29/07/2012 Γ. Πλατής, Μ. Πλεξουσάκης, Ν. Φραντζικινάκης

Άλγεβρα-Θεωρία Αριθμών

---

1. (10 Μονάδες) Θεωρούμε ένα κανονικό πολύγωνο με n πλευρές. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο Ω_n των στροφών του επιπέδου με κέντρο το κέντρο του πολυγώνου 0, οι οποίες απεικονίζουν το πολύγωνο στον εαυτό του, αποτελεί υποομάδα της ομάδας των στροφών του επιπέδου

$$\Omega = \{\phi_\theta | \phi_\theta \colon (x,y) \to (x',y')\}$$

όπου $x' = x\cos\theta - y\sin\theta$, $y' = x\sin\theta + y\cos\theta$.

---

2. (15 Μονάδες) Βρείτε τις υποομάδες της συμμετρικής ομάδας S_3. Χρησιμοποιήστε την υποομάδα $H = \langle (1,2) \rangle$ της S_3 για να δείξετε ότι οι αριστερές πλευρικές ομάδες δοθείσης υποομάδας δεν ταυτίζονται εν γένει με τις δεξιές πλευρικές υποομάδες.

---

3. (15 Μονάδες) Έστω G πεπερασμένη ομάδα με άρτια τάξη, $[G:1] = 2n$. Τότε το πλήθος των στοιχείων που έχουν τάξη 2 είναι περιττό. Συμπεράνετε ότι η G έχει στοιχείο τάξης 2.

---

4. (10 Μονάδες) Έστω G πεπερασμένη ομάδα. Αν η ομάδα πηλίκο $G/\mathcal{Z}(G)$ είναι κυκλική, τότε η G είναι μεταθετική, όπου $\mathcal{Z}(G) = \{g \in G \colon gx = xg,\ \forall x \in G\}$ είναι το κέντρο της G.

---

5. (10 Μονάδες) Αν G είναι μία κυκλική ομάδα άπειρης τάξης, τότε η αντιστοιχία

$$f \colon x \to x^2$$

είναι ομομορφισμός $1-1$ αλλά όχι επί.

---

6. (20 Μονάδες) **Α.** Έστω $m,n \in \mathbb{N}$ με $m < n$. Τότε $2^{2^m} + 1 \mid 2^{2^n} - 1$.
Β. Έστω $m,n \in \mathbb{N}$ με $m \neq n$. Τότε $\left(2^{2^m} + 1, 2^{2^n} + 1\right) = 1$.
Γ. Δείξτε με τη βοήθεια του Β ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

---

7. (10 Μονάδες) Να βρεθούν τα υπόλοιπα της διαίρεσης των αριθμών 2^{341}, 7^{126} δια των αριθμών 11 και 127 αντίστοιχα.

1. (15 Μονάδες) Δείξτε ότι η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$
συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Επίσης, δείξτε ότι η συνάρτηση που ορίζεται είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε την παράγωγό της στο σημείο 0.

---

2. (15 Μονάδες) Έστω (a_n) ακολουθία με $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει υποακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ να συγκλίνει.

---

3. (15 Μονάδες) Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ η οποία να λαμβάνει κάθε τιμή της ακριβώς δύο φορές.

---

4. (15 Μονάδες) Έστω $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά M ώστε $|f''(x)| \leq M$ για κάθε $x \in (a,b)$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα (a,b).

---

5. (15 Μονάδες) Δείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα
$$\int_1^{+\infty} \cos(x^2)\, dx$$
συγκλίνει.

1. (20 Μονάδες) **Α.** Για κάθε ακέραιο k, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_C \frac{dz}{(1-e^{-z})^k}$$

όπου C απλή κλειστή καμπύλη γύρω από το 0.
Β. Έστω $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια, με $|f| = 1$ όταν $|z| = 1$. Τότε $f(z) = cz^n$ όπου c σταθερά με $|c| = 1$.

---

2. (20 Μονάδες) **Α.** Υποθέστε ότι η πρώτη θεμελιώδης μορφή ενός τμήματος επιφάνειας $\sigma(u, v)$ είναι της μορφής $I = E\,(du^2 + dv^2)$. Αποδείξτε ότι το $\sigma_{uu} + \sigma_{vv}$ είναι κάθετο στα σ_u και σ_v. Συμπεράνετε ότι η μέση καμπυλότητα H μηδενίζεται παντού αν και μόνο αν η Λαπλασιανή $\sigma_{uu} + \sigma_{vv} = 0$.
Β. Δείξτε ότι το τμήμα επιφάνειας

$$\sigma(u, v) = \big(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2 v, u^2 - v^2\big)$$

έχει παντού μηδενική μέση καμπυλότητα.

