ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Λεωφ. Κνωσού (Τ.Θ. 2208) 714 09 Ηράκλειο Κρήτης, Τηλ.: (081) 393801, 393807, Fax: (081) 393881

Εξετάσεις Επιλογής

για το

Μεταπτυχιακό Τμήμα.

ΜΕΡΟΣ Β.

17 Ιουλίου 1999

Επιτροπή:

Μ. Κατσοπρινάκης

Α. Κουβιδάκης

Χ. Μακριδάκης

ΑΝΑΛΥΣΗ Κ.Λ.Π.

Α1. (i) Αν $x\neq 0$, $\forall x\in A$, τότε ορίζουμε το σύνολο: $\frac{1}{A}=\left\{\frac{1}{x} : x\in A\right\}$. Αν $\inf A = a>0$, τότε δείξτε ότι υπάρχει το $\sup\frac{1}{A}$ και ισούται με $\frac{1}{a}$.

(ii) Αν $a_n>0$, $n=1,2,3,\dots$, και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε δείξτε ότι $\liminf(na_n)=0$.
Δώστε, αν μπορείτε, ένα παράδειγμα τέτοιας σειράς με $\limsup(na_n)>0$.

Α2. Αν $f_n(x)\longrightarrow f(x)$ ομοιόμορφα στο $[a,x_0)$ και για κάθε $n=1,2,3,\dots$, $f_n(x)$ συνεχής στο $[a,x_0]$, τότε δείξτε ότι η ακολουθία $f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σ' όλο το $[a,x_0]$ σε μία συνεχή συνάρτηση.

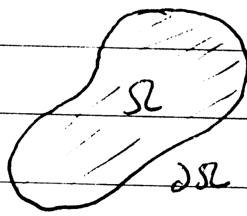
Α3. (i) Έστω $f(z)$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα ανοικτό υποσύνολο Ω του $\mathbb{C}$. Αν $z_0\in\Omega$ και

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & z\in\Omega\setminus\{z_0\}\\ f'(z_0), & z=z_0\end{cases},$$

τότε δείξτε ότι και η $g(z)$ είναι παραγωγίσιμη στο Ω.

(ii) Με την βοήθεια της $f(x)=x|x|$ (ή και με άλλο τρόπο, αν θέλετε) δείξτε ότι το συμπέρασμα του (i) <u>δεν</u> ισχύει γενικά όταν η f είναι πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής.

Α4. Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ένα χωρίο με σύνορο $\partial\Omega$ μία απλή κλειστή καμπύλη την οποία υποθέτετε όσο ομαλή θέλετε.



(i) Τι εννοούμε όταν λέμε ότι η συνάρτηση $f(z)=u(z)+iv(z)$ είναι ολόμορφη στο $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$;

(ii) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Green και τις συνθήκες Cauchy-Riemann δείξτε ότι για κάθε

f ολόμορφη στο $\overline{\Omega}$ με συνεχή παράγωγο ισχύει ότι

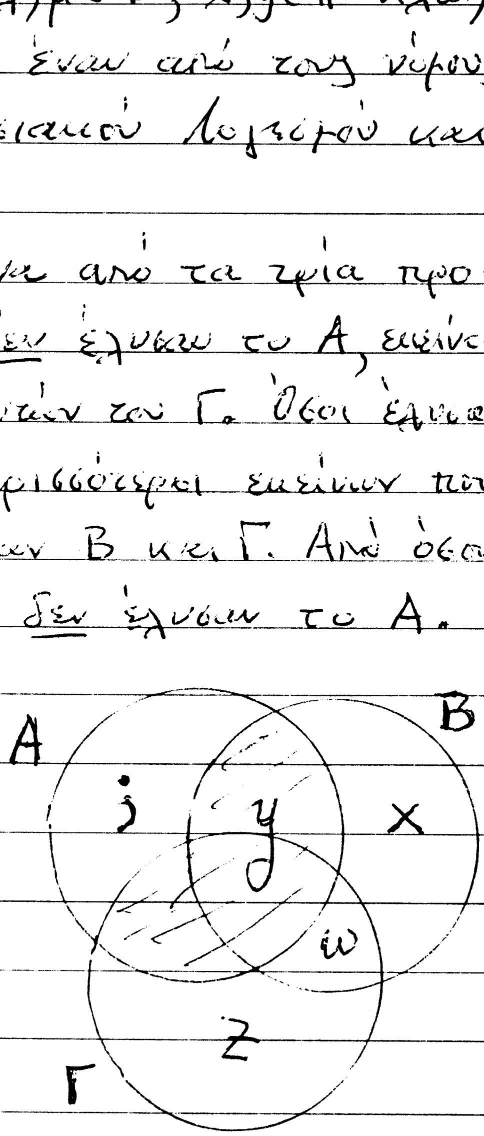
$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 0 \quad \text{(Θεώρημα Cauchy)}.$$

A5. Έστω X_0 ένα πυκνό υποσύνολο ενός χώρου X με νόρμα, τέτοιο ώστε κάθε ακολουθία Cauchy του X_0 να συγκλίνει στον X. Δείξτε ότι ο X είναι χώρος Banach.

