ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Λεωφ. Κνωσού (Τ.Θ. 2208) 714 09 Ηράκλειο Κρήτης, Τηλ: (081) 234516, 232156, Fax: (081) 234516

Ἐξετάσεις εἰσαγωγῆς

στό Μεταπτυχιακό Τμῆμα

Μέρος Β'

Σάββατο 13 Ἰουλίου 1996.

<u>ΑΛΓΕΒΡΑ – ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ</u>

1. α) Ὑπολογίστε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως $(12371^{74}+18)^{80}$ διά 111.

β) Βρεῖτε ἕνα μονομορφισμό ὁμάδων $\phi : (\mathbb{Z}_3,+) \longrightarrow (\mathbb{Z}_{18},+)$ καί γράψτε τά στοιχεῖα τῆς ὁμάδος $\mathbb{Z}_{18}/\mathrm{Im}\phi$.

γ) Ἄν οἱ θετικοί ἀκέραιοι m, n εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους, τότε $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$ (ἰσομορφισμός ὁμάδων). Τί συμπεραίνετε, βάσει αὐτοῦ, γιά τό εἶδος τῆς ὁμάδος $\mathbb{Z}_{18}/\mathrm{Im}\phi$ τοῦ (β);

δ) Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ συμμετρική ὁμάδα S_4 ἔχει μία τουλάχιστον ὑποομάδα τάξεως 8, δίχως νά χρησιμοποιήσετε Sylow (σκεφτεῖτε μόνο "γεωμετρικά"). Στή συνέχεια, βρεῖτε πόσες <u>ἀκριβῶς</u> ὑποομάδες τάξεως 8 ἔχει ἡ S_4 καί γράψτε ὅλα τά στοιχεῖα να δύο ἀπό αὐτές τίς ὑποομάδες.

Σημείωση: Ἐν γένει, γιά τά στοιχεῖα τῆς ὁμάδος $\mathbb{Z}_\nu$ χρησιμοποιεῖτε τόν συμβολισμό $[a]_\nu$, ἀλλά μόνο στό παραπάνω θέμα.

2. α) Ἀποδεῖξτε ὅτι καμμία ρίζα τοῦ $x^3-2 \in \mathbb{Q}[x]$ δέν ἀνήκει στό $\mathbb{Q}$, δίχως, φυσικά, νά πάρετε ὡς δεδομένο ὅτι $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

β) Κατασκευάστε τό ἐλάχιστο δυνατό σῶμα K, τό ὁποῖο περιέχει μία ρίζα ρ τοῦ $x^3-2 \in \mathbb{Q}[x]$. Ἡ κατασκευή σας νά εἶναι ἐντελῶς ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ὕπαρξη τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Τό K περιέχει <u>ὅλες</u> τίς ρίζες τοῦ x^3-2; Αἰτιολογήστε. Ὑπολογίστε τό $(2+\rho)^{-1}$ ὡς πολυωνυμική ἔκφραση τοῦ ρ, μέ συντελεστές ἀπ' τό $\mathbb{Q}$.

γ) Κατασκευάστε τό ἐλάχιστο δυνατό σῶμα K, τό ὁποῖο περιέχει μία ρίζα ρ τοῦ $x^3-2 \in \mathbb{Z}_5[x]$, $\rho \notin \mathbb{Z}_5$. Τό K περιέχει <u>ὅλες</u> τίς ρίζες τοῦ x^3-2; Αἰτιολογήστε. Ὑπολογίστε τό $(2+\rho)^{-1}$ ὡς πολυωνυμική ἔκφραση τοῦ ρ, μέ συντελεστές ἀπ' τό $\mathbb{Z}_5$.

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ – ΛΟΓΙΚΗ

1. Έστωσαν S, T σύνολα. Ας συμβολίσουμε με K το σύνολο όλων των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το S και τιμές στο T.
Έστω $(A_{s,t})_{s\in S, t\in T}$ οικογένεια συνόλων. Αποδείξτε ότι:

$$\bigcap_{s\in S} \bigcup_{t\in T} A_{s,t} = \bigcup_{f\in K} \bigcap_{s\in S} A_{s,f(s)}$$

2.(α) Έστω p προτασιακή μεταβλητή. Ορίζουμε αναδρομικά τους τύπους Φ_n $(n\in \mathbb{N})$ ως εξής: Φ_1 είναι το p, Φ_{n+1} είναι ο τύπος $\Phi_n \Rightarrow p$.
Εξετάστε για ποιά n ο τύπος Φ_n είναι ταυτολογία.

