b), τότε η f είναι κυρτή.

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχόντα $x_1<x_2$ στο (a,b), και αρχικά θα βρούμε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$.



Η κλίση της είναι σταθερή: $\dfrac{y-f(x_2)}{x-x_2} = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

Άρα $y = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_2) + f(x_2)$ είναι η εξίσωση της ευθείας. Πρέπει τώρα να αποδείξουμε ότι, για κάθε x στο (x_1,x_2) ισχύει:

$$f(x) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_2) + f(x_2)$$

Θεωρούμε τη διαφορά:

$$H(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_2) + f(x_2) - f(x)$$

$$H'(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - f'(x)$$

$$H''(x) = -f''(x)$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορ. Λογισμού, υπάρχει ξ στο (x_1, x_2) ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, δηλαδή $H'(\xi)=0$.

Επίσης $H''(x) \le 0$ για κάθε x.

Άρα η $H'(x)$ είναι φθίνουσα στο (x_1, x_2). Έτσι

$H'(x) \ge 0$ για $x_1 < x < \xi$

$H'(x) \le 0$ για $\xi < x < x_2$

Δηλαδή η $H(x)$ είναι αύξουσα στο $[x_1, \xi]$ και φθίνουσα στο $[\xi, x_2]$. Όμως $H(x_1) = H(x_2) = 0$.

Άρα $H(x) \ge 0$ για $x_1 < x < x_2$.

Μια κυρτή συνάρτηση έχει μία ακόμα χαρακτηριστική ιδιότητα. Σε κάθε σημείο του γραφήματος που υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία, αυτή βρίσκεται "κάτω" από το γράφημα της f.

Αξίζει να προσπαθήσει ο αναγνώστης να αποδείξει ότι κάτι τέτοιο συμβαίνει όταν $f''(x) \ge 0$ σε κάθε σημείο του διαστήματος $a<x<b$.

Η απόδειξη μοιάζει με την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος.

Σημαντικές παράγωγοι

Τώρα θα υπολογίσουμε τρεις σημαντικές παραγώγους.

$$\boxed{\begin{array}{llll} \dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{x\log a}, & x>0 & (a>0,\ a\neq 1) \\[2ex] \dfrac{d}{dx}a^x = a^x\log a, & -\infty<x<+\infty & (a>0) \\[2ex] \dfrac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}, & 0<x<\infty, & \alpha \text{ άρρητος.} \end{array}}$$

Το περιεχόμενο αυτής της παραγράφου μπορεί να χωρισθεί στην εξέταση του υπολογισμού ορίων.

Γνωρίζουμε ότι $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, θα αποδείξουμε ότι

(1) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$

Πράγματι, αν $n=[x]$, τότε $n\le x<n+1$. Άρα, το x μεγαλώνει απεριόριστα αν και μόνον αν το n μεγαλώνει απεριόριστα:

$n\to+\infty$ αν και μόνον αν $x\to+\infty$.

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\Big/\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Οι δύο ακραίες ακολουθίες έχουν όριο e. Άρα και η ενδιάμεση λοιπόν έχει όριο e.

Επειδή η συνάρτηση $\log_a x$ είναι συνεχής για $x>0$, έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} x\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \log_a\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) =$$

$$= \log_a e = \frac{1}{\log a}.$$

Τώρα: $\lim_{h\to 0+} \dfrac{\log_\alpha(x+h)-\log_\alpha x}{h} = \lim_{h\to 0+} \dfrac{\log_\alpha\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} =$

$= \dfrac{1}{x}\lim_{h\to 0+} \dfrac{x}{h}\log_\alpha\left(1+\dfrac{1}{x/h}\right) = \dfrac{1}{x}\lim_{t\to+\infty} t\log_\alpha\left(1+\dfrac{1}{t}\right) =$

$= \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\log\alpha}$.

Παρομοίως μπορεί κανείς να αποδείξει ότι $\lim_{h\to 0-}\dfrac{\log_\alpha(x+h)-\log_\alpha x}{h} = \dfrac{1}{x\log\alpha}$.

Άρα $\dfrac{d}{dx}\log_\alpha x = \dfrac{1}{x\log\alpha}$

Η συνάρτηση $x=\alpha^y$ $(\alpha\neq 1)$ είναι αντίστροφη της $y=\log_\alpha x$.

Άρα $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{\frac{1}{x\log\alpha}} = x\log\alpha = \alpha^y\log\alpha$

Δηλαδή $\dfrac{d}{dy}\alpha^y = \alpha^y\log\alpha$.

Επίσης: $\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^\alpha-x^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0} x^\alpha\dfrac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha-1}{h} = x^{\alpha-1}\lim_{h\to 0}\dfrac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha-1}{\frac{h}{x}}$

$= x^{\alpha-1}\lim_{t\to 0}\dfrac{(1+t)^\alpha-1}{t}$

(Θέτουμε $h=\log(1+t)$).

$= x^{\alpha-1}\lim_{h\to 0}\dfrac{e^{\alpha h}-1}{e^h-1} = x^{\alpha-1}\lim_{h\to 0}\dfrac{\frac{e^{\alpha h}-1}{h}}{\frac{e^h-1}{h}}$

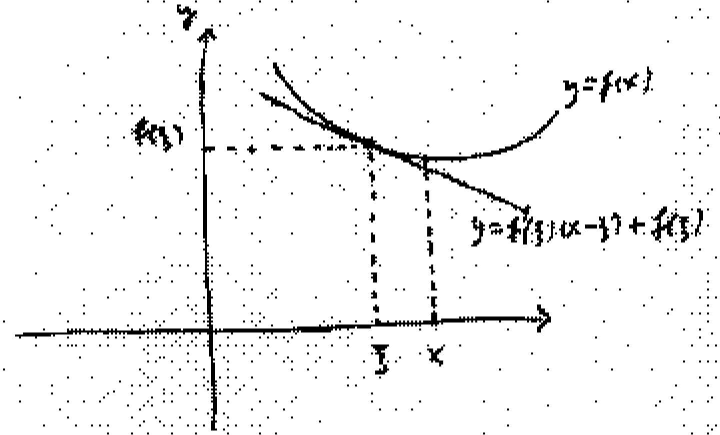
Όμως: $\lim_{h\to 0}\dfrac{e^{\alpha h}-1}{h} = \dfrac{d}{dx}(e^\alpha)^x\Big|_{x=0} = (e^\alpha)^x\log(e^\alpha)\Big|_{x=0} = \alpha$

$\lim_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h} = \dfrac{d}{dx}e^x\Big|_{x=0} = e^x\log e\Big|_{x=0} = 1$.

Άρα $\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^\alpha-x^\alpha}{h} = x^{\alpha-1}\cdot\dfrac{\alpha}{1} = \alpha x^{\alpha-1}$.

ΜΕΡΙΚΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ "ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ"

Α. Έχουμε αναφέρει ότι, αν μιά συνάρτηση $y=f(x)$ έχει παράγωγο σε ένα σημείο ξ, τότε υπάρχει ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και <u>εφάπτεται</u> στο σημείο αυτό με το γράφημα της $y=f(x)$. Επίσης, ότι η κλίση αυτής της ευθείας είναι ακριβώς ο αριθμός $f'(\xi)$.



Μπορούμε να γράψουμε, λοιπόν, την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας:

$$\frac{y-f(\xi)}{x-\xi}=f'(\xi),$$

$$y=f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi).$$

Αν το x πλησιάζει το ξ, τότε $\lim\limits_{x\to\xi}\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=f'(\xi)$,

$$\lim_{x\to\xi}\left(\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}-f'(\xi)\right)=0, \quad \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)-f'(\xi)(x-\xi)}{x-\xi}=0.$$

$$(*)\quad \lim_{x\to\xi}\frac{\left|f(x)-\left(f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi)\right)\right|}{|x-\xi|}=0$$

Ο αριθμητής εκφράζει την κατακόρυφη απόσταση των δύο γραφημάτων: της $y=f(x)$ και της εφαπτόμενης ευθείας $y=f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi)$ ακριβώς πάνω από το σημείο x.

Ο παρονομαστής είναι η απόσταση του x από το ξ.

Ένας άλλος τρόπος να δει κανείς αυτούς τους αριθμούς είναι ο εξής: ο αριθμητής είναι το <u>(απόλυτο) σφάλμα</u> όταν, αντί για την τιμή της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x, θεωρήσουμε την τιμή που δίνει στο x η γραμμική συνάρτηση $y = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi)$.

(Γραμμική συνάρτηση είναι μια συνάρτηση της μορφής $y = ax + b$, δηλαδή όταν το διάγραμμά της είναι ευθεία γραμμή).

Ο παρονομαστής είναι απλώς το σφάλμα (απόλυτο) όταν, αντί για το ξ, παίρνουμε ένα κοντινό σημείο x.

Προσέξτε ότι και οι δύο συναρτήσεις $y = f(x)$, $y = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi)$ έχουν την ίδια τιμή όταν $x = \xi$. Άρα το σφάλμα που προκύπτει από την αντικατάσταση της μιας από την άλλη όταν $x = \xi$ είναι 0.

Τώρα το όριο ⊛ μας λέει ότι όσο το x έρχεται κοντύτερα στο ξ, το σφάλμα από την αντικατάσταση της $f(x)$ από την $f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi)$ είναι όλο και πιο αμελητέο σχετικά με το σφάλμα $|x-\xi|$. (Δηλαδή, το πηλίκο τους είναι όλο και μικρότερο)

Παράδειγμα : $f(x) = x^2$, $\xi = 1$

$$\frac{|x^2 - (1 + 2(x-1))|}{|x-1|} = \frac{|x-1|^2}{|x-1|} = |x-1|$$

Αν λοιπόν το x πάρει τις διαδοχικές τιμές 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001, ..., τότε το πηλίκο των δύο σφαλμάτων γίνεται αντίστοιχα : 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, ...

Ή, αλλιώς : το σφάλμα των τιμών y είναι αντίστοιχα : $|x^2 - (1 + 2(x-1))| = |x-1|^2 =$

0.01, 0.0001, 0.000001, 0.00000001, ...

Δηλαδή : σφάλμα στις τιμές x της τάξης του $\frac{1}{10^n}$ προκαλεί σφάλμα στις τιμές y της τάξης του $\frac{1}{10^{2n}}$, το οποίο θεωρείται αμελητέο σε σχέση με το $\frac{1}{10^4}$ (Το απόλυτο του $\to 0$).

Μπορούμε λοιπόν να γράφουμε

$$\boxed{f(x) \approx f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi)\,, \quad \text{όταν το } x \text{ είναι πολύ κοντά στο } \xi,}$$

καταλαβαίνοντας ότι δεν ισχύει η ισότης, αλλά ότι το σφάλμα είναι πολύ-πολύ μικρό σε σχέση με την απόσταση $|x-\xi|$.

Παραδείγματα (1) Υπολογίστε προσεγγιστικά την τιμή $\sqrt{4.001}$.

$f(x)=\sqrt{x}$, $\xi = 4$, $x = 4.001$

$$\sqrt{4.001} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}\cdot 0.001 = 2.00025 .$$

(Αν θέλουμε να πάρουμε μια ιδέα για το πόσο ακριβής είναι η τιμή 2.00025 της $\sqrt{4.001}$ μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$0 < \sqrt{4.001} - 2.00025 = \frac{(\sqrt{4.001})^2 - (2.00025)^2}{\sqrt{4.001}+2.00025} = \frac{0.0000000625}{\sqrt{4.001}+2.00025}$$

$$< \frac{0.0000000625}{2+2} < 0.0000000157 .$$

Άρα έχουμε ακρίβεια τουλάχιστον $7^{ου}$ δεκαδικού ψηφίου, και, επομένως, και τα 7 δεκαδικά ψηφία του 2.0002500 είναι ακριβή).

(2) Υπολογίστε προσεγγιστικά την τιμή $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0.01\right)$.

