Εισαγωγικές Εξετάσεις

στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα

του Μαθηματικού Τμήματος

Πανεπιστημίου Κρήτης

Μέρος Α'

13 Δεκεμβρίου 1996

Η επιτροπή

Γ. Κοσιώρης

Μ. Παπαδημητράκης

Ν. Τζανάκης

Θέμα 1 Έστω $\alpha_1 = 1$, $\alpha_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+\alpha_n}$. Εξετάζοντας τις υπακολουθίες των άρτιων και των περιττών όρων, ή με άλλον τρόπο, αποδείξτε ότι $\alpha_n \to \sqrt{2}$.

Θέμα 2 Βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{ \sqrt[\nu]{x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \dots + \alpha_\nu} - \sqrt[\nu]{x^\nu + \beta_1 x^{\nu-1} + \dots + \beta_\nu} \right\}$$

Θέμα 3 Έστω $\alpha < \beta$ και $P(x) = \left(\dfrac{d}{dx}\right)^{100} \{(x-\alpha)(x-\beta)\}^{100}$.
Αποδείξτε ότι το $P(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού 100, και ότι $\int_\alpha^\beta P(x)\,\phi(x)\,dx = 0$, για κάθε πολυώνυμο $\phi(x)$ βαθμού ≤ 99.

Θέμα 4 Έστω ότι η πραγματική συνάρτηση f έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι και τρίτης τάξης στο διάστημα $[0, h]$. Επίσης $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, και $A \leq f'''(x) \leq B$ όταν $0 \leq x \leq h$. Αποδείξτε, χωρίς να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα του Taylor, ότι $\frac{A}{6}x^3 \leq f(x) \leq \frac{B}{6}x^3$ στο $[0,h]$.

Θέμα 5 f, h είναι πραγματικές συναρτήσεις στο $[0,1]$ εκ των οποίων η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$. Υποθέτουμε ότι

$f(0) = f(1) = 0$ και $f'(x)h(x) = f(x)$ όταν $0 \leq x \leq 1$.

Αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

Θέμα 6 Έστω ότι η πραγματική συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ και ότι $f'(x) \geq M > 0$ όταν $0 \leq x \leq 1$. Αποδείξτε ότι υπάρχει υποδιάστημα του $[0,1]$ μήκους $\frac{1}{4}$ στο οποίο ισχύει ότι $|f(x)| \geq \frac{M}{4}$. (Είναι πιθανόν η εξέταση του γραφήματος της f να βοηθήσει.)

Θέματα γραμμικής άλγεβρας

1. α) Εστω $\mathbb{P}^3$ ο χώρος των πολυωνύμων το πολύ βαθμού 3 στο $[-1, 1]$ με εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από την απεικόνιση $f: \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$f(p, q) = \int_{-1}^{+1} p(x)\, q(x)\, dx$$

Να βρεθεί μιά ορθοκανονική βάση της οποίας το πρώτο στοιχείο νά είναι ένα σταθερό πολυώνυμο.

β) Να βρεθεί το πολυώνυμο το οποίο ελαχιστοποιεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{+1} p^2(x)\, dx \quad , \quad p(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + x^3$$

2. α) Νά λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + (1-m) z = m+2 \\ (1+m) x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases}$$

γιά τις διάφορες τιμές του m και να περιγραφεί πλήρως ο χώρος των λύσεων.

β) Να βρεθεί ο πίνακας 2×2 που προβάλλει το επίπεδο $x-y$ στην ευθεία $x+y=0$. Αν P είναι ο πίνακας προβολής και $H = I - 2P$, εξηγείστε γεωμετρικά και αλγεβρικά γιατί $H^2 = I$

3. Ορίσατε ένα γραμμικό μετασχηματισμό $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ο οποίος απεικονίζει τα διανύσματα της βάσης

$X_1 = (1, 0, 0)$, $X_2 = (1, 1, 0)$, $X_3 = (1, 1, 1)$ στά
$Y_1 = (1, 3)$, $Y_2 = (4, 2)$, $Y_3 = (3, 0)$, αντίστοιχα.
Δείξτε οτι υπάρχει μόνο ένας τέτοιος μετασχηματισμός
T του οποίου να βρείτε τον πίνακα αναπαράστασης
ως πρός την κανονική βάση.

4. a) Βρεθεί μιά ορθοκανονική βάση του υπόχωρου
που ορίζεται από τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

b) Δείξτε οτι η ορίζουσα ενός πίνακα ισούται μέ το
γινόμενο των ιδιοτιμών του.