ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΡΗΤΗΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ

15 - 7 - 95

(Μέρος Δεύτερο)

Η Επιτροπή

Α. Κουβιδάκης

Χ. Μαυριδάκης

Μ. Παπαδημητράκης

Θέμα 1 Έστω πεπερασμένο αλγεβρικό σώμα F με q στοιχεία.

(α) Αποδείξτε ότι ο αριθμός των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το F είναι ίσος με

$$(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdots(q^n-q^{n-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{k=1}^{n}(q^k-1)$$

(β) Αποδείξτε ότι ο αριθμός των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων που έχουν ορίζουσα 1 με στοιχεία από το F είναι ίσος με

$$q^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{k=2}^{n}(q^k-1)$$

(Υποδ: (β) χρησιμοποιήστε το (α) και κατάλληλη απεικόνιση)

Θέμα 2 (α) Έστω αλγεβρικό σώμα F. Δείξτε ότι τα αντιστρέψιμα στοιχεία του δακτυλίου $F[x]$ (δηλ. πολυώνυμα μεταβλητής x με συντελεστές από το F) είναι ακριβώς τα μη-μηδενικά σταθερά πολυώνυμα.

(β) Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του δακτυλίου $\mathbb{Z}_{10}[x]$.

(Υποδ: (β) Παρατηρήστε ότι το $\mathbb{Z}_{10}$ δεν είναι σώμα· προσπαθήστε να χρησιμοποιήσετε το (α) δουλεύοντας με κατάλληλα σώματα $\mathbb{Z}_p$, p πρώτος)

Θέμα 3 (α) Δείξτε ότι η μοναδική λύση στους θετικούς ακέραιους της εξίσωσης $x^4+9=y^2$ είναι $x=2$, $y=5$.

(β) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και A οποιοδήποτε υποσύνολο του $\{1,2,3,\dots,2n\}$ με $n+1$ στοιχεία. Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον στοιχεία x, y του A ώστε

$$x/y = \text{δύναμη του } 2.$$

Θέμα 4 Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_t(x,t) = k \cdot u_{xx}(x,t) , & x \in \mathbb{R}, \ t \geq 0 \quad (k>0) \\ u(x,0) = x^2 , & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(Υποδ: μπορείτε να αποδείξετε ότι $u_{xxx}(x,t) \equiv 0$ στο $\mathbb{R} \times [0,+\infty)$)

Θέμα 5 Έστω πραγματική συνάρτηση f η οποία είναι δυό φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[0,1]$. Αν ισχύει ότι

(i) $f f'' - (f')^2 \geq 0$ στο $[0,1]$, και

(ii) $f(0) > 0$, $f \geq 0$ στο $[0,1]$

τότε αποδείξτε ότι : $f > 0$ στο $[0,1]$.

Θέμα 6 Έστω $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ σημεία στο $[a,b]$ και $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε ο κανόνας αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$Q(f) := \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού $\leq 2n-2$.

(Δηλ. $Q(p) = \int_a^b p(x)\,dx$ γιά κάθε πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού $\leq 2n-2$)

Αποδείξτε ότι $w_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Θέμα 7 (α) Η συνάρτηση $\dfrac{1}{\sin z - 1}$ αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά στο σημείο $z=0$. Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης και υπολογίστε τους τρείς πρώτους όρους της.

(β) Ποιές είναι οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες τις οποίες πρέπει να πληροί ένα ανοικτό - συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ ώστε να ορίζεται σ' αυτό συνεχής κλάδος της συνάρτησης $\sqrt{z(z-1)}$; Ίδια ερώτηση γιά ολόμορφο κλάδο της ίδιας συνάρτησης. Δώστε παραδείγματα τέτοιων συνόλων.

Θέμα 8. (α) Έστω χώρος Hilbert H και κλειστός υπόχωρος M του H. Έστω f φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον M. Αποδείξτε, χωρίς να κάνετε χρήση του θεωρήματος Hahn-Banach, ότι το f μπορεί να επεκταθεί σ' ολόκληρο του H χωρίς να αυξηθεί η νόρμα του.

(β) Έστω $\ell_2 = \{ x=(x_1,x_2,\dots) \mid \|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty \}$ και $\ell_1 = \{ x=(x_1,x_2,\dots) \mid \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n| < \infty \}$.

Αποδείξτε ότι $\ell_1 \subset \ell_2$. Είναι το ℓ_1 κλειστό υποσύνολο του $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$;

Θέμα 9 (α) Αποδείξτε ότι οι μετρικοί χώροι $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ δεν είναι ομοιομορφικοί. (Υποδ: αφαιρέστε ένα σημείο του $\mathbb{R}^1$)

(β) Έστω $C[0,1]$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$ με την μετρική $\rho(f,g) = \max_{0\le t\le 1} |f(t)-g(t)|$.

Αποδείξτε ότι δεν είναι τοπικά συμπαγής.
(Ένας μετρικός χώρος λέγεται τοπικά συμπαγής αν κάθε στοιχείο του έχει περιοχή με συμπαγή κλειστή θήκη)
Μην χρησιμοποιήσετε κανένα γενικό θεώρημα.