$f(x) = \sin x$, $\xi = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{6}+0.01$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+0.01\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot 0.01 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, 0.01 .$$

Επιπρόσθετο σφάλμα θα δημιουργηθεί στην αντικατάσταση του $\sqrt{3}$ με πεπερασμένη δεκαδική προσέγγισή του.

B. Ο τύπος του Taylor.

Εδώ θα δούμε με άλλο διαφορετικό τρόπο το ζήτημα της προσέγγισης της $f(x)$. Στην προηγούμενη παράγραφο καταλήξαμε στον τύπο

$$f(x) \approx f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) \quad , \text{ όταν το } x \text{ είναι κοντά στο } \xi .$$

Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε μία ισότητα για το σφάλμα, δηλαδή: $f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + (\,;\,)$. Και θα αποδείξουμε ότι, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις,

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + (\text{κάποιος συντελεστής})\,(x-\xi)^2 .$$

Δίνοντας έτσι πιο συγκεκριμένη μορφή στον συντελεστή του $(x-\xi)^2$.

Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + A(x-\xi)^2$ με σταθερά ξ, x και κάποιο (άγνωστο) A.

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(t) = f(t) - \left(f(\xi) + f'(\xi)(t-\xi) + A(t-\xi)^2 \right)$$

Τότε: $g'(t) = f'(t) - \left(f'(\xi) + 2A(t-\xi) \right)$

$$g''(t) = f''(t) - 2A$$

Παρατηρούμε ότι: $g(\xi) = 0$, $g'(\xi) = 0$

και $g(x) = 0$

Από $g(\xi) = g(x) = 0$, με εφαρμογή του Θεωρ. Rolle, υπάρχει κάποιο μ ανάμεσα στα ξ, x , ώστε $g'(\mu) = 0$.

Από $g'(\xi) = g'(\mu) = 0$, με εφαρμογή του Rolle, υπάρχει κάποιο η ανάμεσα στα ξ, μ (άρα και ανάμεσα στα ξ, x), ώστε $g''(\eta) = 0$. Άρα $f''(\eta) - 2A = 0$, $A = \dfrac{f''(\eta)}{2}$

Έτσι καταλήξαμε στον υπολογισμό του αγνώστου $A = \dfrac{f''(\eta)}{2}$, για κάποιο η ανάμεσα στα ξ, x.

Προφανώς, για να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Rolle, χρειαζόμαστε την συνέχεια της f και της f' στο διάστημα $[\xi, x]$ και την ύπαρξη της f'' στο (ξ, x).

Ο τύπος

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{f''(\eta)}{2}(x-\xi)^2,$$

με $\xi < \eta < x$ ή $x < \eta < \xi$

ονομάζεται <u>τύπος του Taylor με τετραγωνικό σφάλμα</u>.

Μπορούμε με ελάχιστο παραπάνω κόπο να αποδείξουμε ανάλογο τύπο με κυβικό σφάλμα. Δηλαδή, ψάχνουμε μιά σταθερά A ώστε

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-\xi)^2 + A(x-\xi)^3.$$

Κρατάμε λοιπόν σταθερά τα x, ξ και A, και θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(t) = f(t) - \left(f(\xi) + f'(\xi)(t-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2}(t-\xi)^2 + A(t-\xi)^3 \right)$$

Τότε: $g'(t) = f'(t) - \left(f'(\xi) + f''(\xi)(t-\xi) + 3A(t-\xi)^2 \right)$

$g''(t) = f''(t) - \left(f''(\xi) + 6A(t-\xi) \right)$

$g'''(t) = f'''(t) - 6A$

Παρατηρούμε ότι: $g(\xi) = 0$, $g'(\xi) = 0$, $g''(\xi) = 0$

και $g(x) = 0$.

Αφού $g(\xi) = g(x) = 0$, υπάρχει (λόγω Rolle) κάποιο μ ανάμεσα στα ξ, x ώστε: $g'(\mu) = 0$

Αφού $g'(\xi) = g'(\mu) = 0$, υπάρχει (λόγω Rolle) κάποιο η ανάμεσα στα ξ, μ (δηλαδή ανάμεσα στα ξ, x) ώστε: $g''(\eta) = 0$.

Αφού $g''(\xi) = g''(\eta) = 0$, υπάρχει (λόγω Rolle) κάποιο ν ανάμεσα στα ξ, η (δηλαδή, ανάμεσα στα ξ, x) ώστε: $g'''(\nu) = 0$.

$\xi \quad \nu \quad \eta \quad \mu \quad x$ ή $x \quad \mu \quad \eta \quad \nu \quad \xi$

Άρα $f'''(\nu) - 6A = 0$, $A = \frac{f'''(\nu)}{6}$.

Έτσι έχουμε :

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-\xi)^2 + \frac{f'''(\nu)}{6}(x-\xi)^3 ,$$

για κάποιο ν ανάμεσα στα ξ, x.

Αυτός είναι ο τύπος του Taylor με κυβικό σφάλμα.

Και για να δουλέψει η απόδειξη χρειάζεται οι f, f', f'' να είναι συνεχείς στο $[\xi, x]$ και η f''' να υπάρχει στο (ξ, x).

Γενικά έχουμε το ακόλουθο

Θεώρημα Αν οι $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ είναι συνεχείς στο διάστημα $[\xi, x]$ (ή $[x, \xi]$) και η $f^{(n)}$ υπάρχει στο (ξ, x) (ή (x, ξ)) τότε :

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\nu)}{n!}(x-\xi)^n ,$$

για κάποιον ν ανάμεσα στα x, ξ.

Ο τύπος αυτός είναι ο γενικός τύπος Taylor.

Η απόδειξη του τύπου αυτού είναι ακριβώς ίδια με τις περιπτώσεις που είδαμε : $n=2$, $n=3$. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης σίγουρα θα την κατασκευάσει !

Παρατήρηση Για $n=1$ ο τύπος του Taylor γίνεται :

$$f(x) = f(\xi) + f'(\nu)(x-\xi) \quad \text{ή} \quad \frac{f(x) - f(\xi)}{x-\xi} = f'(\nu) ,$$

για κάποιο ν ανάμεσα στα ξ, x.

Αυτό είναι ταυτόσημο με το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορ. Λογισμού!

Παράδειγμα (1) Έστω $f(x) = (\text{πολυώνυμο βαθμού } m) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$.

Τότε $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + m a_m x^{m-1}$, $f''(x) = 2a_2 + 2\cdot 3 a_3 x + \dots + m(m-1) x^{m-2}$,

$f^{(3)}(x) = 2\cdot 3\, a_3 + 2\cdot 3\cdot 4\, a_4 x + \dots + m(m-1)(m-2) x^{m-3}, \dots,$

$f^{(m-1)}(x) = 2\cdot 3 \cdots (m-1)\, a_{m-1} + m(m-1)\cdots 2\cdot x$

$f^{(m)}(x) = 2\cdot 3 \cdots (m-1) m\, a_m$

$f^{(m+1)}(x) = 0$, $f^{(m+2)}(x) = 0$, ...

Άρα, αν εφαρμόσουμε τον τύπο του Taylor για $n = m$, παίρνουμε:

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 + \dots + \frac{f^{(m-1)}(\xi)}{(m-1)!}(x-\xi)^{m-1} + \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(x-\xi)^m.$$

(Προσέξτε: ενώ έπρεπε να είναι γραμμένο $f^{(m)}(\nu)$, εμφανίζεται το $f^{(m)}(\xi)$. Αυτό δεν πειράζει, διότι η $f^{(m)}$ είναι σταθερή συνάρτηση)

Ο τύπος του Taylor για πολυώνυμα (που μόλις γράψαμε) είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί κατ' ευθείαν ως εξής:

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m = a_0 + a_1[(x-\xi)+\xi] + a_2[(x-\xi)+\xi]^2 +$

$+ \dots + a_m[(x-\xi)+\xi]^m = ($ μετά από ανάπτυξη σε δυνάμεις του $(x-\xi)$ $) = b_0 + b_1(x-\xi) + b_2(x-\xi)^2 + \dots + b_m(x-\xi)^m$,

με "κάποιους" συντελεστές $b_0, b_1, \dots, b_m$.

Θέτουμε $x = \xi$: $\underline{f(\xi) = b_0}$.

$f'(x) = b_1 + 2b_2(x-\xi) + \dots + m b_m (x-\xi)^{m-1}$

Θέτουμε $x = \xi$: $\underline{f'(\xi) = b_1}$

$f''(x) = 2b_2 + 2\cdot 3\cdot b_3 (x-\xi) + \dots + m(m-1) b_m (x-\xi)^{m-2}$

Θέτουμε $x = \xi$: $\underline{f''(\xi) = 2b_2 = 2!\, b_2}$

$f'''(x) = 2\cdot 3\, b_3 + 2\cdot 3\cdot 4\, b_4 (x-\xi) + \dots + m(m-1)(m-2) b_m (x-\xi)^{m-3}$

Θέτουμε $x = \xi$: $\underline{f'''(\xi) = 2\cdot 3\, b_3 = 3!\, b_3}$

κ.ο.κ.

(2) Υπολογίστε προσεγγιστικά το $\sqrt{4.001}$ χρησιμοποιώντας τον τύπο του Taylor για τη συνάρτηση $y=\sqrt{x}$, με $\xi=4$ και $n=3$. Βρείτε μια εκτίμηση για το σφάλμα.

$$f(x)=\sqrt{x}\ ,\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ ,\quad f''(x)=-\frac{1}{4x^{3/2}}\ ,\quad f'''(x)=\frac{3}{8x^{5/2}}\ .$$

$$\sqrt{4.001}=\sqrt{4}+\frac{1}{2\sqrt{4}}\,0.001-\frac{1}{4\cdot4^{3/2}}\cdot\frac{(0.001)^2}{2!}+\frac{3}{8\cdot v^{5/2}}\cdot\frac{(0.001)^3}{3!}$$

με $4<v<4.001$.

$$=2.000250015625+\frac{0.000000001}{16\cdot v^{5/2}}$$

Το σφάλμα είναι $\dfrac{0.000000001}{16\cdot v^{5/2}}<\dfrac{0.000000001}{16\cdot 4^{5/2}}=$

$$=1.953125\cdot10^{-12}<2\cdot10^{-12}$$

(3) Χρησιμοποιώντας τον τύπο Taylor της $f(x)=\cos^2x$ με $n=3$, $\xi=0$ βρείτε πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού που προσεγγίζει την $f(x)$ στο διάστημα $-1\le x\le 1$ και εκτιμήστε το σφάλμα.

$f(x)=\cos^2x$, $f'(x)=-2\sin x\cos x$, $f''(x)=2\sin^2x-2\cos^2x$,

$f'''(x)=8\sin x\cos x$

$f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-2$

$$\cos^2x=1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{8\sin v\cos v}{3!}x^3\ ,\quad \text{με } -1\le x<v<0 \text{ ή } 0<v<x\le 1.$$

Το σφάλμα: $\left|\dfrac{8\sin v\cos v}{3!}x^3\right|=\left|\dfrac{4\sin(2v)}{3!}x^3\right|\le\dfrac{4}{3!}|2v|\,|x|^3\le\dfrac{4}{3}x^4$

και το πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού: $1-x^2$

Γ. Σειρές Taylor

Καταρχήν θα μιλήσουμε γενικά για την έννοια της σειράς. Όταν μας δοθεί μια ακολουθία αριθμών a_n, $n=1,2,3,\dots$ (καμμιά φορά ο δείκτης αρχίζει από το 0, $n=0,1,2,3,\dots$), ονομάζουμε σειρά των a_n τον διαδοχικό άθροισμα των όρων της a_n.

