ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΡΗΤΗΣ.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ.

(Μέρος δεύτερο)

ΗΡΑΚΛΕΙΟ 24/7/93

Ἡ Ἐπιτροπή
Ι. ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ.
Κ. ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ.
Μ. ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΑΚΗΣ.

1. Ἔστω H μία πεπερασμένη κυκλική κανονική ὑπο-ομάδα τῆς ὁμάδας G. Ἄν K εἶναι μία ὑπο-ομάδα τῆς H ἀποδείξατε ὅτι ἡ K εἶναι κανονική στὴν G.

2(α) Ἔστω s_p τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν πρώτων ἀριθμῶν ἀπὸ 2 ἕως p, δηλ.,

$$s_p = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\dots+\frac{1}{p}.$$

Ἀποδείξατε ὅτι, γιὰ κάθε πρῶτο ἀριθμὸ p, τὸ s_p δὲν εἶναι ἀκέραιος.

(β) Ἀποδείξατε ὅτι ὅλοι οἱ συντελεστὲς τοῦ διωνυμικοῦ ἀναπτύγματος $(\alpha+\beta)^n$ εἶναι περιττοὶ ἄν, καὶ μόνον ἄν, ὁ n εἶναι τῆς μορφῆς 2^k-1 ὅπου k φυσικός.

3. Ἔστω $(X,\le)$ ἕνα ὁλικῶς καὶ καλῶς διατεταγμένο σύνολο καὶ $f:X\longrightarrow X$ γνησίως αὔξουσα συνάρτηση.

(α) Ἀποδείξατε ὅτι $f(x)\ge x$ γιὰ κάθε $x\in X$.

(β) Ἄν κάθε ὑποσύνολο τοῦ X ἔχει ἄνω φράγμα τότε ἀποδείξατε ὅτι ὑπάρχει $x_0\in X$ ὥστε $f(x_0)=x_0$.

4. Προσδιορίσατε ὅλες τὶς ἐπιφάνειες τοῦ $\mathbb{R}^3$ τῶν ὁποίων ἡ κάθετος διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σταθερὸ σημεῖο.

5. Ἔστω (X,d) μετρικὸς χῶρος. Ἀποδείξατε ὅτι

(α) ἄν ὁ X εἶναι συνεκτικὸς τότε γιὰ κάθε $\varepsilon>0$ καὶ $x,y\in X$ ὑπάρχουν $x_0,\dots,x_n\in X$ μὲ $x=x_0$, $y=x_n$ καὶ $d(x_k,x_{k+1})<\varepsilon$ γιὰ κάθε $k=0,\dots,n-1$.

(β) Ὅταν ὁ X εἶναι συμπαγὴς ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφο τοῦ (α).

6. Ἔστω $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, $D=\{z\in\hat{\mathbb{C}}: |z|<1\}$, $D'=\{z\in\hat{\mathbb{C}}: |z|>1\}$, καὶ $f:\hat{\mathbb{C}}\longrightarrow\hat{\mathbb{C}}$ μὲ $f(z)=z+\frac{1}{z}$.

(α) Ἀποδείξατε ὅτι ἡ $f|_D$ καθὼς καὶ ἡ $f|_{D'}$ εἶναι 1-1 καὶ νὰ βρεθοῦν τὰ $f(D)$ καὶ $f(D')$.

(β) Ὑπολογίσατε τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_\gamma f(z)\,dz$$

ὅπου γ ἡ καμπύλη $(x-1)^2+4y^2=4$.

7. Ἔστω $X = C[0,1]$, ὁ χῶρος Banach τῶν συνεχῶν συναρτήσεων $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ μὲ norm

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x\in[0,1]\}$$

καὶ ἡ γραμμικὴ μορφὴ $T: X\longrightarrow\mathbb{R}$

$$T(f) := \int_0^{1/2} f(x)\,dx - \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx$$

(α) Ἀποδείξατε ὅτι ἡ T εἶναι φραγμένη.
(β) Ὑπολογίσατε τὸ norm τῆς T.

