# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
26 ΙΟΥΛΙΟΥ 2009

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ :

- ΑΛΓΕΒΡΑ-ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ
- ΑΝΑΛΥΣΗ
- ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
- ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
- ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

**ΑΛΓΕΒΡΑ-ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ**

**Άσκηση 1.** Έστω $n$ θετικός ακέραιος. Δεδομένων $d, a \in \mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, θεωρούμε τις εξισώσεις $dx = 0$ και $ax = 0$ στο $\mathbb{Z}_n$.

**Α.** Αν το $d$ είναι διαιρέτης του $a$, δείξτε ότι κάθε λύση της πρώτης εξίσωσης είναι και λύση της δεύτερης εξίσωσης.

**Β.** Αν το $d$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $a$ και $n$, δείξτε ότι αυτές οι εξισώσεις είναι ισοδύναμες.

**Άσκηση 2.** Έστω $n = 10^4$, $G = \mathbb{Z}_n$, και $H$ η υποομάδα της $G$ που παράγεται από το 360. Πόσα στοιχεία έχει η $H$;

**Άσκηση 3.** Δίνεται μια πεπερασμένη ομάδα $G$ και μια υποομάδα $H$ της $G$. Αν υπάρχουν το πολύ δύο αριστερά σύμπλοκα της $H$ στην $G$, να δείξετε ότι η $H$ είναι κανονική υποομάδα της $G$.

**Άσκηση 4.** Έστω $n = 10^6$ και $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\} = \mathbb{Z}_5$. Θεωρούμε το $f(x) = x^n + ax + 1$ ως πολυώνυμο με συντελεστές στο $\mathbb{Z}_5$. Πόσες ρίζες έχει το $f(x)$ στο $\mathbb{Z}_5$;

**Άσκηση 5.** Έστω $n = 3.333.333$. Να βρείτε τό υπόλοιπο της διαίρεσης του $143^n$ με το 14.

**Άσκηση 6.** Να δείξετε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, το πολυώνυμο $x^3 + x + 4 + 5n$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.

## ΑΝΑΛΥΣΗ

**Άσκηση 1**. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,1]$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt = f(0)$.

**Άσκηση 2**. Αν $a_n \ge 0$ δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνον αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ συγκλίνει.

**Άσκηση 3**. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n},\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n},\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}.$$

**Άσκηση 4**. Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση τις ακολουθίες συναρτήσεων

$$f_n(x) = x(1-x)^n,\quad g_n(x) = nx(1-x)^n,\quad n\in\mathbb{N}, x\in[0,1].$$

**Άσκηση 5**. Έστω συνάρτηση $f$ παραγωγίσιμη στο $[1,2]$, $f(1)=0$ και $|f'(x)|\le 5|f(x)|$ για κάθε $x\in[1,2]$. Δείξτε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[1,2]$.

**Άσκηση 6**. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $[0,+\infty)$.

**Άσκηση 7**. Αν $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $f_n\to f$ κατά σημείο είναι σωστό ότι $\int_0^1 f_n(t)dt \to \int_0^1 f(t)dt$; Να δικαιολογήστε την απάντησή σας.

**Άσκηση 8**. Έστω ότι η συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$ για κάθε συνεχή συνάρτηση $g:[a,b]\to\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η $f$ είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν.

**Άσκηση 9**. Έστω ανοιχτό υποσύνολο $A$ του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ υπάρχουν $n\in\mathbb{N}$ και $a_1,a_2\in A$ ώστε $x=n(a_1-a_2)$.

## ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

**Άσκηση 1.** Δείξτε ότι αν $\|F\| < 1$ όπου $\|\cdot\|$ είναι οποιαδήποτε νόρμα πινάκων και $F$ $n \times n$ πίνακας τότε
(1) $(I - F)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} F^k$ και
(2) $\|(I - F)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|F\|}$.

**Άσκηση 2.** Για κάθε $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ δείξτε ότι

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2,$$

όπου $\|A\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2$.

**Άσκηση 3.** Ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι μία έκφραση της μορφής

$$(*) \quad t_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)).$$

Δείξτε ότι αν $f(\theta)$ συνεχής συνάρτηση στο $[0, 2\pi]$ τότε υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο $t_n^*(\theta)$ ώστε

$$\max_{0\leq\theta\leq 2\pi} |f(\theta) - t_n^*(\theta)| \leq \max_{0\leq\theta\leq 2\pi} |f(\theta) - t_n(\theta)|$$

για κάθε $t_n(\theta)$ της μορφής $(*)$.