Δηλαδή :

$$a_1\,,\ a_1+a_2\,,\ a_1+a_2+a_3\,,\ \dots\,,\ a_1+a_2+\dots+a_n\,,\ \dots$$

ή, αν αρχίζει ο δείκτης από το 0 :

$$a_0\,,\ a_0+a_1\,,\ a_0+a_1+a_2\,,\ \dots\,,\ a_0+a_1+\dots+a_n\,,\ \dots$$

Αν αυτή η διαδικασία συγκλίνει σε κάποιον αριθμό, δηλαδή αν

$$(a_0+)a_1+a_2+\dots+a_n \longrightarrow s\,,$$

τότε λέμε ότι <u>η σειρά των a_n συγκλίνει στον s</u> ή ότι <u>η σειρά των a_n έχει άθροισμα s</u>.

Αν $(a_0+)a_1+a_2+\dots+a_n \longrightarrow +\infty$ ή $-\infty$, τότε λέμε ότι <u>η σειρά των a_n αποκλίνει στο $+\infty$ ή $-\infty$</u> αντιστοίχως.

Αν η $(a_0+)a_1+a_2+\dots+a_n$ δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό τότε λέμε ότι <u>η σειρά των a_n αποκλίνει</u>.

Τις τρεις περιπτώσεις συμβολίζουμε :

$$(a_0+)a_1+a_2+\dots+a_n+\dots = s$$

$$(a_0+)a_1+a_2+\dots+a_n+\dots = +\infty \text{ ή } -\infty$$

$$(a_0+)a_1+a_2+\dots+a_n+\dots \quad \text{αποκλίνει}$$

<u>Παρατ</u>: Αν θυμηθούμε (σελ. 29) την "γεωμετρική σειρά".

$$1+q+q^2+\dots+q^n+\dots = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}\,, & \text{όταν} \quad -1<q<1 \\ +\infty\,, & \text{όταν} \quad 1\le q \\ \text{αποκλίνει}\,, & \text{όταν} \quad q\le -1\,. \end{cases}$$

Εδώ δεν θα επεκταθούμε σε γενικότερη και διεξοδικότερη συζήτηση περί σειρών. Θα δούμε όμως πώς από ορισμένες συναρτήσεις μπορούμε, με την βοήθεια του τύπου του Taylor, να καταλήξουμε σε κάποιες χαρακτηριστικές σειρές.

Γνωρίζουμε ότι αν η συνάρτηση $y=f(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\xi, x]$ (ή $[x,\xi]$) τότε, για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό n ισχύει:

$$f(x) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-\xi)^{n},$$

για κάποιο c μεταξύ των ξ, x.

Πρέπει σ' αυτό το σημείο να τονίσουμε ότι ο αριθμός c εξαρτάται από το n.

Αν το "σφάλμα" $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-\xi)^{n}$ συγκλίνει στο 0 καθώς το $n \to +\infty$ (και τα x, ξ μένουν αμετάβλητα) τότε ισχύει ότι:

$$f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1} \longrightarrow f(x), \quad n \to +\infty$$

Άρα, με τον συμβολισμό που γνωρίσαμε πριν λίγο:

$$f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1} + \dots = f(x).$$

Λέμε τότε ότι, για τα δεδομένα ξ και x, η σειρά $f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \dots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^{n} + \dots$ είναι η <u>σειρά Taylor της $f(x)$</u> και ότι συγκλίνει στο $f(x)$.

<u>Παραδείγματα</u>: (1) $f(x) = e^{x}$, $\xi = 0$.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}(x-0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-0)^{n}$$

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + e^{c}\frac{x^{n}}{n!}, \quad 0<c<x \text{ ή } x<c<0.$$

$$|\text{"σφάλμα"}| = e^{c}\frac{|x|^{n}}{n!}$$

Το e^{c} δεν είναι σταθερό, διότι το c εξαρτάται από το n.

Όμως, αν $0<c<x$, τότε $e^{c} < e^{x}$. Και αν $x<c<0$,

τότε $e^c < 1$. Άρα σε κάθε περίπτωση το e^c είναι φραγμένο από μία σταθερή ποσότητα (e^x ή 1). Επίσης, $\frac{|x|^n}{n!} \to 0$.
(Δες σελ. 31). Άρα το "σφάλμα" τείνει στο 0, και έτσι έχουμε

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad , \text{ γιά κάθε } x.}$$

(2) $f(x) = \sin x$, $\xi = 0$.

$f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$
$f^{(4)}(x) = \sin x$, $f^{(5)}(x) = \cos x$, $f^{(6)}(x) = -\sin x$, $f^{(7)}(x) = -\cos x$
. . . .

Παρατηρούμε ότι οι παράγωγοι της $\sin x$ είναι (αρχίζοντας με την "μηδενική" παράγωγο) $\sin x, \cos x, -\sin x, -\cos x$ και μετά αρχίζουν και επαναλαμβάνονται με την ίδια σειρά.

Όταν $x=0$ τότε οι διαδοχικές παράγωγοι έχουν τις τιμές:
$0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$

Άρα, γιά κάθε φυσικό αριθμό n

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n.$$

Το $f^{(n)}(c)$ ισούται με $\pm \sin c$ (αν n = άρτιος), είτε με $\pm \cos c$ (αν n = περιττός). Άρα:

$$|\text{"σφάλμα"}| \le \frac{|x|^n}{n!} \to 0 \quad (\text{για σταθερό } x).$$

και

$$\boxed{\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad , \text{ γιά κάθε } x}$$

Ομοίως

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad , \text{ γιά κάθε } x}$$

(3) $f(x) = \log(1+x)$, $\xi = 0$.

$f'(x) = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3}$, $f^{(4)}(x) = -2\cdot 3(1+x)^{-4}$,

$f^{(5)}(x) = 2\cdot 3\cdot 4\,(1+x)^{-5}$, ... , $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\, 2\cdot 3 \cdots (n-1)\,(1+x)^{-n}$, ...

Για $x=0$: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f^{(3)}(0) = 2$, ...

... , $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\, 2\cdot 3 \cdots (n-1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

Άρα

$$\log(1+x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{3!}{4!}x^4 + \dots + (-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{(n-1)!}x^{n-1}$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!\,(1+c)^{-n}}{n!}x^n$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+c}\right)^n$$

με $0 < c < x$ ή $x < c < 0$.

Αν τώρα περιοριστούμε σε τιμές του x με $0 < x \le 1$,

τότε $0 \le \frac{x}{1+c} \le 1$. Άρα : $|$"υπόλοιπο"$| = \frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+c}\right)^n \le \frac{1}{n} \to 0$.

και

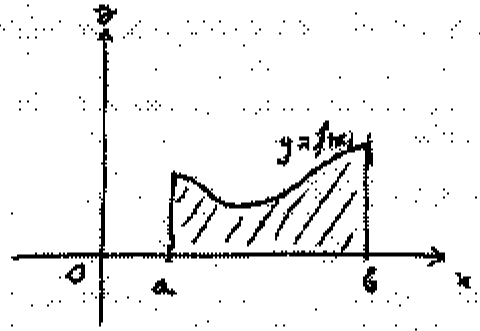
$$\boxed{\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots \quad \text{για} \quad 0 < x \le 1}$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η ειδική περίπτωση $x = 1$:

$$\boxed{\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots}$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ "RIEMANN"

Όταν μας δίνουν μιαν καμπύλη στο επίπεδο, η οποία περικλείει στο εσωτερικό της ένα τμήμα του επιπέδου και το <u>εμβαδόν</u> αυτού του τμήματος θέλουμε να μετρήσουμε, τότε, κόβοντάς το σε μικρότερα κομμάτια (με οριζόντιες και κάθετες γραμμές), ανάγόμαστε στην στοιχειώδη περίπτωση όπου έχουμε να βρούμε το εμβαδό του παρακάτω σχήματος:

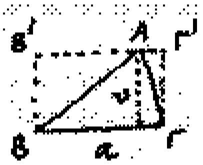


Το σχήμα αυτό περικλείεται ανάμεσα στις κάθετες γραμμές $x=a$ και $x=b$, στον άξονα xx' και στο γράφημα μιας συνάρτησης $y=f(x)$. (με $f(x) \geq 0$ για $a \leq x \leq b$).

Το μόνο εμβαδόν που μπορεί να υπολογισθεί στοιχειωδώς είναι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου:

$E = ab =$ βάση · ύψος

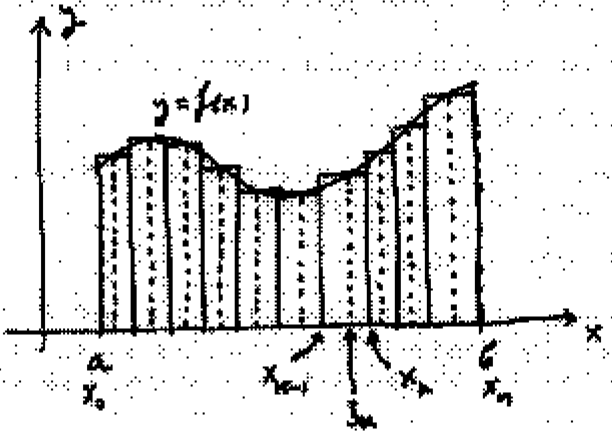
Το εμβαδόν τριγώνου ανάγεται εύκολα στην γνωστή περίπτωση του ορθογωνίου:



$E(AB\Gamma) = \frac{1}{2} E(B'\Gamma'\Gamma B) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \upsilon$

Επίσης το εμβαδό οποιουδήποτε πολυγωνικού σχήματος υπολογίζεται (σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων) αν το πολύγωνο χωρισθεί σε τρίγωνα.

Όμως το εμβαδόν καμπυλόγραμμου σχήματος απαιτεί μια "άπειρη" διαδικασία χωρισμού σε όλο και μικρότερα ορθογώνια, η οποία, παρ' όλον τον "προχωρημένο" χαρακτήρα της, ήταν γνωστή από την αρχαιότητα. Η ιδέα είναι η εξής: (1) χωρίζω το διάστημα $[a, b]$



σε πολλά και πολύ μικρά διαστήματα. Αυτό γίνεται αν διαλέξω έναν φυσικό αριθμό n (συνήθως μεγάλο) και κατόπιν διαλέξω σημεία διαδοχικά αρχίζοντας με $x_0 = a$ (πάντοτε το αριστερό άκρο του $[a,b]$) και στην συνέχεια $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$ και τελειώνοντας με $x_n = b$ (πάντοτε το δεξί άκρο του $[a,b]$).

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b .$$

Σχηματίζονται τότε n διαστήματα:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

Το k διάστημα είναι το $[x_{k-1}, x_k]$, $1 \leq k \leq n$.

(Αν $n = 1$, τότε έχω μόνον ένα διάστημα $[x_0, x_1] = [a, b]$.)

Η επιλογή των σημείων $x_0, x_1, \dots, x_n$ αποτελεί μιά <u>διαμέριση</u> του $[a,b]$.

Είναι προφανές ότι το $[a,b]$ επιδέχεται άπειρες διαμερίσεις: κατ' αρχήν υπάρχει ελευθερία ως προς το πλήθος n των διαστημάτων, και κατόπιν υπάρχει ελευθερία ως προς τα "διαιρετικά" σημεία $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ (αρκεί, βεβαίως, να βρίσκονται στην σωστή σειρά).

Το ζητούμενο εμβαδό είναι, προφανώς, το άθροισμα των εμβαδών των μικρότερων παραλληλογράμμων (πάλι) σχημάτων που περικλείονται ανάμεσα στον άξονα x, την καμπύλη $y=f(x)$ και τις διαδοχικές κάθετες ευθείες $x=x_{k-1}$, $x=x_k$.

Επειδή, όμως, το διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ είναι αρκετά μικρό, η μεταβολή ύψους της $y=f(x)$ <u>δεν είναι πολύ μεγάλη</u> όταν το x μεταβάλλεται από x_{k-1} μέχρι x_k. Άρα το καμπυλόγραμμο αυτό σχήμα "μοιάζει" με ορθογώνιο.