A6. Έστω H ένας χώρος Hilbert πάνω από το $\mathbb{C}$ και $T: H \to H$ ένας γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $\langle Tx, x\rangle = 0$, $\forall x \in H$. Δείξτε ότι $T = 0$ και ότι το συμπέρασμα _δεν_ ισχύει γενικά για χώρους με εσωτερικό γινόμενο πάνω από το $\mathbb{R}$, π.χ. στον $\mathbb{R}^2$.
(_Υπόδ:_ $\langle T(\lambda x + \mu y), \lambda x + \mu y\rangle = 0$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $x, y \in H$ κλπ).

A7. Διατυπώστε και αποδείξτε από έναν από τους νόμους του De Morgan (α) του προτασιακού λογισμού και (β) της Θεωρίας Συνόλων.

A8. 25 φοιτητές έλυσαν τουλάχιστον ένα από τα τρία προβλήματα Α, Β, Γ. Από εκείνους που _δεν_ έλυσαν το Α, εκείνοι που έλυσαν το Β ήταν διπλάσιοι των λυτών του Γ. Όσοι έλυσαν _μόνο_ το Α ήταν κατά μία μονάδα περισσότεροι εκείνων που έλυσαν το Α _και_ τουλάχιστον ένα των Β και Γ. Από όσους έλυσαν _ένα μόνο_ πρόβλημα, οι μισοί _δεν_ έλυσαν το Α. Πόσοι φοιτητές έλυσαν _μόνο_ το πρόβλημα Β;
(_Υπόδ:_ Το ζητούμενο είναι ο άγνωστος x στο διπλανό διάγραμμα Venn. Εξηγήστε το διάγραμμα αυτό, συμπληρώστε το και βρείτε τον ακέραιο x).



ΑΛΓΕΒΡΑ - Θ. ΑΡΙΘΜΩΝ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ.

Β1. Υπολογίστε το υπόλοιπο της διαιρέσεως $5^{292} : 360$.

Β2. Εστω a, b, c, x, y θετικοί ακέραιοι.

i) Αν $(a,b) = 1$, $c \mid ax$ και $c \mid by$ δείξτε ότι $c \mid xy$.

ii) Αν $(a,b) = 1$ και $x^a = y^b$ δείξτε ότι υπαρχει θετικός ακέραιος z τέτοιος ώστε $x = z^b$ και $y = z^a$.

Β3. Εστω $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{3}}$ και $\mathbb{Q}(\alpha)$ το μικρότερο υπόσωμα του $\mathbb{R}$ που περιέχει το σώμα $\mathbb{Q}$ και το στοιχείο α.

i) Βρείτε το ελαχιστο πολυώνυμο του α πάνω απο το $\mathbb{Q}$.

ii) Βρείτε μια βάση του $\mathbb{Q}$-διανυσματικου χώρου $\mathbb{Q}(\alpha)$.

iii) Γράψτε το στοιχείο $1/\alpha$ ως $\mathbb{Q}$-γραμμικό συνδιασμό της παραπανω βάσης.

Β4. Εστω $\mathbb{R}[x]$ ο δακτύλιος των πολυωνύμων μίας μεταβλητης x με συντελεστές στο $\mathbb{R}$ και έστω $\mathbb{R}[x,y]$ ο δακτύλιος των πολυωνύμων δυο μεταβλητων x, y με συντελεστές στο $\mathbb{R}$.