**Άσκηση 4.** Έστω $w(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$. Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο παρεμβολής της συνάρτησης $f$ στα σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_n$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$p(x) = w(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k)w'(x_k)}.$$

**Άσκηση 5.** Βρείτε τις τιμές των $k, a, b$ ώστε οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & k \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, να είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι.

**Άσκηση 6.** Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα. Δεδομένων των ακεραίων $n, m \geq 1$, των κόμβων $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ με $x_i \neq x_j$ για $i \neq j$, των ακεραίων $j_0, j_1, \ldots, j_n$ με $0 \leq j_i \leq m - 1$ και των πραγματικών αριθμών $y_0, y_1, \ldots, y_n$, θέλουμε να βρούμε ένα πολυώνυμο $p$ βαθμού μικροτέρου ή ίσο με $n$ τέτοιο ώστε $p^{(j_i)}(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.
(1) Βρείτε ένα παράδειγμα για το οποίο το πρόβλημα δεν έχει λύση.
(2) Βρείτε ένα παράδειγμα για το οποίο το πρόβλημα δεν έχει μοναδική λύση.
(3) Δείξτε ότι αν $j_0 = 0$ και $j_i = 1$, $1 \leq i \leq n$ τότε το πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

## ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

**Άσκηση 1.** Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση $u_x + u_y = u^3$ με $u(0, y) = f(y)$. Ορίζεται η λύση σε όλο το $xy$-επίπεδο;

**Άσκηση 2.** Να βρεθεί φραγμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης $u_{xx} + u_{yy} = 0$ στη λωρίδα $(0, a) \times (0, \infty)$ που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες $u_x(0, y) = u(a, y) = 0$ για $y > 0$ και $u(x, 0) = 1$ για $x \in (0, a)$.

**Άσκηση 3.** Έστω $u(t, x)$ λύση της εξίσωσης θερμότητας $u_t = u_{xx}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$v(s, y) = \sqrt{t}u(t, x)e^{\frac{x^2}{st}}, \text{ όπου } s = -\frac{1}{t}, y = \frac{x}{t}.$$

Υπολογίστε την ποσότητα $v_s - v_{yy}$.

**Άσκηση 4.** Δίνεται η συνήθης διαφορική εξίσωση $y' = x^2y^2 + 1,\ x > 0$ με αρχική συνθήκη $y(0) = y_0$. Δείξτε ότι η λύση δεν ορίζεται σε όλο το $(0, +\infty)$ όταν $y_0 > 0$. Τι συμβαίνει όταν $y_0 \leq 0$;

**Άσκηση 5.** Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' - 2y' + y = e^x + cos2x$.

**Άσκηση 6.** Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' = xy + y^{10},\ y(0) = \frac{1}{10}$. Δείξτε ότι η λύση του προβλήματος υπάρχει για $|x| \leq \frac{1}{2}$.

**ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**Άσκηση 1.**

(1) Έστω ότι η $X$ ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p$. Υπολογίστε την πυκνότητα της $X^2$.

(2) Έστω $N$ θετικός ακέραιος και $f(x) = k2^x$ για $x = 1, 2, \ldots, N$, $f(x) = 0$ αλλιώς. Βρείτε την τιμή της σταθεράς $k$ ώστε η $f$ να είναι συνάρτηση πυκνότητας.

**Άσκηση 2.** Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή με ακέραιες τιμές και συνάρτηση κατανομής $F$. Έστω ότι η $Y$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $(0, 1)$. Ορίζουμε μια τυχαία μεταβλητή $Z$ με ακέραιες τιμές ως εξής

$$Z = m \quad \text{αν} \quad F(m-1) < Y \leq F(m)$$

για κάθε ακέραιο $m$. Δείξτε ότι η $Z$ έχει την ίδια πυκνότητα με την $X$.

**Άσκηση 3.** Έστω ότι η $X$ έχει την κανονική πυκνότητα $n(0, \sigma^2)$. Βρείτε τον μέσο και τη διασπορά για τις τυχαίες μεταβλητές $|X|$, $X^2$.