(2) Διαλέγω σε κάθε διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ ένα <u>"ενδιάμεσο" σημείο ξ_k</u> : $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$. Θεωρώ το αντίστοιχο ύψος $f(\xi_k)$ και το ορθογώνιο με βάση το $[x_{k-1}, x_k]$ και αυτό το ύψος. Το εμβαδόν αυτού του ορθογωνίου είναι

$$f(\xi_k)\cdot(x_k - x_{k-1})$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι <u>περίπου</u> το άθροισμα όλων αυτών των εμβαδών των λεπτών ορθογωνίων:

$$E \simeq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) .$$

Είναι προφανές ότι για κάθε διαμέριση του $[a,b]$ υπάρχουν άπειρες επιλογές ενδιάμεσων σημείων $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$: το ξ_k είναι <u>οποιοδήποτε</u> σημείο του $[x_{k-1}, x_k]$. Συνήθως το ξ_k επιλέγεται σαν ένα από τα άκρα $\xi_k = x_{k-1}$ ή $\xi_k = x_k$, αλλά αυτό δεν είναι αναγκαστικό.

Το άθροισμα $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ ονομάζεται <u>άθροισμα Riemann</u> που αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη διαμέριση και στην συγκεκριμένη επιλογή ενδιάμεσων σημείων.

Όσο το πλάτος η των διαστημάτων μειώνεται και όσο τα διαδοχικά διαστήματα γίνονται μικρότερα, περιμένουμε το άθροισμα Riemann να προσεγγίζει όλο και περισσότερο το ζητούμενο εμβαδόν.

<u>Ορισμός</u> Έστω συνάρτηση $y=f(x)$ ορισμένη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν υπάρχει κάποιος αριθμός A, τον οποίον προσεγγίζουν απεριόριστα τα αθροίσματα Riemann της συνάρτησης καθώς <u>το πλήθος</u> των διαμεριστικών σημείων τους αυξάνει και καθώς <u>το μήκος</u> των διαστημάτων μικραίνουν, τότε λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι <u>ολοκληρώσιμη</u> στο $[\alpha,\beta]$ ή ότι <u>έχει ολοκλήρωμα</u> στο $[\alpha,\beta]$. Σ' αυτήν την περίπτωση ο αριθμός A λέγεται <u>ολοκλήρωμα της f στο $[\alpha,\beta]$</u> και συμβολίζεται

$$A = \int_a^b f(x)dx .$$

Με άλλα λόγια, πρέπει

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \longrightarrow 0 ,$$

καθώς το $n \to +\infty$ και το $\max\limits_{1\le k\le n}(x_k - x_{k-1}) \longrightarrow 0$

(δηλ. το πλήθος n των διαστημάτων τείνει στο $+\infty$, και το μήκος του μεγαλύτερου διαστήματος της διαμέρισης τείνει στο 0).

<u>Παρατήρηση</u>: Προσέξτε ότι δεν παίζει ρόλο ποιά ακριβώς είναι η συγκεκριμένη διαμέριση και ποιά είναι η επιλογή ενδιάμεσων σημείων. Για να έχει η f ολοκλήρωμα θα πρέπει η (απόλυτη) διαφορά

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right|$$

να είναι όσο θέλουμε μικρή ($<\varepsilon$) αρκεί το n να είναι αρκετά μεγάλο και το $\max\limits_{1\le k\le n}(x_k - x_{k-1})$ να είναι αρκετά μικρό <u>ανεξάρτητα</u> από την συγκεκριμένη θέση των

$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ και των $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Σ' αυτό το μάθημα δεν θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις που δεν έχουν ολοκλήρωμα. Είναι όμως σημαντικό να διαλύσει η οποιαδήποτε εντύπωση ότι κάθε συνάρτηση έχει ολοκλήρωμα! Γι αυτό το πρώτο μας παράδειγμα είναι το:

<u>Παράδειγμα</u>
$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } x = \text{ρητός}, \ 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \text{αν } x = \text{άρρητος}, \ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Η f είναι ορισμένη σε κάθε σημείο του διαστήματος $[0,1]$.

Θα δούμε ότι η f <u>δεν</u> έχει ολοκλήρωμα.

Ας διαλέξουμε οποιαδήποτε διαμέριση $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$, με <u>οσοδήποτε μεγάλο n</u> και <u>οσοδήποτε μικρά διαστήματα</u>. Αν η f έχει ολοκλήρωμα τότε θα πρέπει, <u>ανεξάρτητα</u> από την επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\xi_1, \dots, \xi_n$, το άθροισμα Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

να προσεγγίζει <u>έναν αριθμό</u> (το ολοκλήρωμα της f).

Θυμόμαστε όμως ότι σε κάθε διάστημα, οσοδήποτε μικρό, υπάρχουν και ρητοί και άρρητοι αριθμοί. Αν σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ επιλέξουμε ξ_k <u>ρητό</u>, τότε το αντίστοιχο άθροισμα Riemann γίνεται

$$\sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 1.$$

Ενώ, αν σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ επιλέξουμε ξ_k <u>άρρητο</u>, τότε το αντίστοιχο άθροισμα Riemann γίνεται

$$\sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0.$$

Άρα τα αθροίσματα Riemann δεν γίνεται να προσεγγίζουν έναν αριθμό, αφού παίρνουν τιμές 1 και 0 ανάλογα με την επιλογή ενδιάμεσων σημείων.

Αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση $y=f(x)$, $a\le x\le b$, είναι ολοκληρώσιμη τότε μπορούμε να βρούμε το ολοκλήρωμά της $\int_a^b f(x)dx$ διαλέγοντας κατάλληλες διαμερίσεις και κατάλληλα ενδιάμεσα σημεία. Χωρίς να χρειάζεται να θεωρήσουμε <u>όλες</u> τις επιλογές διαμερίσεων και ενδιαμέσων σημείων. Συνήθως (αλλά όχι πάντοτε) διαλέγουμε διαμερίσεις σε <u>ίσα υπο-τμήματα</u>, δηλ., αν n είναι το πλήθος των διαστημάτων, τότε

$$x_0=a,\ x_1=a+\frac{b-a}{n},\ \dots,\ x_k=a+k\frac{b-a}{n},\ \dots,\ x_{n-1}=a+(n-1)\frac{b-a}{n},$$

$$x_n=a+n\cdot\frac{b-a}{n}=b$$

Επίσης, στα ενδιάμεσα σημεία διαλέγουμε (όχι πάντοτε) τα αριστερά ή τα δεξιά άκρα, δηλ. $\xi_k=x_{k-1}$ ή $\xi_k=x_k$.

Το επόμενο θεώρημα μας εξοπλίζει με δύο μεγάλες κατηγορίες ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Την απόδειξή του παραλείπουμε.

<u>Θεώρημα</u> (α) Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ τότε είναι ολοκληρώσιμη.

(β) Αν η f είναι μονότονη (αύξουσα ή φθίνουσα) τότε είναι ολοκληρώσιμη.

Το επόμενο θεώρημα παρέχει στοιχειώδεις τρόπους να δημιουργούμε ολοκληρώσιμες συναρτήσεις από ήδη γνωστές.

<u>Θεώρημα</u> (α) Αν η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και λ είναι σταθερός αριθμός, τότε η $\lambda f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx .$$

(β) Αν οι $f(x)$, $g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$, τότε και η $f(x)+g(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx .$$

(γ) Αν οι $f(x), g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha,\beta]$, τότε και η $f(x)g(x)$ είναι ολοκληρώσιμη.

(δ) Αν η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και στο $[\beta,\gamma]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\gamma]$ και

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx .$$

<u>Παρατηρήσεις</u> (1) Συνδυασμοί των (α), (β) και επαγωγή δίνουν, για πεπερασμένο πλήθος συναρτήσεων και αριθμών:

$$\int_\alpha^\beta (\lambda f(x) + \mu g(x) + \nu h(x) + \dots)\,dx =$$
$$= \lambda \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \mu \int_\alpha^\beta g(x)\,dx + \nu \int_\alpha^\beta h(x)\,dx + \dots$$

(2) Στην περίπτωση (γ) δεν υπάρχει τύπος που να συνδέει το

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)\,dx \quad \text{με τα} \quad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx ,\ \int_\alpha^\beta g(x)\,dx .$$

(3) Συνδυασμός του (δ) με το προηγούμενο θεώρημα πλουτίζει περισσότερο το απόθεμα των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων:
αν η $f(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ είναι "κατά τμήματα συνεχής" ή "κατά τμήματα μονότονη" τότε είναι ολοκληρώσιμη.

Η $f(x)$ είναι κατά τμήματα συνεχής ή κατά τμήματα μονότονη αν το $[\alpha,\beta]$ μπορεί να χωριστεί σε <u>πεπερασμένο</u> πλήθος διαστημάτων $[\alpha,\gamma], [\gamma,\delta], \dots [\lambda,\kappa], [\kappa,\beta]$ ώστε σε καθένα διάστημα να είναι συνεχής ή μονότονη.

Τότε η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη σε καθένα από αυτά τα διαστήματα, άρα και στην ένωσή τους (με επαγωγή).

<u>Απόδειξη του Θεωρήματος</u> (όχι αυστηρή)

(α) Θεωρούμε το τυχόν άθροισμα Riemann της $\lambda f(x)$:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \lambda \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Αν η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε, αν η διαμέριση έχει αρκετά μικρά υποδιαστήματα, το δεύτερο άθροισμα προσεγγίζει τον αριθμό $\int_a^b f(x)\,dx$. Άρα το άθροισμα Riemann της $\lambda f(x)$ προσεγγίζει τον αριθμό $\lambda \int_a^b f(x)\,dx$. Έτσι η $\lambda f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

(β) Όμοια τα αθροίσματα Riemann της $f(x)+g(x)$:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(f(\xi_k) + g(\xi_k)\right)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Αφού οι $f(x)$, $g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες, τα δύο τελευταία αθροίσματα προσεγγίζουν τα $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ αντίστοιχα. Άρα το άθροισμα Riemann της $f(x)+g(x)$ προσεγγίζει τον αριθμό

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Επομένως η $f(x)+g(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

(γ) Παραλείπεται.

(δ) Παραλείπεται.

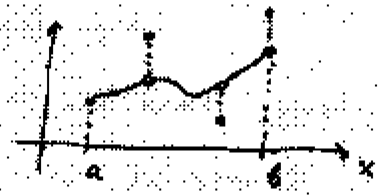
Επίσης χρήσιμο είναι και το ακόλουθο θεώρημα, του οποίου την απόδειξη θα παραλείψουμε.

<u>Θεώρημα</u> (α) Αν η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε

είναι ολοκληρώσιμη και σε οποιοδήποτε υποδιάστημα $[\gamma, \delta]$ $(\alpha \le \gamma < \delta \le \beta)$.

(β) Αν η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$, αυτή παραμένει ολοκληρώσιμη αν αλλάξουν οι τιμές της σε πεπερασμένα σημεία του διαστήματος. Το δε ολοκλήρωμα παραμένει ίδιο.

<u>Παράδειγμα</u>: Η συνάρτηση με γράφημα:



είναι ολοκληρώσιμη, διότι προέρχεται με αλλαγή τιμών σε τρία σημεία από την <u>συνεχή</u> συνάρτηση με γράφημα:

Είναι ώρα όπως να δούμε και μερικά συγκεκριμένα παραδείγματα υπολογισμού ολοκληρωμάτων. Όλες οι συναρτήσεις που θα μας απασχολήσουν είναι συνεχείς (ή κατά τμήματα συνεχείς) ώστε να μην υπάρχει αμφιβολία ως προς την <u>ύπαρξη</u> του ολοκληρώματός τους.

<u>Παραδείγματα</u>

(1) $\int_a^\beta 1\, dx = \beta - a$.