1. (15 Μονάδες) Ένα μεροληπτικό νόμισμα έχει πιθανότητα $1/3$ να έρθει κορώνα και $2/3$ να έρθει γράμματα. Στρίβουμε το νόμισμα n φορές και έστω P_n η πιθανότητα να έρθει άρτιος αριθμός από κορώνες. Βρείτε μία αναδρομική σχέση που να συνδέει την P_n με την P_{n-1} και κατόπιν υπολογίστε την P_n.

---

2. (15 Μονάδες) Έστω X, Y, Z ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με εκθετική κατανομή και παραμέτρους λ, μ, ν αντίστοιχα. Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}(X < Y < Z)$.

---

3. (15 Μονάδες) Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στους φυσικούς και

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = 2^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Υπολογίστε τις πιθανότητες $\mathbb{P}(X = Y)$, $\mathbb{P}(X < Y)$, και $\mathbb{P}(X \text{ διαιρεί την } Y)$. (Για την τελευταία μην προσπαθήσετε να υπολογίσετε την σειρά που θα προκύψει.)

---

4. (15 Μονάδες) Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με τιμές 0 ή 1 και

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1/n, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n.$$

Δείξτε ότι

$$\mathbb{P}(X_n = 1 \text{ για άπειρα } n) = 1.$$

1. (15 Μονάδες) Για $A \in \mathbb{R}$ θεωρούμε την διαφορική εξίσωση

$$u''(x) + 2u'(x) + Au(x) = 0.$$

Βρείτε μια λύση στο διάστημα $[0, \infty)$ υπό τις συνθήκες $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$. Είναι η λύση σας μοναδικά ορισμένη; Βρείτε μια λύση της διαφορικής εξίσωσης στο διάστημα $[0, 1]$ υπό τις συνθήκες $u(0) = 0$, $u'(1) = 1$.

---

2. (15 Μονάδες) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x, 0) &= x. \end{aligned}$$

---

3. (15 Μονάδες) Λύστε το παρακάτω πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση της θερμότητας

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{1}{k} u_t, \quad 0 < x < a,\ t > 0, \\ u(0, t) &= T_0, \quad t > 0, \\ u(a, t) &= T_1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad 0 < x < a. \end{aligned}$$

---

4. (15 Μονάδες) Βρείτε τα κρίσιμα σημεία του συστήματος

$$\dot{x} = 8x - y^2, \quad \dot{y} = -6y + 6x^2$$

και μελετήστε τον τύπο τους και την ευστάθειά τους. Σχεδιάστε πρόχειρα τις τροχιές δείχνοντας και βασικά τους γεωμετρικά χαρακτηριστικά.

---

1. (15 Μονάδες) Έστω $x_1 < x_2 \cdots < x_n$ σημεία στο διάστημα $[a, b]$ και $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε ο κανόνας ολοκλήρωσης

$$Q(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού $\leq 2n - 2$. Δείξτε ότι $w_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

---

2. (15 Μονάδες) Δείξτε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\geq 0}$ με $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \cos x_n$, $n \geq 0$, συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο του συνημιτόνου για οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$.

---

3. (15 Μονάδες) Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και $\|\cdot\|$ η νόρμα στον $\mathbb{R}^{n,n}$ που παράγεται από αυτήν. Αν $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ με $\|A\| < 1$, δείξτε ότι ο πίνακας $I - A$ είναι αντιστρέψιμος και ότι

$$\frac{1}{1 + \|A\|} \leq \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

---

4. (15 Μονάδες) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ (x-1)^4, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Προσεγγίστε την f στο διάστημα $[0, 2]$ με μία τμηματικά πολυωνυμική συνάρτηση p της μορφής

$$p(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ \alpha + \beta(x-1) + \gamma(x-1)^2 + \delta(x-1)^3, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Προσδιορίστε τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ υποθέτοντας ότι $p \in C^1[0, 2]$ και ότι $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p(1) = f(1)$, $p'(1) = f'(1)$, $p(2) = f(2)$, $p'(2) = f'(2)$. Συμπίπτει η p με την παρεμβάλλουσα κυβική *spline* s της f στα σημεία $\{0, 1, 2\}$ και συνοριακές συνθήκες $s'(0) = f'(0)$, $s'(2) = f'(2)$;

---

5. (15 Μονάδες) Για ποιά τιμή της σταθεράς λ ελαχιστοποιείται η ποσότητα

$$E(\lambda) = \int_0^{\pi/2} (\sin x - \lambda x)^2 \, dx \ ;$$