Θέμα 10 Έστω $r=r(s)$ ομαλή καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$ παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου s. Σε κάθε σημείο της παίρνουμε το κάθετο επίπεδο στην καμπύλη και σ'αυτό το επίπεδο χαράζουμε κύκλο με κέντρο το σημείο και με ακτίνα σταθερού μήκους α. Υποθέτουμε ότι μπορούμε να διαλέξουμε το α αρκετά μικρό ώστε η ένωση των παραπάνω κύκλων (καθώς διατρέχουμε τα σημεία της καμπύλης) να σχηματίζει ομαλή επιφάνεια S.

Αποδείξτε ότι η κάθετος της S σε οποιοδήποτε σημείο της περνά από την καμπύλη $r=r(s)$ και είναι κάθετος σ'αυτήν.

Θ 11 Δύο παίκτες, οι Α και Β, παίζουν το εξής παιχνίδι: Ο Α βάζει στο μυαλό του έναν αριθμό, ας τον ονομάσουμε x, ανάμεσα στους $1, \ldots, 128$ και ο Β πρέπει να βρει τον αριθμό αυτό ρωτώντας ερωτήσεις τον Α. Οι κανόνες είναι οι

(I) κάθε ερώτηση του Β είναι της μορφής "Είναι αλήθεια ότι $x > \alpha$;" όπου α ένας από τους $1, \ldots, 128$.

(II) Κάθε απάντηση του Α είναι "Ναι" ή "Οχι" και είναι ειλικρινής.

(III) Όλα τα παραπάνω είναι γνωστά και στους δύο παίκτες.

α) Αποδείξτε ότι ο Β μπορεί με βεβαιότητα να βρει τον x μετά από το πολύ 7 ερωτήσεις ανεξάρτητα από το ποιός είναι ο αριθμός x.

β) Αποδείξτε ότι ο 7 είναι ο μικρότερος τέτοιος αριθμός ερωτήσεων.

γ) Τροποποιήστε τον κανόνα II ως εξής:

(II΄) κάθε απάντηση του Α είναι "Ναι" ή "Οχι" και είναι ειλικρινής εκτός το πολύ μιας φοράς κατά την οποία ο Α μπορεί να απαντήσει ψέματα.

Αποδείξτε ότι ο Β μπορεί να βρει με βεβαιότητα τον x μετά από το πολύ 15 ερωτήσεις.

ΘΕΜΑ 12 (α) Μια ασφαλιστική εταιρία υποθέτει ότι ο αριθμός N των ατυχημάτων ανά διετία του κάθε πελάτη της ακολουθεί κάποια από τις Poisson $(\lambda = k)$, $k = 1, \ldots, 10$, και ταξινομεί τους πελάτες της, κατά την παράμετρο k της Poisson τους, σε 10 κατηγορίες $A_1, \ldots, A_{10}$. Η εταιρεία ξέρει ότι η πιθανότητα ο τυχών πελάτης της να ανήκει στην κατηγορία A_k είναι $p(k) = \frac{k}{55}$, $k = 1, \ldots, 10$. Αν ένας πελάτης της εταιρίας είχε ακριβώς ένα ατύχημα κατά τη διάρκεια της διετίας που ασφαλίζεται με την εταιρία, ποία η πιθανότητα να ανήκει στην κατηγορία A_1;

(β) Έστω η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών (τ.μ.) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, όπου η τ.μ. X_n ακολουθεί την Gamma $(n, 1)$. Δείξτε ότι $Y_n := \frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{d} Y$ και προσδιορίστε την κατανομή της τ.μ. Υ.

(Υπόδειξη: (α) Η τ.μ. Χ ακολουθεί την Poisson (λ), αν $P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x}}{x!}\mathbb{1}(x\in\mathbb{N}_0)$, οπου $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\dots\}$

(β) Η τ.μ. Χ ακολουθεί την Gamma(n,λ) αν $f_X(x)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-\lambda x}$, $x>0$, εχει δε ροπογεννήτρια $M_X(t)=(1+\frac{t}{\lambda})^{-n}$, $t>-\lambda$).

ΘΕΜΑ 13 Εστω στοχαστικό δείγμα $X_1,\dots,X_n$ ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών με κοινή κατανομή την $U(-\Theta,\Theta)$ - ομοιόμορφη στο $(-\Theta,\Theta)$ - με πυκνότητα πιθανότητας

$$f_{X_i}(x|\theta)=\frac{1}{2\theta}\mathbb{1}(|x|<\theta),\quad i=1,\dots,n,\quad \theta\in\Theta=(0,+\infty)$$

(α) Βρείτε την επαρκή και πλήρη στατιστική $T_n=T(X_1,\dots,X_n)$, για την εκτίμηση της παραμέτρου $\theta\in\Theta$.

(β) Βρείτε την Αμερόληπτη Εκτιμήτρια με ομοιόμορφα (ως προς θ) Ελάχιστη Διασπορά, μεταξύ όλων των αμερόληπτων εκτιμητριών της παραμέτρου $\theta\in\Theta$.

(Υπόδειξη: Ενδέχεται να σας χρειασθεί (και πάρτε το χωρίς απόδειξη) κάτι από τα κάτωθι

EX	$Var X$	αν η τ.μ. Χ ακολουθεί την
$(a+\beta)/2$	$(\beta-a)^2/12$	$U(a,\beta)$
a/λ	a/λ^2	Gamma(a,λ)
$a/(a+\beta)$	$\frac{a\beta}{(a+\beta)^2(a+\beta+1)}$	Beta(a,β)

).

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!