Εδώ $f(x)=1$. Θεωρούμε τυχούσα διαμέριση και ενδιάμεσα σημεία:

$$x_0 = a \le \xi_1 \le x_1 < \dots \le x_{k-1} \le \xi_k \le x_k \le \dots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = \beta.$$

Το άθροισμα Riemann $= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 1\cdot(x_k - x_{k-1})$

$= \beta - a$ (ως άθροισμα των μηκών των διαδοχικών υποδιαστημάτων της διαμέρισης).

Αφού όλα τα αθροίσματα Riemann είναι ίσα με $\beta - a$, και έτσι προσεγγίζουν τον αριθμό $\beta - a$.

(2) $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.

Εδώ $f(x)=x$. Θα χρησιμοποιήσουμε διαμέριση σε ίσα τμήματα πλήθους n. Άρα $x_0=a,\ x_1=a+\frac{b-a}{n},\ \dots,\ x_k=a+k\frac{b-a}{n},\ \dots,\ x_n=b$.

Σαν ενδιάμεσα σημεία παίρνουμε τα δεξιά άκρα $\xi_k=x_k$.

Το άθροισμα Riemann $= \displaystyle\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k-x_{k-1}) =$

$$= \sum_{k=1}^n x_k(x_k-x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} =$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\left\{\sum_{k=1}^n a+\sum_{k=1}^n k\cdot\frac{b-a}{n}\right\} =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left\{na+\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n k\right\} = \frac{b-a}{n}\left\{na+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$= (b-a)a+\frac{(b-a)^2}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Παρατηρούμε ότι το μήκος των διαστημάτων της διαμέρισης είναι $\frac{b-a}{n}$ και τείνει στο 0 καθώς το $n\to+\infty$.

Άρα τα αθροίσματα Riemann που υπολογίσαμε προσεγγίζουν το ολοκλήρωμα. Με απλό υπολογισμό του ορίου, για $n\to+\infty$, βρίσκουμε:

$$\int_a^b x\,dx = (b-a)a+\frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}$$

Παρατήρηση: χρησιμοποιήσαμε τον τύπο $\displaystyle\sum_{k=1}^n k=\frac{n(n+1)}{2}$, ο οποίος εύκολα αποδεικνύεται με επαγωγή.

(3) $\displaystyle\int_a^b x^2dx = \frac{b^3-a^3}{3}$

Τώρα $f(x)=x^2$. Χρησιμοποιούμε την ίδια διαμέριση και τα ίδια ενδιάμεσα σημεία με το προηγούμενο παράδειγμα.

Το άθροισμα Riemann $= \displaystyle\sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k-x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n x_k^2(x_k-x_{k-1}) =$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n\left\{a^2+2a\frac{b-a}{n}k+\left(\frac{b-a}{n}\right)^2k^2\right\} =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left\{ \sum_{k=1}^{n} a^2 + \sum_{k=1}^{n} 2a\frac{b-a}{n}k + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 k^2 \right\} =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left\{ na^2 + 2a\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} k^2 \right\} =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left\{ na^2 + 2a\frac{b-a}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\}$$

$$= (b-a)a^2 + a(b-a)^2\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Τώρα, καθώς το $n \to +\infty$, το όριο του αθροίσματος Riemann είναι

$$\int_a^b x^2 dx = (b-a)a^2 + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} = \frac{b^3-a^3}{3}.$$

<u>Παρατήρηση</u>: Χρησιμοποιήσαμε τους τύπους $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ και $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(4) $$\int_a^b \frac{1}{x}dx = \log\left(\frac{b}{a}\right), \quad \text{όταν } a<b<0 \text{ ή } 0<a<b.$$

<u>Προσέξτε</u>: το 0 δεν πρέπει να περιέχεται στο διάστημα $[a,b]$, διότι τότε η $\frac{1}{x}$ δεν θα είναι συνεχής στο διάστημα αυτό.

Τώρα <u>δεν</u> βολεύει η διαμέριση σε ίσα ισομήκη τμήματα.

Παίρνουμε τα διακεκριμένα σημεία σαν όρους γεωμετρικής προόδου:

$$x_0 = a,\ x_1 = a\mu,\ x_2 = a\mu^2, \dots, x_k = a\mu^k, \dots, x_{n-1} = a\mu^{n-1},\ x_n = a\mu^n = b$$

Ο αριθμός $\mu > 1$ βρίσκεται από την τελευταία εξίσωση (για το x_n):

$$\mu = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}.$$

Τα ξ_k είναι τα δεξιά άκρα: $\xi_k = x_k$.

Τότε το άθροισμα Riemann $= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\xi_k}(x_k - x_{k-1}) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a\mu^k}(a\mu^k - a\mu^{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = n\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)$$

$$= n\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}\right).$$

Τα μήκη των διαστημάτων είναι, για $k=1,2,\ldots,n$

$$x_k - x_{k-1} = ap^k - ap^{k-1} = a\left(1-\frac{1}{p}\right)p^k .$$

Επειδή $p>1$, το μέγιστο μήκος είναι όταν το k πάρει την μεγαλύτερη τιμή $k=n$. Άρα μέγιστο μήκος $= a\left(1-\frac{1}{p}\right)p^n$

$$= a\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{b}{a} = b\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}\right).$$

Καθώς $n\to+\infty$, το μήκος αυτό $\to b(1-1)=0$.

Άρα τα αθροίσματα Riemann προσεγγίζουν το ολοκλήρωμα όταν $n\to+\infty$.

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}\right) = \log\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (\text{γιατί;})$$

(5) $$\int_a^b x^\lambda\,dx = \frac{b^{\lambda+1}-a^{\lambda+1}}{\lambda+1}, \quad \lambda\neq -1.$$

Τα παραδείγματα (1), (2), (3) είναι ειδικές περιπτώσεις με $\lambda=0,1,2$ αντιστοίχως.

Το παράδειγμα (4) είναι η περίπτωση $\lambda=-1$ και δεν καλύπτεται από τον παραπάνω τύπο (προσέξτε το $\lambda+1$ στον παρονομαστή).

Ο πιο σύντομος τρόπος για να αποδειχθεί ο τύπος είναι αυτός που περιγράφεται στο παράδειγμα (4). Η απόδειξη επαφίεται στον αναγνώστη σαν άσκηση.

Ας πούμε όμως δυο λόγια για τους πιθανούς περιορισμούς στις τιμές των a,b. Βασική προϋπόθεση είναι ότι η x^λ πρέπει να είναι συνεχής στο $[a,b]$.

(α) Αν ο λ είναι άρρητος, τότε πρέπει $0<a<b$.

(β) Αν ο λ είναι φυσικός ή μηδέν, τότε δεν υπάρχει περιορισμός στα a,b.

(γ) Αν ο λ είναι ρητός $=\frac{m}{n}$ με $(m,n)=1$ και n περιττός, τότε δεν υπάρχει περιορισμός στα a,b. Επίσης αν ο λ είναι αρνητικός, οπότε πρέπει $a<b<0$ ή $0<a<b$.

(δ) Αν ο λ είναι ρητός $= \frac{m}{n}$ με $(m,n)=1$ και n άρτιος, τότε πρέπει $0<a<b$.

Ένα ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ έχει ορισθεί στην περίπτωση που $a<b$. Είναι πολύ βολικό όταν κάνουμε πράξεις με ολοκληρώματα να μην υπάρχει αυτός ο περιορισμός. Ορίζουμε λοιπόν:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \quad , \quad \text{όταν } a<b$$

και
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad , \quad \text{δηλ. όταν } b=a .$$

Όλες οι ιδιότητες:
$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx ,$$
$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx ,$$
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^\gamma f(x)dx = \int_a^\gamma f(x)dx$$

ισχύουν σε όλες τις περιπτώσεις διάταξης των άκρων που εμφανίζονται. Η απόδειξη είναι στοιχειώδης άμεση εφαρμογή του παραπάνω ορισμού.

__Θεώρημα__ Αν στο διάστημα $[a,b]$ οι $f(x), g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες και $f(x) \le g(x)$ για κάθε x, τότε

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx .$$

__Απόδειξη__ Συγκρίνουμε, απλώς, τα αντίστοιχα αθροίσματα Riemann των $f(x), g(x)$. Για κάθε $k=1,2,\dots,n$: $f(\xi_k) \le g(\xi_k)$,

$$f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \le g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

και προσθέτοντας, έχουμε ότι:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) .$$

Παίρνοντας όριο όταν το μήκος των διαστημάτων της διαμέρισης τείνει στο 0, έχουμε $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Πόρισμα (α) Αν $m \le f(x)$ στο $[a,b]$ και η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx$.

(β) Αν $f(x) \le M$ στο $[a,b]$ και η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε $\int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$.

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα όταν η μία από τις δύο συναρτήσεις είναι σταθερή συνάρτηση (m ή M).

Παραδείγματα (1) Αποδείξτε ότι $\int_n^{n+1} \frac{1}{1+x^2}\,dx \to 0$ (για $n \to +\infty$).

$$0 \le \frac{1}{1+x^2} \le \frac{1}{x^2} \le \frac{1}{n^2}, \quad \text{όταν } n \le x \le n+1.$$

Άρα:
$$0\cdot((n+1)-n) \le \int_n^{n+1} \frac{1}{1+x^2}\,dx \le \frac{1}{n^2}\,((n+1)-n)$$
$$0 \le \int_n^{n+1} \frac{1}{1+x^2}\,dx \le \frac{1}{n^2}.$$

(2) Αποδείξτε ότι $\int_0^1 (\sin x)^n\,dx \to 0$ (για $n \to +\infty$).

Όταν $0 \le x \le 1$, $0 \le \sin x \le x$, $0 \le (\sin x)^n \le x^n$.

Άρα: $0 \le \int_0^1 (\sin x)^n\,dx \le \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$.

Είναι φανερό από τα δύο παραδείγματα ότι όταν θέλουμε να εκτιμήσουμε το μέγεθος ενός ολοκληρώματος (ώστε να αποδείξουμε, για παράδειγμα, ότι είναι "πολύ μικρό") δεν χρειάζεται, πολλές φορές, να υπολογισθεί ακριβώς. Μεγαλώνουμε την προς ολοκλήρωση συνάρτηση κάνοντάς την απλούστερη και το καινούργιο (μεγαλύτερο) ολοκλήρωμα υποθέτουμε ότι υπολογίζεται πιο εύκολα, δίνοντας την εκτίμηση που θέλουμε.

Πόρισμα Αν $f(x)$ και $|f(x)|$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ τότε $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Απόδειξη : Από την $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ έχουμε:

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$, και τελικά:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx .$$

Παράδειγμα: $\left| \int_1^2 \sin x\,dx \right| \le \int_1^2 |\sin x|\,dx \le \int_1^2 1\,dx = 1 .$

Αόριστο ολοκλήρωμα – αντιπαράγωγος.

Δίδεται μιά συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη σε ένα διάστημα τιμών του x. Το διάστημα αυτό μπορεί να είναι είτε ανοικτό είτε κλειστό είτε απεριόριστο προς την μιά μεριά ή και τις δύο μεριές του.

Αν υπάρχει συνάρτηση $F(x)$ στο ίδιο διάστημα ώστε

$$F'(x) = f(x)$$

τότε η $F(x)$ ονομάζεται αντιπαράγωγος της $f(x)$ ή πρωτεύουσα συνάρτηση της $f(x)$.

Για παράδειγμα , αν $f(x) = \cos x$, τότε η $F(x) = \sin x$ είναι αντιπαράγωγος της $f(x)$: $(\sin x)' = \cos x$.

Θεώρημα Αν $F(x)$ είναι μιά αντιπαράγωγος της $f(x)$, τότε η συνάρτηση $F(x)+c$ είναι επίσης αντιπαράγωγος της $f(x)$· η c παριστάνει μιά αυθαίρετη σταθερά. Και αντιστρόφως , αν $G(x)$ είναι οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της $f(x)$, τότε $G(x) = F(x) + c$ για κατάλληλη σταθερά c.

Με άλλα λόγια : δύο οποιεσδήποτε αντιπαράγωγοι $F(x)$, $G(x)$ της ίδιας συνάρτησης $f(x)$, διαφέρουν κατά σταθερή ποσότητα.

