23/07/2011 Ν. Ευφραιμίδης, Μ. Λυδάκης, Ν. Φραντζικινάκης

Απειροστικός Λογισμός

---

1. Α. Έστω $a_1 > a_2 > \cdots > a_k > 0$ πραγματικοί αριθμοί. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to+\infty}(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n)^{\frac{1}{n}}.$$

Β. Για κάθε $a > 0$ υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}}{n^a}.$$

---

2. Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω σειρές συγκλίνουν:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log n}}.$$

---

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και έστω ότι το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει. Δείξτε (με παράδειγμα) ότι το όριο $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ μπορεί να μην υπάρχει, εάν όμως υπάρχει, τότε δείξτε ότι είναι υποχρεωτικά 0.

---

4. Είναι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$$

συνεχής στο 0; Είναι παραγωγίσιμη στο 0; Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}.$$

---

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και $f(\frac{1}{n}) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f^{(n)}(0) = 0$ για $n = 0, 1, 2, \cdots$.

---

6. Βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y, z) = xyz$ στο χωρίο $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 \le 6\}$.

---

7. Έστω $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int\int_D (x^{2011} + y^{2011} + 1)\,dx\,dy.$$

Γραμμική Άλγεβρα

Όλοι οι πίνακες είναι με συντελεστές στο $\mathbb{R}$ και όλοι οι διανυσματικοί χώροι είναι υπεράνω του $\mathbb{R}$.

---

1. Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις, να βρείτε ένα σύνολο διανυσμάτων όπως περιγράφεται στην πρόταση, ή να εξηγήσετε γιατί ένα τέτοιο σύνολο δεν υπάρχει.
A. Ένα σύνολο τεσσάρων διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$ που κάθε τρία από αυτά παράγουν τον $\mathbb{R}^3$.
B. Ένα σύνολο δύο διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$ που δεν παράγουν τον $\mathbb{R}^3$ αλλά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
Γ. Ένα σύνολο τριών διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$ που δεν παράγουν τον $\mathbb{R}^3$ αλλά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
Δ. Ένα σύνολο τεσσάρων διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$ που παράγουν τον $\mathbb{R}^3$ αλλά είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
E. Ένα σύνολο τριών διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$ που παράγουν τον $\mathbb{R}^3$ αλλά είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
Z. Ένα σύνολο τριών διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$ που παράγουν τον $\mathbb{R}^3$ και δύο από αυτά παράγουν το επίπεδο κάθετο στο $(1,1,1)$.

---

2. Δίνεται ένας αντιστρέψιμος 5×5 πίνακας A. Υπολογίστε την τέταρτη στήλη του A^{-1}, δεδομένης της τρίτης στήλης του A ως $[0\ 7\ 0\ 9\ 0]^T$ και της πέμπτης στήλης του A ως $[0\ 5\ 0\ 0\ 0]^T$.

---

3. Δίνονται $x, y, z \in \mathbb{R}$ και οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ x & y & z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ x & y & z \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ x & y & z \end{bmatrix}.$$

Υπολογίστε την ορίζουσα του C, αν $\det A = 1$ και $\det B = -1$.

---

4. Έστω V ο διανυσματικός χώρος όλων των πολυωνύμων $f = f(t)$ με πραγματικούς συντελεστές.
A. Ορίζουμε την $L : V \to V$ με $L(f) = g$ όπου $g(t) = f(t^2)$. Είναι η L γραμμική;
B. Ορίζουμε την $\hat{L} : V \to V$ με $\hat{L}(f) = g$ όπου $g(t) = t^2 f(t)$. Είναι η $\hat{L}$ γραμμική;

---

5. Δείξτε ότι, για κάθε $2n \times 2n$ πίνακα A με $A^2 = 0$, υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης $Ax = 0$.

---

6. Δίνεται ένας διαγωνιοποιήσιμος 2×2 πίνακας και μια βάση του $\mathbb{R}^2$ της μορφής $\{x, Ax\}$. Αν το Ax είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή λ, ποιές είναι οι πιθανές τιμές του λ;

---

7. Δείξτε ότι κάθε 2×2 πίνακας A με $A^2 = A$ είναι διαγωνιοποιήσιμος.