

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ

3-2-1984

+ ~~V~~ ~~⊗~~ n. d. o. $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt < 2,5$

~~V~~ ~~⊗~~ Γράψτε τις πράξεις $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ σαν γινόμενο αντιμεταθετών.

+ ~~V~~ ~~⊗~~ Υπάρχει αντίστροφος πίνακας A (2×2) τέτοιος ώστε $A^{-1}BA$ να είναι διαγώνιος, όταν $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; Αν ναι βρείτε τον.

~~V~~ ~~⊗~~ Υπάρχει συνάρτηση (αρχαία) $y(x)$ που να φρασσάται των $y' = y^2$ και των αρχικών συνθηκών $y(0) = 1$ στο διάστημα $0 \leq x < 3$; Αν ναι βρείτε τον.

+ ~~V~~ ~~⊗~~ Βρείτε τα σημεία (x, y, z) της επιφάνειας $x^2 + y^2 - z^2 = 2$ στα όρια τα εφαιρώκελο έμμετρο είναι κατόπιν στο διάστημα $(1, 1, 1)$.

~~V~~ ~~⊗~~ Πόσο άσπασμα/ται το (δυνατό ως ϵ) $2 < \operatorname{Re} z = x < 3$ μέσω της e^z ; Για έρωτηση για τα $\operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < 2$. Υπάρχει εύκολο στο ϵ που προέρχεται από το 0 τέτοιο ώστε να υπάρχει το όριο $\tau(\epsilon), e^z$ για $z \rightarrow \infty$ κατά μήκος των άσπαστων άξων; Αν ναι βρείτε τον.

~~V~~ ~~(*)~~ ~~⊗~~ Έστω A το σύνολο των K που αντιστοιχούν από τους πραγματικούς αριθμούς και στο δεκαδικό σύστημα μπορούν να γραφτούν των χωρίων να χρησιμοποιούνται το ψηφίο 5 (έτσι η.χ. τα διαστήματα $(k+0,5, k+0,6), (k+0,25, k+0,26), k$ άκραιο, και $\forall k$ περίπου ηολίχονται στο σύστημα του A). Έλεγχτε τις όριότητες των προτάσεων!

12 Δίνεται $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 22 \\ 0 & 2 & 44 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Βρείτε τον πίνακα $A^3 - 13A^2 + 50A$

13 Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_A (x+y) d\sigma$ όπου A το τρίγωνο με κορυφές $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

14 Ποιές από τις παρακάτω σειρές συγκλίνουν;

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n}, \quad \sum_{n=8}^{\infty} \frac{n^2 + 5n - 2}{n^6 - 7n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^3}$$

15 Δίνεται η συνάρτηση

$$\phi(x) = \int_0^{\sin x} \frac{e^t}{t+x} dt, \quad 0 < x < \pi/2$$

Βρείτε μια έκφραση για την $\frac{d\phi}{dx}$ και βρείτε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x)$.

16 Δίνεται η καμπύλη $\vec{r}(t) = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j} + t^2\vec{k}$, $-\infty < t < \infty$. Δείξτε ότι βρίσκεται πάνω σ'ένα κυκλικό κύλινδρο και βρείτε την εξίσωση του εγγύζοντος επιπέδου και την ακτίνα καμπυλότητός του στα σημεία $(1,0)$ στο επίπεδο (x,y) .

17 Έστω P το σύνολο $P = \left\{ \sum_{k,\lambda=0}^{\infty} a_{k\lambda} x^k y^\lambda, a_{k\lambda} \in \mathbb{R} \right\}$.

Ποιά είναι P_1 για το P με τις πράξεις πρόσθεσης (συνήθως κορυφή) και πολλαπλασιασμού επί πραγματικό αριθμό

Γράφουμε P_2 γὰ τὸ P μὲ τὴν πράξη τῶν πολλαπλασιαστικῶν δύο πολυωνύμων.

Γράφουμε P_3 γὰ τὸ P μὲ τὴν πράξη τῆς πρόσθεσης, πολλαπλασιαστικῶν ἐπὶ πραγματικῶ ἀριθμῶ καὶ πολλαπλασιαστικῶν δύο πολυωνύμων.

