Διατμηματικο Μεταπτυχιακο Προγραμμα

των τμηματων

Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ. ΜΕΡΟΣ Β΄

Σάββατο 26 Ιουλίου 2003

Άλγεβρα - Θεωρία Αριθμών

① Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f : \mathbb{Z}_{mn} \longrightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$$
$$f([x]_{mn}) = ([x]_m, [x]_n)$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η f είναι επί ακριβώς τότε όταν ο ΜΚΔ$(m,n) = 1$.

② Αν G ομάδα τάξης p^k, $k \geq 1$ $(p \in \mathbb{P})$ να αποδείξετε ότι η G έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο τάξης p.

③ Έστω G πεπερασμένη ομάδα τάξης n και $\varphi : G \to \mathbb{Z}_{15}$ ομομορφισμός ομάδων. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιές λάθος; (τεκμηριώστε την απάντησή σας)

(α΄) Το 15 διαιρεί το n

(β΄) Το n διαιρεί το 15

(γ΄) Αν ο φ είναι μονομορφισμός, τότε το 15 διαιρεί το n

(δ΄) Αν ο φ είναι επιμορφισμός, τότε το 15 διαιρεί το n

(ε΄) Αν ο φ είναι μονομορφισμός, τότε το n διαιρεί το 15

(ϛ΄) Αν ο φ είναι επιμορφισμός, τότε το n διαιρεί το 15

(ζ΄) Αν $n = 15$, τότε ο φ είναι ισομορφισμός

(η΄) Αν ο φ είναι μονομορφισμός, τότε η G είναι κυκλική ομάδα

④ Αν K σώμα, να αποδείξετε ότι στον δακτύλιο $K[X]$, ισχύει:

$$\text{ΜΚΔ}(X^m - 1, X^n - 1) = X^d - 1,$$

όπου $d := \text{ΜΚΔ}(n, m) \quad (m, n \in \mathbb{N})$

⑤ Έστω $R = \left\{ \frac{m}{2^a 3^b} \middle| m \in \mathbb{Z},\ a,\ b \in \mathbb{N} \right\}$

(α΄) Να αποδείξετε ότι ο R είναι υποδακτύλιος του Q

(β΄) Είναι ο R ακεραία περιοχή;

(γ΄) Αποδείξετε ότι ο R περιέχεται σε κάθε υποδακτύλιο του Q που περιέχει τα στοιχεία $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$

(δ΄) Αποδείξετε ότι $\frac{1}{5} \notin R$

(ε΄) Αληθεύει ότι ο R είναι σώμα;

(ϛ΄) Αληθεύει ότι ο $\mathbb{Z} \leq R$;

Διαφορικές Εξισώσεις

① Να βρεθεί η γενική λύση της Σ.Δ.Ε. $(y = y(x))$

$$y'' = y' + 2y + 4x^2, \quad x > 0.$$

② Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $(y = y(x))$

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}, \quad y(1) = -2.$$

③ Να βρεθεί η $u = u(x,t)$ που ικανοποιεί

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = x. \end{aligned}$$

④ Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την $u = u(x,t)$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{tt}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= x(1-x), \quad 0 < x < 1 \\ u_t(x,0) &= 0, \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

⑤ Έστω η εξίσωση της θερμότητας $u_t - u_{xx} = 0$, στο διάστημα $0 \le x \le \ell$ και $0 \le t \le T$. Αποδείξτε την αρχή του μεγίστου. Δηλαδή δείξτε ότι η $u(x,t)$ λαμβάνει την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της είτε για $t = 0$ είτε στο σύνορο $x = 0$ ή $x = \ell$.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την βοηθητική συνάρτηση $w(x,t) = u(x,t) + \epsilon x^2, \quad \epsilon > 0$.)

Αριθμητική Ανάλυση

① (α΄) Δώστε ένα ρεαλιστικό άνω φράγμα για το σφάλμα $|f(x) - p_m(x)|$ όπου $p_m(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $m > n$ το οποίο παρεμβάλει την $f(x)$ στα σημεία $x_i, \ i = 0, 1, \ldots, n$.

(β΄) Γνωρίζουμε ότι $f(0) = 1, \ f(1) = 0, \ f(2) = 0.69315$ και $f'(1) = 1$. Υπολογίστε μία προσέγγιση της τιμής της $f(1.5)$.