8. Ἀποδείξατε ὅτι οἱ ἐξισώσεις

(α) $(1-x)y''+xy'-y=0$ (β) $2x(2x-1)y''-(4x^2+1)y'+(2x+1)y=0$.

ἔχουν μία κοινὴ λύση. Νὰ εὑρεθῆ αὐτὴ ἡ κοινὴ λύση καὶ νὰ λυθοῦν οἱ δύο ἐξισώσεις.

9. Ἀποδείξατε ὅτι ὅλες οἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$uu_{xy}-u_xu_y=0$$

εἶναι τῆς μορφῆς $u(x,y)=f(x)\,g(y)$ καὶ ἀντιστρόφως.

10. Ἔστω $f\in C^5([0,1])$ καὶ p πολυώνυμο τετάρτου βαθμοῦ οὕτως ὥστε

$$p(0)=f(0), \quad p^{(i)}(1)=f^{(i)}(1), \quad i=0,1,2,3.$$

Προσδιορίσατε μία παράσταση τοῦ σφάλματος $f(x)-p(x)$ μὲ τὴν βοήθεια τῆς πέμπτης παραγώγου τῆς f.

11. Ἔστω $A=(A_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ ἕνας ἀντιστρέψιμος πίνακας οὕτως ὥστε

$$\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}| = \text{σταθ.}, \quad i=1,\dots,n,$$

καὶ $D=\mathrm{diag}(D_1,\dots,D_n)$ ἕνας διαγώνιος ἀντιστρέψιμος πίνακας. Δείξατε ὅτι ὁ δείκτης καταστάσεως τοῦ A ὡς πρὸς τὴν νόρμα μεγίστου εἶναι μικρότερος ἢ ἴσος ἀπὸ τὸν ἀντίστοιχο δείκτη καταστάσεως τοῦ DA.

12. Ἔστω (στοχαστικὸ) δεῖγμα $X_1,X_2,\dots,X_n$ ἀπὸ ἀνεξάρτητες καὶ ἰσόνομες τυχαῖες μεταβλητές, οἱ ὁποῖες προέρχονται ἀπὸ τὴν κατανομὴ μὲ πυκνότητα

$$\lambda\exp\{-\lambda(x-\theta)\}\,1(x\geq\theta), \quad (\theta,\lambda)\in\Theta\equiv\mathbb{R}\times(0,\infty).$$

(α) Βρῆτε τὴν ἐκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφανείας $(\hat\theta,\hat\lambda)$ τῆς παραμέτρου $(\theta,\lambda)\in\Theta$.
(β) Βρῆτε τὴν ἀσυμπτωτικὴ κατανομὴ τῆς ἐκτιμήτριας $\hat\lambda$.

13. Ψύλλος κινεῖται τυχαίως στό ἐπίπεδο μέ πηδήματα σταθεροῦ μήκους a καί πρός διεύθυνση τυχαία σέ κάθε βῆμα. Οἱ διευθύνσεις εἶναι ἀνεξάρτητες μεταξύ των καί ὁμοιόμορφες στό $[0,2\pi]$. Ἐάν ὁ ψύλλος ξεκινήσει ἀπό τήν ἀρχή Ο τῶν ἀξόνων, ἔστω (X_ν, Y_ν) ἡ θέση του μετά ἀπό ν πηδήματα.

(α) Βρῆτε $E(X_\nu), E(Y_\nu), \Delta(X_\nu), \Delta(Y_\nu), E(R_\nu^2)$ ὅπου $R_\nu^2 = X_\nu^2 + Y_\nu^2$.

(β) Ἀποδείξατε ὅτι X_ν, Y_ν εἶναι ἀσυσχέτιστες ἀλλά ὄχι ἀνεξάρτητες

(γ) Νά βρεθῆ ἡ κατανομή τοῦ (X_ν, Y_ν) γιά μεγάλα ν $(\nu \to \infty)$ καί ἡ πυκνότητα τῆς R_ν. Ποιά ἡ ἀναμενόμενη ἀπόσταση τοῦ ψύλλου ἀπό τήν ἀρχή Ο.