Απόδειξη "Ευθύ": Αν $F'(x) = f(x)$, τότε

$$(F(x)+c)' = F'(x) + c' = F'(x) + 0 = f(x).$$

"Αντίστροφο": Αν $G'(x) = F'(x) = f(x)$, τότε

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = 0.$$

Ονομάζουμε $H(x)$ τη διαφορά $G(x) - F(x)$. Θα αποδείξουμε ότι $H(x) =$ σταθερά $= c$.

Πράγματι, αν $x_1 < x_2$ είναι οποιαδήποτε σημεία του διαστήματος, εφαρμόζοντας Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού

$$\frac{H(x_2) - H(x_1)}{x_2 - x_1} = H'(\xi) = 0, \quad \text{για κάποιο } \xi$$

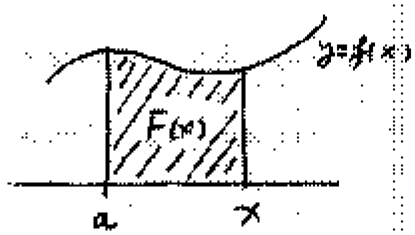
με $x_1 < \xi < x_2$. Άρα $H(x_2) = H(x_1)$.

Όλες, λοιπόν, οι τιμές της $H(x)$ είναι ίσες μεταξύ τους. Άρα $H(x) =$ σταθερά.

Μετά από αυτήν την εισαγωγή (που έχει να κάνει μόνο με την έννοια της παραγώγου) ερχόμαστε σε ένα από τα δύο βασικά θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού: την σχέση ανάμεσα στις έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος.

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ορισμένη και <u>συνεχής</u> σε κάθε σημείο ενός διαστήματος. Διαλέγουμε οποιοδήποτε σημείο a του διαστήματος και μεταβλητό σημείο x. Σχηματίζουμε μια καινούργια συνάρτηση $F(x)$ με τύπο

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$



Για παράδειγμα: αν $f(x) = x^2$, τότε:

$$F(x) = \int_1^x t^2\,dt = \frac{x^3 - 1}{3}.$$

Αν αντί για το σημείο a διαλέγαμε κάποιο άλλο σαν σταθερό σημείο, π.χ. το A, τότε θα είχαμε άλλη επιλογή $\Phi(x)$ με τύπο

$$\Phi(x) = \int_A^x f(t)\,dt .$$

Στο ίδιο παράδειγμα: $f(x) = x^2$, $\Phi(x) = \int_2^x t^2\,dt = \frac{x^3-8}{3}$.

Ας παρατηρήσουμε ότι δύο τέτοιες επιλογές a, A "γεννούν" συναρτήσεις $F(x)$ και $\Phi(x)$ οι οποίες διαφέρουν κατά σταθερά. Πράγματι:

$$F(x) - \Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_A^x f(t)\,dt = \int_a^A f(t)\,dt$$

(δεν εξαρτάται από το x).

Και στο παράδειγμα: $f(x) = x^2$, $F(x) - \Phi(x) = \frac{x^3-1}{3} - \frac{x^3-8}{3} = \frac{7}{3}$.

Ας σταθεροποιήσουμε, τέλος πάντων, μια επιλογή για το a και ας αντιμετωπίσουμε το εξής πρόβλημα: να βρεθεί η παράγωγος της $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Η λύση είναι η εξής (αρκεί η $f(x)$ να είναι συνεχής συνάρτηση):

$$\left(\frac{d}{dx} F(x) =\right) \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Για να το αποδείξουμε αυτό συλλογιζόμαστε ως εξής: Θεωρούμε τυχόν x και θα αποδείξουμε ότι, αν το y είναι αρκετά κοντά στο x, τότε το $\left|\frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x)\right|$ είναι όσο θέλουμε μικρό.

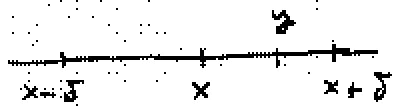
Πράγματι, αυτό θα σημαίνει ότι το $\lim_{y \to x} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} = f(x)$, δηλαδή ότι $F'(x) = f(x)$.

Παίρνουμε, λοιπόν, όσο μικρό $\varepsilon > 0$ θέλουμε. Επειδή η f είναι συνεχής στο σημείο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$x-\delta < t < x+\delta \;\Rightarrow\; f(x)-\varepsilon < f(t) < f(x)+\varepsilon$$

Ας θεωρήσουμε τώρα οποιοδήποτε y

με $\quad x < y < x+\delta$.



Αν t βρίσκεται στο διάστημα $[x,y]$,

τότε το t βρίσκεται και στο διάστημα $(x-\delta, x+\delta)$,

άρα $\quad f(x)-\varepsilon < f(t) < f(x)+\varepsilon$.

Οπότε : $\quad (f(x)-\varepsilon)(y-x) < \int_x^y f(t)\,dt < (f(x)+\varepsilon)(y-x)$

σαν εφαρμογή του πρώτου πορίσματος της σελ. 151

$(m = f(x)-\varepsilon \;,\; M = f(x)+\varepsilon \;,\; a = x \;,\; b = y)$

Επομένως :

$$f(x)-\varepsilon < \frac{\int_x^y f(t)\,dt}{y-x} < f(x)+\varepsilon$$

$$f(x)-\varepsilon < \frac{F(y)-F(x)}{y-x} < f(x)+\varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x) < \varepsilon$$

$$\left| \frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x) \right| < \varepsilon .$$

Εντελώς όμοια (με λίγη προσοχή στα πρόσημα) αποδεικνύουμε

ότι, για οποιοδήποτε y με $\quad x-\delta < y < x \quad$ ισχύει ότι

$$\left| \frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x) \right| < \varepsilon .$$

Άρα, έχουμε καταλήξει στο : για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει

$\delta > 0$ ώστε :

$$0 < |y-x| < \delta \;\Rightarrow\; \left| \frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x) \right| < \varepsilon .$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι $F'(x) = f(x)$.

Έχουμε λοιπόν το θεώρημα:

<u>Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού</u> : Αν η $f(x)$ είναι συνεχής σε ένα διάστημα τότε <u>κάθε</u> αντιπαράγωγος της $f(x)$ δίδεται από τον τύπο $G(x) = c + \int_a^x f(t)\,dt$. Εδώ a είναι αυθαίρετο σημείο του διαστήματος και c είναι αυθαίρετη σταθερά.

<u>Απόδειξη</u> Μόλις αποδείξαμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ είναι αντιπαράγωγος της $f(x)$: $F'(x) = f(x)$.

Είναι άμεσον συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος ότι κάθε άλλη αντιπαράγωγος $G(x)$ διαφέρει από την $F(x)$ κατά μία σταθερά : $G(x) - F(x) = c$

$$G(x) = c + F(x) = c + \int_a^x f(t)\,dt.$$

Χρησιμοποιούμε την έκφραση $\int f(x)\,dx$ σαν συντομογραφία της $c + \int_a^x f(t)\,dt$

Ορισμός : $\int f(x)\,dx = c + \int_a^x f(t)\,dt$, αυθαίρετα a και c

Δηλαδή, βάσει του Θεμελιώδους Θεωρήματος, η $\int f(x)\,dx$ δεν είναι τίποτε άλλο (όταν η $f(x)$ είναι συνεχής) παρά η γενική αντιπαράγωγος της $f(x)$.

$\int f(x)\,dx$ = η γενική αντιπαράγωγος της $f(x)$

<u>Παραδείγματα</u> (1) Γνωρίζουμε ότι $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$. Άρα

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c \quad (= \text{κάποια αντιπαράγωγος} + \text{αυθαίρετη σταθερά}).$$

(2) Γνωρίζουμε ότι $(\sin x)' = \cos x$. Άρα

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \, .$$

(3) Γνωρίζουμε ότι $(e^x)' = e^x$. Άρα

$$\int e^x dx = e^x + c \, .$$

(4) Γνωρίζουμε ότι $(\log|x|)' = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Άρα $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$, $x \neq 0$.

(Η απόδειξη του $(\log|x|)' = \frac{1}{x}$ έχει ως εξής: αν $x > 0$, τότε

$(\log|x|)' = (\log x)' = \frac{1}{x}$. Ενώ αν $x < 0$, τότε

$(\log|x|)' = (\log(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x}$)

Χρήσιμος είναι ο ακόλουθος πίνακας παραδειγμάτων:

$f(x)$	$\int f(x) dx$	Τιμές του x
$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$	$c + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$	$-\infty < x < +\infty$
x^λ $(\lambda \neq -1)$	$\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + c$	$0 < x < +\infty$ (*)
$\sin x$	$-\cos x + c$	$-\infty < x < +\infty$
$\cos x$	$\sin x + c$	$-\infty < x < +\infty$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$	$x \neq \frac{\pi}{2} +$ πολλ. π
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + c$	$x \neq$ πολλ. π
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}\, x + c$	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}\, x + c$	$-\infty < x < +\infty$
$\frac{1}{x}$	$\log|x| + c$	$x \neq 0$
a^x $(a > 0)$	$\frac{a^x}{\log a} + c$	$-\infty < x < +\infty$

(*) Ανάλογα με την τιμή του λ μπορεί να επιτρέπονται και άλλες τιμές του x.

Το $\int f(x)dx$ ονομάζεται και <u>αόριστο ολοκλήρωμα</u> της $f(x)$ σε αντιδιαστολή με το $\int_a^b f(x)dx$ το οποίο ονομάζεται και <u>ωρισμένο ολοκλήρωμα</u> της $f(x)$. Προσέξτε την διαφορά: το $\int_a^b f(x)dx$ είναι συγκεκριμένος αριθμός, ενώ το $\int f(x)dx$ είναι συνάρτηση και, ακριβέστερα, πολλές συναρτήσεις ταυτοχρόνως (μία συνάρτηση + αυθαίρετη σταθερά). Το επόμενο θεώρημα είναι, πέραν του ορισμού μέσω των αθροισμάτων Riemann, το βασικό εργαλείο υπολογισμού ολοκληρωμάτων.

<u>Θεώρημα</u> Έστω $F(x)$ μία αντιπαράγωγος της $f(x)$ στο διάστημα $[a,b]$. Δηλαδή $F'(x)=f(x)$. Τότε $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

<u>Απόδειξη</u>: Από το Θεμελιώδες Θεώρημα έχουμε:

$$F(x) = c + \int_a^x f(t)dt$$

για κάποια κατάλληλη σταθερά c.

Τότε $F(a) = c + \int_a^a f(t)dt = c$

$$F(b) = c + \int_a^b f(t)dt = F(a) + \int_a^b f(t)dt$$

και $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

<u>Παραδείγματα</u> (1) $f(x) = \cos x$, $F(x) = \int \cos x dx = \sin x + c$. Άρα:

$$\int_a^b f(x)dx = \sin b - \sin a$$

(2) $f(x) = e^x$, $F(x) = \int e^x dx = e^x + c$. Άρα:

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$$

(3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \int \frac{1}{x}dx = \log|x| + c$. Άρα:

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx = \log|b| - \log|a| = \log\left(\frac{|b|}{|a|}\right),$$

αρκεί $0<a,b$ ή $a,b<0$.

Ο πίνακας της σελ. 157 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογισθούν μερικά βασικά ολοκληρώματα. Πρέπει πάντοτε να προσέχει κανείς ώστε το διάστημα $[a,b]$ να μην περιέχει κανένα "απαγορευμένο" x.

(4) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan b - \tan a$, αρκεί το $[a,b]$ να μην περιέχει σημείο της μορφής $x = \frac{\pi}{2} + \text{πολλ.}\,\pi$.

$\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \cot a - \cot b$, αρκεί το $[a,b]$ να μην περιέχει σημείο της μορφής $x = \text{πολλ.}\,\pi$.

(5) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{Arcsin} b - \operatorname{Arcsin} a$, $-1 < a, b < 1$.

