Το διαγωνισμα εχει 23 ερωτηματα.
Προφανως, δεν περιμενουμε να τα γραψετε ολα. Απαντειστε σε οσα μπορειτε μεσα σε 4 ωρες με σαφηνεια και πληροτητα, αλλα χωρις περιττες πολυλογιες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Β. Δουγαλης

Π. Παμφιλος

Σ. Παπαδοπουλου

28/7/86

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΠΑΝ/ΜΙΟΥ ΚΡΗΤΗΣ

28.7.86

1) Δίνεται μια συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο. Θεωρείστε τη συνάρτηση

$$u(x,y) = \int_{x-\frac{y}{2}}^{x+\frac{y}{2}} g(s)\,ds, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Αποδείξτε ότι

$$u_{yy} = \frac{1}{4} u_{xx}$$

και υπολογίστε τη συνάρτηση $u_y(x,0)$.

2) Θεωρείστε τη συνάρτηση $u(x,t)$, που ορίζεται για $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ με τον τύπο

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{x}{t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι $\lim_{t \to 0+} u(x,t) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αλλά ότι η u δεν είναι συνεχής.

3) Αποδείξτε τις ανισότητες:

α) $x^2 + 1 \leq 2^x$, $0 \leq x \leq 1$,

β) $2^{-x} + 2^{-\frac{1}{x}} \leq 1$, $x > 0$.

4) Έστω $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ μια ακολουθία, τέτοια ώστε η δυναμοσειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ να συγκλίνει απόλυτα

για καθε $z \in \mathbb{C}$. Για $N = 1, 2, 3, \ldots$ η συναρτηση $f_N(z) = \sum_{k=1}^{N} a_k z^k$ εχει, ως γνωστον, ακριβως N ριζες στο $\mathbb{C}$ (μετρωντας τις πολλαπλοτητες). Μπορουμε να αποδειξουμε επαγωγικα οτι η συναρτηση $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ εχει απειρες ριζες;

5) Δινεται η συναρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1+x^2} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Αποδειξτε οτι η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(x-n)$ συγκλινει ομοιομορφα στο $\mathbb{R}$ σε μια παραγωγισιμη συναρτηση φ. Σε ποια σημεια ειναι συνεχης η φ';

6) Πανω σε ενα τετραεδρο υπαρχει μια συνεχης κατανομη θερμοκρασιας. Αποδειξτε οτι υπαρχουν οποιαδηποτε 3 σημεια πανω στις ακμες του τετραεδρου, που εχουν την ιδια θερμοκρασια.

7) Θεωρειστε το συστημα διαφορικων εξισωσεων:

$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = x \\[2ex] x(0) = 1, \quad y(0) = 0 \end{cases} \qquad t \geq 0$$

α) Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε λύση $(x(t), y(t))$ του προβλήματος $(*)$ ισχύει $x^2(t)+y^2(t)=1,\ t\geq 0$.

β) Αποδείξτε ότι το $(*)$ έχει μοναδική λύση (χωρίς αναφορά σε γενικό θεώρημα).

γ) Βρείτε τη λύση του $(*)$.

8) Έστω ότι ο 2×2-πίνακας A ικανοποιεί τη σχέση $A^2+I=0$ και έχει απλές ιδιοτιμές. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας αντιστρέψιμος 2×2-πίνακας S, τέτοιος ώστε

$$A = S\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}.$$

9) Έστω A ένας $n\times n$-πίνακας με $\|A\|=\frac{1}{3}$, όπου

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\neq 0 \\ x\in\mathbb{R}^n}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

($\|x\|$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$). Να δειχθεί ότι ο πίνακας $I-A$ είναι αντιστρέψιμος και

$$\frac{3}{4}\leq \|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{3}{2}.$$

10) Αν f, g, h είναι τρία γραμμικά συναρτησοειδή πάνω σε ένα γραμμικό χώρο E, αποδείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

α) υπάρχουν λ, μ με $f=\lambda g+\mu h$

β) $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Ker} h \subseteq \operatorname{Ker} f$

11) Αποδειξτε οτι το γινομενο τριων διαδοχικων φυσικων αριθμων δεν εχει ποτε τη μορφη m^k με $m, k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.

12) α) Δινεται μια ομαδα G και δυο στοιχεια a, b της G με $a^m = 1 = b^n$, $ab = ba$. Αποδειξτε οτι $(ab)^{[m,n]} = 1$, οπου $[m, n]$ ειναι το ελαχιστο κοινο πολλαπλασιο των m, n.

β) Αποδειξτε οτι η υποθεση $ab = ba$ ειναι απαραιτητη στον παραπανω ισχυρισμο.