② Δίνονται ένας αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $\| A \|_1 = 1$ και ένα διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^n$. Έστω x η ακριβής (θεωρητική) λύση του συστήματος $Ax = b$ και $\bar{x}$ η υπολογιστική λύση που προκύπτει απο την εκτέλεση ενός προγράμματος στον υπολογιστή. Είναι γνωστό ότι το $\bar{x}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ακριβής λύση του διαταραγμένου συστήματος $(A + \delta A)\bar{x} = b$ όπου δA «μικρή» διαταραχή του A. Υποθέστε ότι στην περίπτωσή μας $\| \delta A \|_1 = 10^{-6}$ και ότι ο δείκτης κατάστασης $\kappa_1(A) = 10^5$.

(α′) Έστω $r = A\tilde{x} - b$ το υπόλοιπο της υπολογιστικής λύσης. Δείξτε ότι $\| r \|_1 \leq 3 \cdot 10^{-6}$, δηλαδή το υπόλοιπο είναι μίκρό.

(β′) Δείξτε όμως ότι $\| x - \tilde{x} \|_1 \leq 0.3$, δηλαδή το σφάλμα μπορεί να είναι μεγάλο, παρά το γεγονός ότι το υπόλοιπο είναι μικρό.

③ Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντισυμμετρικός πίνακας. Δηλαδή $x \in \mathbb{R}^n : (Ax, x) = 0$ όπου $(\cdot,\cdot)$ το συνήθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$.

(α′) Θεωρούμε την μέθοδο Crank-Nicolson: ($Y^j \in \mathbb{R}^n$).

$$\frac{1}{k}(Y^{n+1} - Y^n) + \frac{1}{2}A(Y^{n+1} + Y^n) = 0, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

δείξτε ότι για κάθε n ισχύει

$$\| Y^n \| = \| Y^0 \| .$$

(β′) Θεωρούμε την μέθοδο Euler:

$$\frac{1}{k}(Y^{n+1} - Y^n) + AY^{n+1} = 0.$$

Δείξτε ότι αν $Y^m \neq Y^{m+1}$ για κάθε m

$$\| Y^{n+1} \| < \|Y^n\| < \|Y^0\|, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

(Υπόδειξη: Δείξτε ότι $\frac{1}{2}\|Y^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2}\|Y^{n+1} - Y^n\|^2 = \frac{1}{2}\|Y^n\|^2$.)

④ Έστω $\ell_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ τα πολυώνυμα παρεμβολής Lagrange τ.ω.

$$\ell_i \in \mathbb{P}_2, \qquad \ell_i(x_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, 3$$

όπου $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1$.
Δείξτε ότι (χωρίς να χρησιμοποιήσετε τους τύπους των ℓ_i)

(α′) $\ell_1(x) + \ell_2(x) + \ell_3(x) = 1$,

(β′) $-\frac{1}{2}\ell_1(x) + \frac{1}{2}\ell_3(x) = (x - \frac{1}{2})$.

<u>Ανάλυση</u>

① Αν $E = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N},\ |p - q + 4| \leq 3\}$ δείξτε ότι $\sup E = 1,\ \inf E = \frac{1}{8}$.

② Έστω $a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Δείξτε ότι η ακολουθία na_n^2 είναι αύξουσα και η $(n+\frac{1}{2})a_n^2$ είναι φθίνουσα. Με χρήση αυτών να αποδείξετε ότι η na_n^2 συγκλίνει.

③ Έστω $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = x^x$. Δείξτε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής. Αν g η αντίστροφη της f δείξτε ότι

$$\lim_{y\to\infty} \frac{g(y)}{\frac{\log y}{\log(\log y)}} = 1.$$

④ Ποια από τα ακόλουθα σύνολα είναι κλειστά; Ποια είναι συμπαγή; Για τα μη κλειστά σύνολα να περιγράψετε την κλειστή τους θήκη.

(α′) $\{(1 + \frac{1}{n})^n \mid\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$

(β′) $\{x \in \mathbb{R} \mid\ \sin(e^x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\} \subseteq \mathbb{R}$

(γ′) $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid\ 0 \leq x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(δ′) $\{(m, n) \mid\ m, n \in \mathbb{Z},\ m^2 + n^2 < 100\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

⑤ Αν γ η περιφέρεια κέντρου 0 και ακτίνας 1, με τη θετική φορά, δείξτε

$$\int_\gamma e^{z+\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}.$$

⑥ Έστω X ο χώρος των ακολουθιών (a_n) με $\sum |a_n| < \infty$. Αν $a = (a_n) \in X$ ορίζουμε

$$\|a\| = \sum_{\kappa\neq 2} \frac{1}{\kappa}|a_\kappa| + \Big|\sum_\kappa a_\kappa\Big|.$$

Δείξτε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον X. Αν ακόμα $e_1, e_2, e_3, \ldots$ τα στοιχεία του X που δίνονται ως $e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots), \ldots$, δείξτε ότι $\lim_n e_n = e_2$.