Εἶναι τὸ P_2 ὁμάδα; Εἶναι τὸ P_3 δακτύλιος; Εἶναι τὸ P_3 ἄλγεβρα; Τὸ ὑποσύνολο τῶν P πῶς ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τῶν P καὶ μηδενίζονται γὰ $x=0$, εἶναι ὑπόχωρος τῶν P_1 ; Εἶναι ὑποδακτύλιος τῶν P_3 ; Εἶναι ἰδεώδες τῶν P_3 ; ἢ/δια ἐρώτησι γὰ τὰ στοιχεῖα τῶν P καὶ μηδενίζονται γὰ κάθε (x,y) καὶ ἐπαληθεύει $2x^2 - y^2 = 1$. Βρῆτε ἓνα κύριο ἰδεώδες τῶν P_3 διάφορο τῶν $\{0\}$.



Νὰ δεῖχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x^3 + x^2 - 1 = 0$ ἔχει μόνο μια πραγματικὴ ρίζα ρ καὶ ὅτι $0 < \rho < 1$. Νὰ δεῖχθῇ ὅτι γὰ κάθε $x_0, 0 < x_0 < 1$ ἢ ἀκολουθεῖα x_0, x_1, x_2, \dots προσεγγίσεων τῆς ρ καὶ δίνεται κλύων μέθοδος τῶν Newton συγκλίνει εἰς ρ . Τι συμβαίνει ἂν $x_0 = 0$?

Έστω \mathbb{O} άνοιχτό μη κενό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 . Μια κλειστή γραμμή γ στο \mathbb{O} λέγεται εμπλεκτική με

στο \mathbb{O} αν μπορεί να συμπληρωθεί σε ένα σύνολο με συνεχή παραμόρφωση χωρίς να βγει έξω από το \mathbb{O} .

Α γ λέγεται εμπλεκτική με \mathbb{O} αν \mathbb{O}

δεν είναι απλοειδής $\Rightarrow \gamma$ ως προς κάποιο σύνολο \mathbb{O} \Rightarrow \exists $\vec{r} = \vec{r}(t)$ \in \mathbb{O} \Rightarrow $\vec{r}(0) = \vec{r}(1)$ \neq $\vec{r}(0)$

και $\vec{a} \neq \vec{0}$ τότε $\vec{r} - \vec{a}$ διαφέρει ουδέποτε για $\vec{0}$ όταν το \vec{r} διατρέχει γ (πληρως)

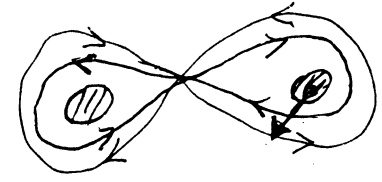
Δηλαδή ότι υπάρχουν \mathbb{O} και γ .

έτσι ώστε γ να είναι εμπλεκτική με \mathbb{O}

ή όχι εμπλεκτική. (Πάρτε για \mathbb{O} το εσωτερικό

του δίσκου D^2 και γ την περιφέρεια S^1 και

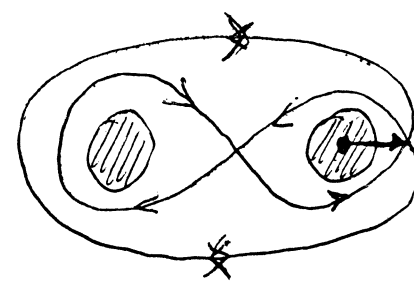
διαλέξτε \mathbb{O} έτσι ώστε να περιβάλλει μη κενό υπόσύνολο του κινδύου \mathbb{O}).



Σημείωση ΔΕΝ $\int \gamma \vec{a}$ αόριστοτητα.

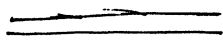
Χρησιμοποιήστε το \mathbb{O} ώστε \mathbb{O} $\neq \mathbb{O}$ και να τα ενοχλήσει

παρα σε διαδοχικά.



(*) ~~90~~ Έστω μια λύση ~~u~~ u με ορισμένες παρατηρήσεις
 ως εξής $u_t + u u_x = 0$. Δείξτε ότι η u
 είναι σταθερή πάνω στις εφελκυστικές γραμμές
 της $\frac{dx}{dt} = u(x,t)$ και συμπεραίνει ότι οι γραμμές
 αυτές είναι καμπύλες. Χρησιμοποιώντας την παρατήρηση
 αυτή για να βρείτε μια σχέση μεταξύ των $u(x,t)$
 και $u(x,0)$.

(Μπορείτε να γράψετε όλη βασίδια φάση σχετική με
 τα ίδια δεδομένα παρατηρήσεις v.v.).



Γράψτε ότι μπορείτε σε 4 ώρες.
 Οι λύσεις με δεδομένα έχουν μεγαλύτερο βάρος.