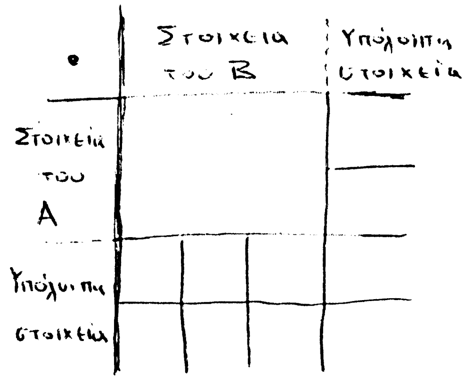
i) Δείξτε ότι ο $\mathbb{R}[x]$ είναι ακέραια περιοχή αλλα ότι δέν είναι σωμα.

ii) Θεωρούμε τον ομομορφισμό δακτυλιων $\Phi : \mathbb{R}[x,y] \to \mathbb{R}[x]$ με $\Phi(f(x,y)) := f(x, x^2)$. Δείξτε ότι ο Φ είναι επί με πυρήνα $\ker\Phi = (x^2 - y)$, όπου (x^2-y) είναι το ιδεώδες που παράγεται από το πολυώνυμο $x^2 - y$.

(Υποδ.: Θεωρήστε τα πολυώνυμα $f(x,y)$ ως πολυώνυμα μεταβλητής y με συντελεστές πολυωνυμα του x, δηλ. ως στοιχεια του δακτυλιου $R[y]$, όπου $R = \mathbb{R}[x]$. Κανετε χρηση της διαίρεσης στον $R[y]$.)

iii) Δείξτε χρησιμοποιόντας τα (i) και (ii) ότι το ιδεώδες (x^2-y) είναι πρώτο αλλα όχι μέγιστο ιδεώδες του δακτυλιου $\mathbb{R}[x,y]$.

B5. Έστω $(G,\cdot)$ πεπερασμένη ομάδα με $|G|=n$.
Έστω $A=\{a_1,\dots,a_k\}\subseteq G$, $B=\{b_1,\dots,b_\lambda\}\subseteq G$ υποσύνολα της G.
Ορίζομε $AB := \{a_i\cdot b_j \;;\; 1\le i\le k,\ 1\le j\le \lambda\}\subseteq G$. Δείξτε ότι αν $k+\lambda \ge n+1$ τότε $AB=G$.
(Υποδ.: Έστω ότι υπάρχει $g\in G$ με $g\notin AB$. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα πράξης της G, στην μορφή που δίνεται δίπλα, και καταλήξτε σε άτοπο).



B6. Έστω $S_1=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2$, όπου τουλάχιστον ένα των a,b είναι ρητός$\}\subseteq\mathbb{R}^2$
$S_2=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2$, όπου ακριβώς ένα των a,b είναι ρητός$\}\subseteq\mathbb{R}^2$.
Εφοδιάζομε τα S_1, S_2 με την επαγόμενη τοπολογία από το $\mathbb{R}^2$.
Ποια από τα S_1, S_2 είναι συνεκτικά και ποια όχι (και γιατί);

B7. Δίδεται η επιφάνεια $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x>0,\ y>0,\ xyz=1\}$
i) Υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss και την μέση καμπυλότητα σε κάθε σημείο της S.
ii) Δείξτε ότι το σημείο $(1,1,1)\in S$ είναι ομφαλικό.
(Σημ. Ομφαλικό σημείο = σημείο όπου οι δύο κύριες καμπυλότητες είναι ίσες.)

B8. Έστω $f(x)$ μια παραγωγίσιμη (όσες φορές χρειάζεστε!) συνάρτηση στο $\mathbb{R}$
i) Δείξτε ότι η καμπυλότητα της καμπύλης $\sigma(t)=(t,f(t))$ δίδεται από τον τύπο $k(t)=\dfrac{|f''(t)|}{[1+(f'(t))^2]^{3/2}}$.
(Σημ. Αν $\sigma(t)=(x(t),y(t),z(t))$ με $\sigma'(t)\neq 0$, τότε $k(t)=\dfrac{\|\sigma'(t)\times\sigma''(t)\|}{\|\sigma'(t)\|^3}$.)

ii) Αν η παραπάνω συνάρτηση f είναι κυρτή και επιπλέον $f(0)=f'(0)=0$, τότε δείξτε ότι $k(0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2f(t)}{t^2}$.

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ – ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Γ1. Έστω X_1, X_2 δύο ανεξάρτητες διωνυμικές τ.μ. ορισμένες στον ίδιο δειγματικό χώρο Ω με κατανομή διωνυμική $B(n, \frac{1}{2})$. Υπολογίστε την πιθανότητα ώστε ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}$$

να είναι διαγωνοποιήσιμος.

(Υπόδ: Δείξτε πρώτα ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος μόνο όταν οι ιδιοτιμές του είναι διαφορετικές μεταξύ τους).

