ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΡΗΤΗΣ.

# ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ.

(Μέρος πρώτο)

ΗΡΑΚΛΕΙΟ 23/7/93


Ἡ Ἐπιτροπή
Ι. ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ.
Κ. ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ.
Μ. ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΑΚΗΣ.

1(α) Γιά κάθε $-\infty < \alpha < +\infty$ ὑπολογίσατε

$$f(\alpha) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{\alpha}} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{i}}$$

(β) Ὑπολογίσατε

$$\int_0^{\alpha\sin\beta} \left\{ \int_{y\cot\beta}^{\sqrt{\alpha^2-y^2}} \log(x^2+y^2)\,dx \right\} dy$$

ὅπου $\alpha>0$ καί $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

2. Ἔστω $f:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$ μέ συνεχῆ δεύτερη παράγωγο καί $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$. Ἀποδείξατε ὅτι ὑπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ οὕτως ὥστε

$$f''(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{(\beta-\alpha)^2}$$

3. Ἔστω $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ συνεχής μέ $\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=h$ καί $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=k$ ὅπου $h,k\in\mathbb{R}$. Ἀποδείξατε ὅτι

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(x-\alpha)-\varphi(x-\beta)\right]dx = -(\alpha-\beta)(h-k)$$

γιά ὁποιαδήποτε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

4. Ἔστω $f:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ δίς παραγωγίσιμη, μέ φραγμένη δεύτερη παράγωγο καί $f(x)\longrightarrow 0$ ὅταν $x\longrightarrow\infty$. Ἀποδείξατε ὅτι $f'(x)\longrightarrow 0$ ὅταν $x\longrightarrow\infty$.

5. Ὑπολογίσατε

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=1} H(x,y,z)\,dS$$

ὅπου $H(x,y,z) := x^4+y^4+z^4+3x^2y^2+3x^2z^2+3y^2z^2$

(Ὑπόδειξη: Ἀποδείξατε ὅτι γιά κάθε ὁμογενῆ συνάρτηση $f$ βαθμοῦ $\alpha$, ἤτοι $f(tx,ty,tz)=t^{\alpha}f(x,y,z)$ $t>0$., ἰσχύει

$$\alpha f(x,y,z) = x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\Big).$$

6. Ἔστω $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ διαφορίσιμη καὶ $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}>0$ γιὰ κάθε $(x,y,z)\neq(0,0,0)$. Ἀποδείξατε ὅτι ἡ $f$ ἔχει ἐλάχιστο στὸ $(0,0,0)$.

7. Ἔστω $A$ $3\times3$ ὀρθογώνιος πίνακας μὲ ὁρίζουσα

1. Ἀποδείξατε ὅτι

(α) $A$ ἔχει ὡς ἰδιοτιμὴ τὴν μονάδα.

(β) $A$ εἶναι ὅμοιος μὲ

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

γιὰ κάποια γωνία $\theta$.

(γ) ἐὰν $A\neq I$ τότε ὁ ἰδιόχωρος ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἰδιοτιμὴ 1. εἶναι μονοδιάστατος.

8. Ἔστω $M$ ὁ διανυσματικὸς χῶρος τῶν $n\times n$ πινάκων καὶ $T: M\longrightarrow M$ ὁρίζεται ὡς

$$T(X)=AX \qquad \forall\, X\in M$$

γιὰ κάποιο συγκεκριμένο στοιχεῖο $A$ τοῦ $M$. Ἀποδείξατε ὅτι

(α) $T$ καὶ $A$ ἔχουν τὶς ἴδιες ἰδιοτιμές.

(β) $\det(T)=(\det A)^n$

9. Ἔστω $V$ διανυσματικὸς χῶρος διαστάσεως $n$ καὶ $T: V\longrightarrow V$ μία γραμμικὴ ἀπεικόνησις οὕτως ὥστε $T^2=I$. Ἀποδείξατε ὅτι

(α) $V=U\oplus W$ ὅπου $U:=\{x\in V:\ Tx=x\}$ καὶ $W:=\{x\in V:\ Tx=-x\}$

(β) $\operatorname{rank}(T-I)+\operatorname{rank}(T+I)=n.$