(β) Ας υποθέσουμε ότι οι ακόλουθες προτάσεις

$p_1 \Rightarrow q_1, \dots, p_n \Rightarrow q_n$

$p_1 \vee \dots \vee p_n$

$\sim(q_i \wedge q_j)$ για $1 \leq i < j \leq n$

είναι αληθείς. Αποδείξτε ότι τότε και οι προτάσεις

$q_1 \Rightarrow p_1, \dots, q_n \Rightarrow p_n$

είναι επίσης αληθείς.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Δίνεται ἡ ἐπιφάνεια $M=\phi(\mathbb{R}^2)$, ὅπου $\phi:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μέ τύπο

$$\phi(u,v) = (u\cdot\cos v,\ u\cdot\sin v,\ v)$$

α) Γιά κάθε $p\in M$ νά δοθεῖ μιά βάση τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου T_pM.

β) Γιά κάθε $p\in M$ νά ὑπολογιστεῖ ἡ καμπυλότητα Gauss.

γ) Στό σημεῖο $p=(1,0,0)\in M$ νά ὑπολογισθοῦν οἱ κύριες καμπυλότητες καί νά βρεθοῦν οἱ κύριες διευθύνσεις ὡς πρός μία βάση τοῦ T_pM.

δ) Μέ βάση τά ἀποτελέσματα τῶν ὑπολογισμῶν σας, περιγράψτε γεωμετρικά τήν M, τοπικά γύρω ἀπό τό σημεῖο $p=(1,0,0)$ καί ἐξηγεῖστε τή σημασία τῶν κυρίων διευθύνσεων καί τῶν κυρίων καμπυλοτήτων.

Θέματα Ανάλυσης

1. Έστω $C[0,1]$ ο χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο διάστημα $[0,1]$. Αν, για $f, g \in C[0,1]$,

$$\rho(f,g) = \max_{0 \le x \le 1} |f(x) - g(x)|$$

τότε ο $(C[0,1], \rho)$ είναι μετρικός χώρος.

Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$\{ f \in C[0,1] \; : \; |f(x) - f(y)| \le 3|x-y| \; , \; 0 \le x, y \le 1 \}$$

είναι κλειστό υποσύνολο του $C[0,1]$.

2. (α) Αν γ είναι οποιαδήποτε ομαλή καμπύλη στο $\mathbb{C}$ με άκρα το 0 και το 1 η οποία δεν περνάει από τα $\pm i$, βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του επικαμπύλιου ολοκληρώματος

$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2} .$$

(β) Έστω ότι η $f(z)$ είναι ολόμορφη στο $D = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2 \}$ και δεν έχει ουσιώδη ανωμαλία στο 0. Θεωρούμε την συνάρτηση $F(z) = \int_1^z f(\zeta)\,d\zeta$, $z \in D$ για τυχούσα ομαλή καμπύλη η οποία συνδέει το 1 με το z και περιέχεται στο D. Βρείτε ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε

(i) η $F(z)$ να είναι μονότιμη στο D.

(ii) η $F(z)$ να είναι ολόμορφη στο $D \cup \{0\}$.

3. (α) Έστω ℓ^2 ο χώρος Hilbert των τετραγωνικά αθροίσιμων (πραγματικών) ακολουθιών $x = (x_n)$, με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n .$$

Έστω $S = \{ x \in \ell^2 \; : \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} = 0 \}$

Βρείτε όλα τα συνεχή γραμμικά συναρτησοειδή f του ℓ^2 για τα οποία ισχύει ότι $\ker f := \{ x \in \ell^2 : f(x) = 0 \} = S$

(β) Έστω χώρος Banach $(X, \|\cdot\|)$ και εγκιβωτισμένες κλειστές μπάλες $B_n = \{ x \in X : \|x - x_n\| \le r_n \}$.

Αποδείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$

(Υπόδειξη : μπορείτε να εξετάσετε την ακολουθία των κέντρων x_n).

Θέματα διαφορικών εξισώσεων

1 (α) Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + 16te^{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y \end{cases}$$

(β) Θεωρείστε το συνοριακό πρόβλημα
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x(1+y), & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Να δείξετε ότι έχει μοναδική λύση (χωρίς να κάνετε χρήση κάποιου γενικού θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας).

2. Θεωρείστε το πρόβλημα θερμότητας σε μια σφαίρα B_R ακτίνας R:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u & \text{στο } B_R \\ u\big|_{t=0} = \psi(r), & \dfrac{\partial u}{\partial r} + hu = 0 \quad \text{για } r = R > 0 \end{cases}$$
όπου $h > 0$ σταθερά.

(α) Να γραφεί το πρόβλημα σε σφαιρικές συντεταγμένες.

(β) Να βρεθούν οι ιδιοσυναρτήσεις στις οποίες μπορεί να αναπτυχθεί η λύση του παραπάνω προβλήματος σε σειρά.

(γ) Να γραφεί η λύση σε ανάπτυγμα σε σειρά και να περιγραφεί πώς υπολογίζονται οι σταθερές που εμφανίζονται στο ανάπτυγμα.

(Υπόδειξη: $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \dfrac{\cot\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r^2 \sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$)

Θέμα Αριθμητικής Ανάλυσης

- Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια γνήσια αύξουσα και γνήσια κυρτή C^2 συνάρτηση. Έστω x^* ρίζα της f. Αν $\{x_n\}$ είναι η επαναληπτική ακολουθία της μεθόδου του Newton με αρχική τιμή x_0 αποδείξτε ότι, για οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$, ισχύει $x_n \longrightarrow x^*$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

1. α) Δεῖξτε ὅτι ἡ συνάρτηση πυκνότητος πιθανότητος τῆς μεταβλητῆς $Z = X + Y$, ὅπου X, Y εἶναι ἀνεξάρτητες τυχαῖες μεταβλητές μέ συναρτήσεις πυκνότητος πιθανότητος f_X καί f_Y, ἀντιστοίχως, δίνεται ἀπ' τή σχέση

$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(a-y) \cdot f_Y(y)\, dy \,.$$

β) Ἔστω ὅτι δύο ἄτομα συμφωνοῦν νά συναντηθοῦν μιά ὁρισμένη μέρα σ' ἕνα καθορισμένο μέρος μεταξύ τῶν χρον. στιγμῶν α ꞔ $\alpha+\beta$ $(\alpha, \beta > 0)$ καί ὅτι ὁ καθένας δέν μπορεῖ νά περιμένει τόν ἄλλο περισσότερο ἀπό χρόνο θ $(\theta < \beta)$. Ὑποθέτοντας ὅτι ὁ καθένας εἶναι τό ἴδιο πιθανό νά φθάσει ὁποιαδήποτε στιγμή τοῦ προκαθορισμένου χρονικοῦ διαστήματος καί ἀνεξάρτητα ἀπ' τόν ἄλλο, νά ὑπολογισθεῖ ἡ πιθανότητα νά συναντηθοῦν.

2. Ἔστω $X \sim \mathcal{N}(m, 1)$ ꞔ $X_1, \ldots, X_n$ τυχαῖο δεῖγμα ἀπό την X. Δεδομένου ὅτι τό m εἶναι ἄγνωστο ꞔ a, b δεδομένοι πραγματικοί ἀριθμοί $(a < b)$, πρόκειται νά ἐκτιμήσουμε τό

$$\theta = g(m) = \int_a^b dP_X \,.$$

α) Ἄν N_1 εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν παρατηρήσεων πού ἀνήκουν στό $[a, b]$, δεῖξτε ὅτι τό N_1/n εἶναι ἕνας ἀμερόληπτος ἐκτιμητής τοῦ θ.

β) Χρησιμοποιώντας τό (α) κατασκευάστε ἕναν ἀμερόληπτο ἐκτιμητή τοῦ θ, ὁμοιόμορφα ἐλάχιστης διασπορᾶς.

Τί συμπεραίνετε;