Γ2. Ρίπτομεν ένα νόμισμα διαδοχικά και ανεξάρτητα $2n+1$ φορές ($n \in \mathbb{N}$). Για κάθε ρίψη η πιθανότητα να έχουμε κορώνα (Κ) είναι $\frac{1}{2}$.

(i) Ποιά είναι η πιθανότητα να πάρουμε περισσότερες κορώνες (Κ) από γράμματα (Γ) κατά την διάρκεια των $(2n+1)$-ρίψεων;

(ii) Υπολογίζοντας την παραπάνω πιθανότητα με δύο τρόπους βρείτε την τιμή του αθροίσματος: $\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{k-1}{n} \frac{1}{2^k}$.

Γ3. Μία κληρωτίδα περιέχει 10 σφαίρες δύο χρωμάτων, μαύρες και άσπρες. Τραβάμε με επανάθεση 1000 σφαίρες από την κληρωτίδα και παίρνουμε 420 φορές μαύρη σφαίρα.

Εκτιμήστε (Εκτιμητής Μέγιστης Πιθανοφάνειας – (ΕΜΠ)) τον αριθμό των μαύρων σφαιρών μέσα στην κληρωτίδα (Εάν χρειαστείτε το πρόσημο του αριθμού

$$a = 420 \log 4 + 580 \log 6 - 1000 \log 5,$$

δίδεται ότι $a > 0$).

Διαφορικές Εξισώσεις

Δ1. α. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \varphi(x), & u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

όπου $\varphi(x) = 2\sin x$, $\psi(x) = x$.

β. Έστω ότι $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$ γιά $x \notin (-1,1)$, βρείτε τό χωρίο στό ημιεπίπεδο $(t \geq 0)$ όπου ή λύση είναι ταυτοτικά μηδέν.

Δ2. Αποδείξτε ότι υπάρχει τό πολύ μία δυό φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $u = u(x)$, ή οποία είναι λύση τού προβλήματος Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u - u = f & \text{στο } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u\big|_{\partial\Omega} = g & \text{στό } \partial\Omega. \end{cases}$$

Δ3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_t = u_{xx} \quad \text{στο} \quad (0,T) \times (0,\pi).$$

όπου

α). $u(0,x) = \sin x$ και $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$

β) $u(0,x) = \cos x$ και $u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0$.

Δ4. Θεωρούμε την ΣΔΕ

$$\circledast \begin{cases} x'(t) = (t + x^2(t))\,(1 - x(t)) \\ x(0) = \alpha \end{cases}$$

α) Δείξτε ότι το πρόβλημα $\circledast$ έχει το πολύ μία λύση.

β). Να βρεθεί η λύση για $\alpha = 1$.

γ) Αν $\alpha < 1$, δείξτε ότι

$$\alpha \leq x(t) < 1 \qquad \forall\, t \geq 0,$$

και συμπεράνετε ότι η λύση ορίζεται στο $[0,\infty)$.

Αριθμητική Ανάλυση.

Ε1. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g, $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = e^{x}$, $x \in [0,1]$. Άν $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_5 \leq 1$ και $p, q \in \mathbb{P}_5$ τα πολυώνυμα παρεμβολής των f και g αντίστοιχα στα σημεία $x_0, \dots, x_5$ δείξτε ότι

$$|f(x) - p(x)| \geq \frac{64}{e} \, |g(x) - q(x)|, \quad x \in [0,1].$$

Ε2. Θεωρούμε το πολυώνυμο βαθμού k: $\lambda_k(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{k-2} (x(1-x))^{k-1}$

Δίδεται ότι το λ_k έχει k διαφορετικές ανά δύο ρίζες στο $[0,1]$:

$$0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{k-1} = 1.$$

Έστω $L_j \in \mathbb{P}_{k-1}$ τα πολυώνυμα Lagrange πού αντιστοιχούν στα $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}$.

α) Δείξτε ότι $\circledast$ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{k-1} \omega_j f(\xi_j)$, $\displaystyle\omega_j = \int_0^1 L_j(x)\,dx$ γιά κάθε $f \in \mathbb{P}_{k-1}$.

β) Δείξτε ότι άν $q \in \mathbb{P}_{k-3}$ τότε $\displaystyle\int_0^1 \lambda_k(x)\, q(x)\,dx = 0$.

γ) Χρησιμοποιήστε τό β) γιά νά αποδείξετε ότι η $\circledast$ ισχύει γιά κάθε $f \in \mathbb{P}_{2k-3}$.