(6) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Arctan} b - \operatorname{Arctan} a$,

(7) $\displaystyle\int_a^b \alpha^x\,dx = \frac{\alpha^b - \alpha^a}{\log \alpha}$, $(\alpha > 0)$

(8) Θα δούμε εδώ μια ειδική περίπτωση του παραδείγματος (6):

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Arctan} 1 - \operatorname{Arctan} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Ας θυμηθούμε τώρα τον τύπο: $1 + t + t^2 + \dots + t^n = \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t}$, $t \neq 1$.

Θέτουμε $t = -x^2$: $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} = \dfrac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$$

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx .$$

Θα εξετάσουμε το μέγεθος του τελευταίου όρου του αθροίσματος:

$$\left| (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx \right| = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx$$ (το ολοκλήρωμα είναι ≥ 0 επειδή η συνάρτηση είναι ≥ 0).

Τώρα: $\dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2} \le x^{2n+2}$. Άρα

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx \le \int_0^1 x^{2n+2}\,dx = \frac{1}{2n+3} \longrightarrow 0, \text{ όταν } n \to +\infty.$$

Άρα $\dfrac{\pi}{4} - \left\{ 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dots + \dfrac{(-1)^n}{2n+1} \right\} \longrightarrow 0$

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to+\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right\}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots,$$

σύμφωνα με όσα έχουμε πει για σύγκλιση σειρών.

Ο τύπος αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αριθμητική προσέγγιση του αριθμού π: $\dfrac{\pi}{4} \approx 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dots + \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. Αν χρησιμοποιήσουμε το πεπερασμένο άθροισμα του δεξιού μέλους, το σφάλμα που γίνεται είναι, όπως είδαμε προηγουμένως, το πολύ $\dfrac{1}{2n+3}$.

Αν, για παράδειγμα, θέλουμε να υπολογίσουμε τον $\dfrac{\pi}{4}$ με ακρίβεια τρίτου δεκαδικού ψηφίου, τότε θα πρέπει το σφάλμα να είναι $< \dfrac{1}{10^3}$. Δηλαδή $\dfrac{1}{2n+3} < \dfrac{1}{10^3}$, $n \ge 499$. Πρέπει δηλαδή να προσθέσουμε 499 κλάσματα. Καθόλου αποτελεσματικός τρόπος!

Μέθοδοι υπολογισμού ολοκληρωμάτων

Α. Μέθοδος της αντικατάστασης ή αλλαγής μεταβλητής. Αν η $f(x)$ είναι συνεχής, οι $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ είναι επίσης συνεχείς και οι τιμές της $x=\varphi(t)$ είναι στο διάστημα που ορίζεται η $f(x)$ (δηλ. αν ορίζεται η σύνθεση $f(\varphi(t))$) τότε

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \quad \text{με } x=\varphi(t)}$$

Εδώ χρειάζεται μια επεξήγηση: το αριστερό μέλος είναι συνάρτηση του x, ενώ το δεξί μέλος είναι συνάρτηση του t. Η ισότης ισχύει μονάχα αφού γίνει αντικατάσταση στο αριστερό μέλος του x με το $\varphi(t)$, οπότε και τα δύο μέλη της ισότητας είναι συναρτήσεις του t.

<u>Παραδείγματα</u> (1) $\int (\sin t)^n \cos t \, dt = \int (\sin t)^n (\sin t)' dt$.

$\left(f(x) = x^n , \quad x = \varphi(t) = \sin t \right)$

$$= \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c = \frac{(\sin t)^{n+1}}{n+1} + c$$

η γνωστή σχέση.

Οι υποθέσεις ισχύουν: η x^n, καθώς και οι $\sin t$, $(\sin t)' = \cos t$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.

(2) $\displaystyle\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = \int \frac{1}{\varphi(t)} \cdot \varphi'(t) dt$

$\left(f(x) = \frac{1}{x} , \quad x = \varphi(t) \right)$

$$= \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c = \log|\varphi(t)| + c$$

Αρκεί: η $\varphi(t)$ και η $\varphi'(t)$ να είναι συνεχείς συναρτήσεις, και οι τιμές $\varphi(t)$ να βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της $\frac{1}{x}$. Δηλαδή $\varphi(t) \neq 0$.

(3) $\int (\varphi(t))^n \varphi'(t) dt$, n φυσικός

(Αυτό είναι γενίκευση του παραδ. (1).
$x = \varphi(t)$, $f(x) = x^n$)

$$= \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c = \frac{(\varphi(t))^{n+1}}{n+1} + c.$$

Αρκεί οι $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ να είναι συνεχείς.

Απόδειξη της μεθόδου. Έστω $F(x)$ μια αντιπαράγωγος της $f(x)$.

Τότε $\int f(x)dx = F(x) + c$.

Από την άλλη μεριά, η $G(t) = F(\phi(t))$ ικανοποιεί την σχέση:

$$G'(t) = F'(\phi(t))\,\phi'(t) = f(\phi(t))\,\phi'(t).$$

Άρα η $G(t)$ είναι αντιπαράγωγος της $f(\phi(t))\,\phi'(t)$. Επομένως:

$$\int f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt = G(t) + c = F(\phi(t)) + c = F(x) + c = \int f(x)dx.$$

Όλες οι υποθέσεις είναι χρήσιμες ώστε οι παραστάσεις που εμφανίζονται μέσα στα αόριστα ολοκληρώματα να είναι συνεχείς.

Υπάρχει αντίστοιχος τύπος και για ορισμένα ολοκληρώματα:

$$\boxed{\int_{A=\phi(\alpha)}^{B=\phi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt.}$$

Ο τύπος αυτός ισχύει με την προϋπόθεση, ότι οι $\phi(t)$, $\phi'(t)$ είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και η $f(x)$ σε διάστημα που περιέχει τις τιμές $x=\phi(t)$.

Ο τρόπος να αποδειχθεί ο τύπος αυτός είναι να παραγωγίσουμε τα ολοκληρώματα $\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\tau)} f(x)dx$, $\int_{\alpha}^{\tau} f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt$

όπου η μεταβλητή τ βρίσκεται στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Το δεύτερο ολοκλήρωμα έχει παράγωγο $f(\phi(\tau))\,\phi'(\tau)$.
Το πρώτο (με κανόνα αλυσίδας) έχει παράγωγο $f(\phi(\tau))\,\phi'(\tau)$.
Άρα τα δύο ολοκληρώματα διαφέρουν κατά σταθερό αριθμό. Θέτουμε $\tau = \alpha$: και τα δύο ολοκληρώματα γίνονται 0. Άρα ο σταθερός αριθμός είναι 0. Άρα τα ολοκληρώματα είναι ίδια. Τέλος θέτουμε $\tau = \beta$.

<u>Παράδειγμα</u> $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{t\log t}\,dt = \int_a^b \frac{1}{\log t}(\log t)'\,dt$

$(\, f(x) = \frac{1}{x} \;,\; x = \varphi(t) = \log t \,)$

$$= \int_{\log a}^{\log b} \frac{1}{x}\,dx = \log|\log b| - \log|\log a| = \log\left|\frac{\log b}{\log a}\right|$$

Εδώ πρέπει το σύνολο τιμών της $\log t$ να περιέχει τον αριθμό 0.

Το σύνολο τιμών της $\log t$, για $a \le t \le b$ είναι το διάστημα $[\log a, \log b]$ (η $\log t$ είναι αύξουσα)

Άρα, είτε $0 < \log a < \log b$, $1 < a \le b$

είτε $\log a < \log b < 0$, $0 < a < b < 1$.

B. <u>Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά μέρη ή κατά παράγοντες</u>.

Αν οι $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις τότε:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

<u>Απόδειξη</u> Έστω $F(x)$ μια αντιπαράγωγος της $f'(x)g(x)$.

Τότε $F'(x) = f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x)$.

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x) - F(x))'$$

Άρα, η $f(x)g(x) - F(x)$ είναι μια αντιπαράγωγος της $f(x)g'(x)$.

Έτσι, λοιπόν, $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - F(x) + c =$

$$= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

<u>Παραδείγματα</u> (1) $\displaystyle\int \log x\,dx = \int x'\log x\,dx = x\log x - \int x(\log x)'\,dx =$

$\displaystyle = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x + c \;,\quad x > 0.$

(2) $\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = xe^x - \int x' e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

(3) $\int x \sin x \, dx = \int x(-\cos x)' dx = -x\cos x + \int x' \cos x \, dx =$

$$= -x\cos x + \int \cos x \, dx = -x\cos x + \sin x + C \, .$$

(4) $\int e^{ax} \sin(bx)\, dx = \int \left(\frac{1}{a} e^{ax}\right)' \sin(bx)\, dx =$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos(bx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \left\{ \int \left(\frac{1}{a} e^{ax}\right)' \cos(bx)\, dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \left\{ \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin(bx)\, dx \right\}$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \left\{ \sin(bx) - \frac{b}{a} \cos(bx) \right\} - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \int e^{ax} \sin(bx)\, dx \, .$$

Άρα: $\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right) \int e^{ax} \sin(bx)\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \left\{ \sin(bx) - \frac{b}{a} \cos(bx) \right\} + C$

Προσέξτε την εισαγωγή της σταθεράς C: από την στιγμή που υπάρχουν αόριστα ολοκληρώματα μονάχα στην μία μεριά μιας εξίσωσης, πρέπει να υπάρχει μια αυθαίρετη σταθερά C στην άλλη μεριά.

Τελικά: $\int e^{ax} \sin(bx)\, dx = e^{ax} \left\{ \frac{a}{a^2+b^2} \sin(bx) - \frac{b}{a^2+b^2} \cos(bx) \right\} + C \, .$

Γ. Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Θα περιγράψουμε μια γενική μέθοδο υπολογισμού του $\int R(x)dx$, όπου $R(x) = \dfrac{a_0+a_1x+\dots+a_m x^m}{b_0+b_1x+\dots+b_n x^n}$ είναι ρητή συνάρτηση.

1º βήμα: αναγόμαστε στην περίπτωση που ο βαθμός m του αριθμητή είναι μικρότερος του βαθμού n του παρονομαστή. Αν $m<n$ εξ αρχής, δεν μας αφορά το πρώτο βήμα. Αν όμως $m \geq n$, τότε διαιρούμε τα πολυώνυμα:

$$a_0+a_1x+\dots+a_m x^m = p(x)\left(b_0+b_1x+\dots+b_n x^n\right) + q(x),$$

όπου $p(x), q(x)$ είναι πολυώνυμα και

βαθμός του $q(x) < n$.

Τότε $R(x) = p(x) + \dfrac{q(x)}{b_0+b_1x+\dots+b_n x^n}$,

$$\int R(x)\,dx = \int p(x)\,dx + \int \frac{q(x)}{b_0+b_1x+\dots+b_n x^n}\,dx.$$

Το $\int p(x)dx$ υπολογίζεται εύκολα.

Άρα, από εδώ και πέρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m<n$.