Πιθανότητες - Στατιστική

① Θεωρούμε την ομοιόμορφη πιθανότητα επί του δειγματοχώρου $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\forall\, \omega \in \Omega,\ P(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$

(α΄) Έστω d ένας διαρέτης του n. Θέτουμε $A_d = \{\omega \in \Omega : \omega = kd,\ k \in \mathbb{N}\}$. Υπολογίστε την $P(A_d)$.

(β΄) Έστω $d_1, d_2, \ldots, d_p$ οι πρώτοι διαιρέτες του n. Δείξτε ότι τα γεγονότα $A_{d_1}, \ldots, A_{d_p}$ είναι ανεξάρτητα.

(γ΄) Έστω K_n το σύνολο των στοιχείων του Ω τα οποία είναι πρώτα με το n.
Υπολογίστε τον πληθάριθμο $(\#K_n)$ συναρτήσει των $n, d_1, \ldots, d_p$.

② Δύο κάλπες U_1 και U_2 περιέχουν άσπρες και μαύρες σφαίρες με τις αναλογίες p_1, q_1 για την U_1 και p_2, q_2 για την U_2. Η δειγματοληψία σ΄ οποιαδήποτε κάλπη γίνεται με επανάθεση. Τα τραβήγματα ακολουθούν τον εξής κανόνα:
Για το πρώτο τράβηγμα εκλέγουμε μία από τις δύο κάλπες. Ακολούθως τραβάμε από την U_1 αν η πρώτη συρόμενη σφαίρα είναι άσπρη, από την U_2 αν η πρώτη συρόμενη σφαίρα είναι μαύρη.
Ομοίως την $n-$οστή σφαίρα τραβάμε από την U_1 ή U_2 αν η $(n-1)-$οστή συρόμενη σφαίρα είναι άσπρη ή μαύρη αντιστοίχως.

(α΄) Υπολογίστε τις πιθανότητες να σύρουμε μία άσπρη στο 1ο, στο 2ο στο 3ο τράβηγμα.

(β΄) Έστω $\Pi_n = P($«να τραβήξουμε μία άσπρη σφαίρα στο $n-$οστό τράβηγμα»$)$
Βρείτε μια σχέση μεταξύ της Π_n και Π_{n-1}.

(γ΄) Δείξετε ότι η Π_n τείνει προς ένα όριο όταν $n \to +\infty$ και υπολογίστε αυτό το όριο.

③ Έστω $Y, N, X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας (Ω, A, P):

$$\begin{array}{ll} X_i \sim U(0,1), & i = 1, 2, \ldots, n \\ P[Y = y] = (e-1)e^{-(y+1)}, & y = 0, 1, 2, \ldots \\ P[N = n] = \frac{1}{(e-1)n!}, & n = 1, 2, \ldots \end{array}$$

Θέτουμε $U = \min(X_1, X_2, \ldots, X_N)$. Βρείτε την κατανομή της τ.μ. $U + Y$. Ποια η μέση τιμή της και η διασπορά της;

④ Έστω X τ.μ. απολύτως συνεχής ακολουθώντας την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1 (δηλ. $f_x(x) = e^{-x}1_{(0,+\infty)}(x)$)
Θεωρούμε την τ.μ. $Y = e^{-X}$.

(α') Αποδείξετε ότι η Y είναι μία τ.μ. απολύτως συνεχής και καθορίστε το νόμο της. Υπολογίσετε EY, $Var(Y)$.

(β') Για $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε την συνάρτηση f_n:

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{-x+\frac{1}{n}} & \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Δείξτε ότι:

$$|f_n(x) - e^{-x}| \leq \frac{e}{n} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_+.$$

(γ') Για $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $Y_n = f_n(X)$. Δείξετε ότι η Y_n συγκλίνει κατά πιθανότητα στην Y.