13) Βρειτε ενα σωμα K, που περιεχει ενα γνησιο υποσωμα ισομορφο με το K.

14) α) Θεωρειστε το εξης προγραμμα FORTRAN:

```
      DO 2 N = 1, 20
      X = 2.0 + 1.0/(8.0**N)
      Y = ATAN(X) - ATAN(2.0)
      Z = Y*(8.0**N)
2     WRITE(6,10) X,Y,Z
10    FORMAT(2X, 3E20.13)
```

Τι επιδιωκει να υπολογισει αυτο το προγραμμα; Πετυχαινει το σκοπο του;

6) Αν
$X = FLOAT(M/N)$
$Y = FLOAT(M)/FLOAT(N)$,

δείξτε με παραδείγματα ότι άλλοτε $X=Y$ και άλλοτε $X \neq Y$.

15) Έστω p πολυώνυμο βαθμού το πολύ 5 με $p(x_k) = \ln(x_k)$, $x_k = k+1$, $k = 0,1,2,3,4,5$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\varepsilon(x) = \ln(x) - p(x)$ έχει στο διάστημα $[1,6]$ ακριβώς 6 ρίζες.

16) Δείξτε ότι από κάθε σημείο της επιφάνειας $x^2+y^2-z^2=1$ περνούν δύο ευθείες περιεχόμενες στην επιφάνεια.

17) Δείξτε ότι κάθε διαφορίσιμη επιφάνεια που έχει μόνον ομφαλικά σημεία είναι σφαίρα ή επίπεδο. (Δίνεται ότι: p ομφαλικό $\Leftrightarrow$ $D_x N = \lambda x$ για κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα x της επιφάνειας στο p. (N = μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα).)

18) Αποδείξτε ότι: Μεταξύ των τριγώνων, που έχουν δοθέν εμβαδόν E, το ισόπλευρο έχει την ελάχιστη περίμετρο.

19) Δινεται ενα συνολο $A \subset \mathbb{R}^2$ και η συναρτηση $f(x,y)=x$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Με $co(A)$ συμβολιζουμε την κυρτη θηκη του A, δηλαδη το μικροτερο κυρτο συνολο που περιεχει το A. Ποιες απο τις παρακατω προτασεις ειναι σωστες και ποιες λαθος; (Δικαιολογειστε τις απαντησεις.)

α) Αν το A ειναι ανοιχτο, το $f(A)$ ειναι ανοιχτο υποσυνολο του $\mathbb{R}$.

β) Αν το A ειναι κλειστο, το $f(A)$ ειναι κλειστο.

γ) Αν το A ειναι συμπαγες, το $f(A)$ ειναι συμπαγες.

δ) Αν το A ειναι κλειστο, το $co(A)$ ειναι κλειστο.

20) Δινεται μια ακεραια συναρτηση h (δηλαδη: μια αναλυτικη συναρτηση σε ολοκληρο το $\mathbb{C}$). Αποδειξτε οτι: αν οι συναρτησεις $f(z)=h(z+1)-h(z)$, $g(z)=h(z+i)-h(z)$ ειναι σταθερες, τοτε η h εχει τη μορφη $h(z)=az+b$, $a,b\in\mathbb{C}$.
(Υποδειξη: Θεωρειστε τις παραγωγους f', g'.)

21) Εξεταστε ποιες απο τις παρακατω συναρτησεις μπορουν να επεκταθουν σε μια αναλυτικη συναρτηση πανω σε ενα ανοιχτο υποσυνολο του $\mathbb{C}$, που περιεχει το πεδιο ορισμου τους. Στις περιπτωσεις που αυτο γινεται, βρειτε την αντιστοιχη αναλυτικη

α) $f(z) = z + \bar{z}$, $\quad z \in T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

β) $f(z) = z + \bar{z}$, $\quad z \in A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$

γ) $f(z) = z + \bar{z}$, $\quad z \in B = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| = |\operatorname{Im} z|\}$.

22) Ριχνουμε ενα νομισμα n φορες. Για $n = 2, 3, \ldots, 10$ βρειτε την πιθανοτητα να μην παρουσιαστουν δυο διαδοχικες κορωνες.

23) Δινεται ενα ισοπλευρο τριγωνο. Διαλεγουμε τυχαια ενα σημειο μιας πλευρας του. Συμβολιζουμε με X την τυχαια μεταβλητη που παριστανει την αποσταση του σημειου αυτου απο την απεναντι κορυφη. Βρειτε τη συναρτηση κατανομης και τη συναρτηση πυκνοτητας πιθανοτητας της X. Σχεδιαστε τις.