2º βήμα: αναλύουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο παραγόντων. Αυτό γίνεται αν βρούμε τις ρίζες του πολυωνύμου. Αυτό είναι αδύνατον στη γενική περίπτωση, αλλά σε διάφορες περιπτώσεις είναι εφικτό. Γενικά, πάντως, υποθέτουμε το εξής. Αν a είναι μία πραγματική ρίζα, τότε το $(x-a)^k$ είναι παράγων του πολυωνύμου (k είναι η "πολλαπλότητα" του a). Αν $\mu+\nu i$ είναι μιγαδική ρίζα με πολλαπλότητα ρ, τότε $\mu-\nu i$ είναι επίσης ρίζα με ίδια πολλαπλότητα ρ. Άρα το $(x-\mu-\nu i)^\rho (x-\mu+\nu i)^\rho = \left[(x-\mu)^2+\nu^2\right]^\rho$ είναι παράγων του πολυωνύμου. Έχουμε λοιπόν

$$b_0+b_1x+\dots+b_n x^n = b_n (x-a)^k \cdots (x-\gamma)^\lambda \left[(x-\mu)^2+\nu^2\right]^\rho \cdots \left[(x-\varepsilon)^2+\delta^2\right]^\tau$$

$$(n = k+\dots+\lambda+2\rho+\dots+2\tau)$$

3ο βήμα. Αναλύουμε το κλάσμα σε "απλά κλάσματα":

$$R(x) = \left(\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}\right) + \dots + \left(\frac{\Gamma_1}{x-\gamma} + \frac{\Gamma_2}{(x-\gamma)^2} + \dots + \frac{\Gamma_\lambda}{(x-\gamma)^\lambda}\right) +$$

$$+ \left(\frac{M_1(x-\mu)+N_1}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \dots + \frac{M_\rho(x-\mu)+N_\rho}{[(x-\mu)^2+\nu^2]^\rho}\right) + \dots +$$

$$+ \left(\frac{E_1(x-\varepsilon)+\Delta_1}{(x-\varepsilon)^2+\delta^2} + \dots + \frac{E_\tau(x-\varepsilon)+\Delta_\tau}{[(x-\varepsilon)^2+\delta^2]^\tau}\right).$$

Η ιδέα είναι ότι κάθε παράγων $(x-\alpha)^k$ ή $[(x-\mu)^2+\nu^2]^\rho$, του παρονομαστή παράγει μια ομάδα κλασμάτων με παρονομαστές τον παράγοντα αυτόν σε δυνάμεις $1, 2, \dots, k$ ή ρ και αριθμητές με βαθμό μικρότερο του 1 ή του 2 αντιστοίχως.

Οι συντελεστές $A_1, A_2, \dots, E_\tau, \Delta_\tau$ είναι άγνωστοι και πρέπει να υπολογισθούν. Αυτό γίνεται με απαλοιφή των παρονομαστών, αφού πολλαπλασιάσουμε την παραπάνω εξίσωση με το Μέγιστο Κοινό Πολλαπλάσιο τους, δηλαδή το $b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$. Κατόπιν εξισώνουμε τους συντελεστές των δύο πολυωνύμων που προκύπτουν και θα έχουμε ένα σύστημα με αγνώστους τους $A_1, A_2, \dots, E_\tau, \Delta_\tau$. (Λίγη σκέψη αποκαλύπτει ότι θα έχουμε n εξισώσεις με n αγνώστους).

Απομένει, λοιπόν, το $\int R(x)dx$ στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων της μορφής:

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}dx, \quad \text{με } k \geq 1$$

$$\int \frac{x-\mu}{[(x-\mu)^2+\nu^2]^\rho}dx, \quad \text{με } \rho \geq 1$$

$$\int \frac{1}{[(x-\mu)^2+\nu^2]^\rho}dx, \quad \text{με } \rho \geq 1.$$

4ο βήμα. Εξετάζουμε κάθε περίπτωση χωριστά.

(α) $\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}dx$. Γράφουμε $x = \varphi(t) = \alpha + t$.

Τότε $$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}dx = \int \frac{1}{t^k}\varphi'(t)dt = \int \frac{1}{t^k}dt = \begin{cases} c + \log|t| = \log|x-\alpha| + c, & k=1 \\ \frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{t^{k-1}} + c = \frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}} + c, & k \neq 1 \end{cases}$$

(6) $\int \frac{x-\mu}{[(x-\mu)^2+\nu^2]^\rho}\,dx$. Γράφουμε $x = \mu + \nu t = \phi(t)$. Τότε

το $\int \frac{x-\mu}{[(x-\mu)^2+\nu^2]^\rho}\,dx = \int \frac{\nu t}{\nu^{2\rho}(t^2+1)^\rho}\,\nu\,dt = \frac{1}{2\nu^{2\rho-2}} \int \frac{2t}{(t^2+1)^\rho}\,dt =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\nu^{2\rho-2}} \log(t^2+1) + c, & \rho = 1 \\ \frac{1}{2\nu^{2\rho-2}(1-\rho)} \cdot \frac{1}{(t^2+1)^{\rho-1}} + c, & \rho > 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\nu^{2\rho-2}} \log\left(\left(\frac{x-\mu}{\nu}\right)^2+1\right) + c, & \rho = 1 \\ \frac{1}{2\nu^{2\rho-2}(1-\rho)} \cdot \frac{1}{\left[\left(\frac{x-\mu}{\nu}\right)^2+1\right]^{\rho-1}} + c, & \rho > 1 \end{cases}$$

(β) $\int \frac{1}{[(x-\mu)^2+\nu^2]^\rho}\,dx$. Γράφουμε, όπως και πριν $x = \mu + \nu t$. Τότε

$$\int \frac{1}{[(x-\mu)^2+\nu^2]^\rho}\,dx = \frac{1}{\nu^{2\rho-1}} \int \frac{1}{(t^2+1)^\rho}\,dt .$$

Άρα ανάγομαστε στο ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{(t^2+1)^\rho}\,dt$, $\rho \geq 1$.

Αυτό είναι σχετικά πιο περίπλοκο από τα προηγούμενα και υπολογίζεται με "αναδρομικό τύπο".

Καταρχήν, αν $\rho = 1$ τότε $\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \text{Arctan}\, t + c$.

Αν $\rho > 1$, τότε $\int \frac{1}{(t^2+1)^\rho}\,dt = \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^\rho}\,dt - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^\rho}\,dt =$

$$= \int \frac{1}{(t^2+1)^{\rho-1}}\,dt - \int t \cdot \frac{t}{(t^2+1)^\rho}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{(t^2+1)^{\rho-1}}\,dt + \int t \left(\frac{1}{2(1-\rho)} \cdot \frac{1}{(t^2+1)^{\rho-1}}\right)' dt =$$

$$= \int \frac{1}{(t^2+1)^{\rho-1}}\,dt + \frac{1}{2(1-\rho)} \cdot \frac{t}{(t^2+1)^{\rho-1}} - \frac{1}{2(1-\rho)} \int \frac{1}{(t^2+1)^{\rho-1}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2(1-\rho)} \cdot \frac{t}{(t^2+1)^{\rho-1}} + \frac{1-2\rho}{2-2\rho} \int \frac{1}{(t^2+1)^{\rho-1}}\,dt$$

Ελαττώσαμε, λοιπόν, τον εκθέτη του παρονομαστή κατά μία μονάδα.

Συνεχίζοντας επαγωγικά καταλήγουμε στην περίπτωση του εκθέτη = 1 και στο Arctan t.

<u>Παράδειγμα</u> $\displaystyle\int \frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx = \int R(x)\,dx$.

Μετά από διαίρεση $\displaystyle\frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} = x^2+7x+5+\frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}$.

Άρα $\displaystyle\int \frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{7}{2}x^2+5x+\int\frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx$.

Καθώς : $x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1 = (x^4+2x^2+1)(x-1) = (x^2+1)^2(x-1)$,

Άρα $\displaystyle\frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+\Gamma}{x^2+1}+\frac{\Delta x+E}{(x^2+1)^2}$.

$$-7x^4+3x^3+4x^2+x+5 = A(x^2+1)^2+(Bx+\Gamma)(x-1)(x^2+1)+(\Delta x+E)(x-1).$$
$$= (A+B)x^4+(-B+\Gamma)x^3+(2A+B-\Gamma+\Delta)x^2+$$
$$+(-B+\Gamma+E-\Delta)x+(A-\Gamma-E).$$

Επομένως : $A+B=-7$
$-B+\Gamma=3$
$2A+B-\Gamma+\Delta=4$
$-B+\Gamma-\Delta+E=1$
$A-\Gamma-E=5$

Λύνοντας το σύστημα : $A=\frac{3}{2}$, $B=-\frac{17}{2}$, $\Gamma=-\frac{11}{2}$, $\Delta=4$, $E=2$

Έτσι : $\displaystyle\int\frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx = \frac{3}{2}\int\frac{1}{x-1}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{17x+11}{x^2+1}\,dx+2\int\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$

$$= \frac{3}{2}\log|x-1|-\frac{17}{4}\log(x^2+1)-\frac{11}{2}\,\mathrm{Arctan}\,x-\frac{2}{x^2+1}+2\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα : $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\,dx-\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx =$

$$= \int\frac{1}{x^2+1}\,dx-\int x\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \mathrm{Arctan}\,x+\int x\left(\frac{1}{2(x^2+1)}\right)'dx =$$

$$= \mathrm{Arctan}\,x+\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\,x+\frac{x}{2(x^2+1)}+C.$$

Τελικά : $\displaystyle\int R(x)\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}+5x+\frac{3}{2}\log|x-1|-\frac{17}{4}\log(x^2+1)+\frac{x-2}{x^2+1}-$

$$-\frac{9}{2}\,\mathrm{Arctan}\,x+C.$$

Δ. Συνήθη ολοκληρώματα

1. $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$. $R(\sin x, \cos x)$ παριστάνει μία ρητή συνάρτηση των $\sin x, \cos x$.

Χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $t = \tan(\frac{x}{2})$ (ή $x = 2\,\mathrm{Arctan}\, t$), και τον τριγωνομετρικό τύπο:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Άρα $\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\, dt$.

<u>Παράδειγμα</u> $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt =$

$$= \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log|\tan(\tfrac{x}{2})| + c ,$$

2. $\int R(x, \sqrt{1-x^2})\, dx$. $R(x, \sqrt{1-x^2})$ είναι μία ρητή συνάρτηση των x και $\sqrt{1-x^2}$.

Χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $x = \sin t$. Τότε

$$\sqrt{1-x^2} = \cos t , \quad \frac{dx}{dt} = \cos t$$

Άρα $\int R(x, \sqrt{1-x^2})\, dx = \int R(\sin t, \cos t) \cos t\, dt$, και αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση.

<u>Παράδειγμα</u> $\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\, dt =$

$$= \int \frac{\frac{1-y^2}{1+y^2}}{\frac{2y}{1+y^2} + \frac{1-y^2}{1+y^2}} \cdot \frac{2}{1+y^2}\, dy = 2\int \frac{y^2-1}{(y^2-2y-1)(y^2+1)}\, dy = \ldots .$$

με αλλαγές μεταβλητών: $x = \sin t$, $y = \tan(\frac{t}{2})$.

3. $\int R(x, \sqrt{x^2-1})\, dx$. Τώρα χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $x = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$. Τότε $\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t})$, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{t^2})$.

Άρα $\int R(x,\sqrt{x^2-1})\,dx = \frac{1}{2}\int R\left(\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t}),\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})\right)\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt$ και

ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του t.

<u>Παράδειγμα</u> $\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})+\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt =$

$= \int \left(\frac{1}{2t}-\frac{1}{2t^3}\right)dt = \frac{1}{2}\log|t| + \frac{1}{4t^2} + c =$

$= \frac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2-1}| + \frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})^2} + c$

4. $\int R(x,\sqrt{x^2+1})\,dx$. Η αλλαγή μεταβλητής που χρειαζόμαστε είναι

η $x=\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})$, τότε $\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})$ και $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{t^2})$.

Άρα $\int R(x,\sqrt{x^2+1})\,dx = \frac{1}{2}\int R\left(\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t}),\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})\right)\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt =$

= ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του t.

<u>Παράδειγμα</u> $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{1}{4}(t-\frac{1}{t})(t+\frac{1}{t})}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt =$

$= 2\int \frac{1}{t^2-1}\,dt = 2\int \frac{1}{(t-1)(t+1)}\,dt =$ [illegible] $\int \frac{1}{t-1}\,dt -$ [illegible] $\int \frac{1}{t+1}\,dt =$

$=$ [illegible] $\log|t-1| -$ [illegible] $\log|t+1| + c =$ [illegible] $\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c =$

$=$ [illegible] $\log\left|\frac{4\sqrt{x^2+1}-6}{4x+3}\right| + c$.