⑤ Έστω X, Y δύο ανεξάρτητες τ.μ. ορισμένες στο χώρο πιθανότητας (Ω, A, P) και με τιμές στο $\mathbb{N}_0$ και εστώ m θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε:

$$P(Y = m) \geq P(Y = k) \text{ αν } k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

(α') Δείξτε ότι:

$$P(X + Y = m) \leq P(Y = m).$$

(β') Αν $EX = 1$, να δείξετε ότι:

$$P(X + Y > m) \leq P(Y \geq m).$$

⑥ Κατά την γέννηση των διδύμων, έστω λ η πιθανότητα να είναι ομόζυγα και $1-\lambda$ η πιθανότητα να είναι ετερόζυγα. Δεχόμαστε ότι:
«2 ομόζυγα δίδυμα έχουν πάντοτε το ίδιο φύλο και η πιθανότητα να είναι αγόρια είναι 1/2»
«2 ετερόζυγα δίδυμα έχουν ανεξάρτητα φύλα και κάθε παιδί έχει την πιθανότητα 1/2 να είναι αγόρι».

(α') Σε μία γέννηση διδύμων, θεωρούμε τα γεγονότα

$$A = \text{«2 αγόρια»} \quad B = \text{«2 κορίτσια»} \quad C = \text{«1 αγόρι και 1 κορίτσι»}.$$

Υπολογίστε συναρτήσει του λ τις πιθανότητες p_A, p_B, p_C των γεγονότων A, B, C αντιστοίχως.

(β′) Στις 1000 γεννήσεις διδύμων, σημειώνουμε 328 πραγματοποιήσεις του γεγονότος C. Δώσετε για το λ ένα διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε.) με συντελεστή εμπιστοσύνης (σ.ε.)$\approx 1 - a = 0,95$.

(γ′) Επιθυμούμε να παρατηρήσουμε τις γεννήσεις διδύμων και να σημειώσουμε με Y_C τον αριθμό των πραγματοποιήσεων του γεγονότος C. Ποια είναι η κατανομή της τ.μ. Y_C; Καθορίστε μέσω της Y_C έναν αμερόληπτο εκτιμητή Z του λ. Υπολογίστε τη διασπορά του Z. Δώστε για ένα n (υποτιθέμενο μεγάλο) μια υπόθεση ανεξάρτητη του λ και επαρκή, ώστε να μπορούμε να ορίσουμε μέσω της Z ένα δ.ε. για το λ με σ.ε.$\approx 1-a = 0,95$ του οποίου το μήκος να είναι μικρότερο από ένα δεδομένο αριθμό β. Πώς γίνεται αυτή η υπόθεση για $\beta = 0,01$;
(Δίδεται από τους $N(0,1)$-πίνακες ότι: $Z_{a/2} = Z_{0,025} = 1,96$)

7 Διαθέτουμε τ.δ. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ μεγέθους n από ένα νόμο ορισμένο επί του $\mathbb{R}_+$ από την πυκνότητα:

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x|\theta} \ \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

όπου $\theta (\in \mathbb{R}_+^*)$ άγνωστο.

(α′) Για θ_0 σταθερό, ελέγξετε την υπόθεση $H_0 : \theta = \theta_0$ έναντι της $H_1 : \theta > \theta_0$. Καθορίστε το επίπεδο σημαντικότητας και τη συνάρτηση ισχύος του προκύπτοντος ελέγχου.

(β′) Πώς τροποποιείται ο έλεγχος αν, αντί του ακριβούς δείγματος, διαθέταμε στην πράξη, τον αριθμό n_1 των παρατηρήσεων οι οποίες είναι μεγαλύτερες από ένα δεδομένο αριθμό γ;

(γ′) Διαθέτουμε ένα δεύτερο δείγμα ανεξάρτητο του πρώτου, μεγέθους n' από μία κατανομή της ίδιας μορφής, αλλά παραμέτρου θ'. Προτείνετε και μελετήσετε ένα test της υποθέσεως $H_0 : \theta = \theta'$ έναντι της $H_1 : \theta > \theta'$.
Καθορίστε ιδιαιτέρως τη συνάρτηση ισχύος του.

Δίδεται

$$X \sim \Gamma(a,b) \ \text{ αν } \ X(\Omega) = \mathbb{R}_+^* \ \text{ και η } X \text{ δέχεται π.π. την}$$

$$f_x(x) = \frac{1}{\Gamma(a) b^2} x^{a-1} e^{-x|b} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(b) \quad , a, b > 0$$

$$EX = ab$$

$$\sigma^2(X) = ab^2$$