

Εισαγωγικές εξετάσεις για το Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα - Μέρος 2ο

ΠΡΟΣΟΧΗ: Τα θέματα που ακολουθούν καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα διαφόρων περιοχών των Μαθηματικών. Αυτό σας δίνει τη δυνατότητα να ασχοληθείτε όχι μόνο με τα θέματα της περιοχής που γνωρίζετε καλύτερα, αλλά και να επεκταθείτε (πράγμα που θα επιθυμούσε η Επιτροπή) σε θέματα τουλάχιστον μίας ακόμη περιοχής.

Προβλήματα Ανάλυσης

1. Τα K_1, K_2 είναι συμπαγή ξένα υποσύνολα ενός μετρικού χώρου X με μετρική $d(\cdot, \cdot)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $d(x, y) \geq \epsilon$ για κάθε $x \in K_1, y \in K_2$.
2. Με $\{x\} = x - [x]$ συμβολίζουμε το κλασματικό μέρος του πραγματικού αριθμού x . Αν α είναι άρρητος δείξτε ότι το σύνολο $\{\{n\alpha\} : n \in \mathbf{Z}\}$ είναι πυκνό στο $[0, 1]$.
3. Η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ συγκλίνει στην $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ ομοιόμορφα στο (a, b) . Κάθε μια από τις f_n είναι επίσης ομοιόμορφα συνεχής στο (a, b) . Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a, b) .
4. Δείξτε ότι οι χώροι με νόρμα $L^\infty(\mathbf{R})$ και $\ell^\infty(\mathbf{Z})$ δεν έχουν αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.
5. Έστω X χώρος με νόρμα και $T : X \rightarrow \mathbf{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές. Δείξτε ότι το T είναι φραγμένο αν και μόνο αν είναι συνεχές σε κάποιο σημείο $x \in X$.
6. Έστω $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ αναλυτική σε όλο το \mathbf{C} τέτοια ώστε $|f(z)| \leq A + B|z|^k$, για κάποιους θετικούς αριθμούς A, B, k και για όλα τα $z \in \mathbf{C}$. Δείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο.
7. Έστω A εκείνα τα σημεία (x, y) του $[0, 1]^2$ για τα οποία το x ή το y έχει δεκαδικό ανάπτυγμα στο οποίο δεν εμφανίζεται το ψηφίο 5. Δείξτε ότι το A έχει μέτρο 0.
8. Έστω A σύνολο θετικών αριθμών. Ορίζουμε το άθροισμα των στοιχείων του A , $S(A)$, ως το supremum των αθροισμάτων $\sum_{b \in B} b$, για όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα B του A . Αν A είναι υπεραριθμήσιμο δείξτε ότι $S(A) = \infty$.

9. (α) Έστω A_1, \dots, A_n πεπερασμένα υποσύνολα του συνόλου Ω . Υποθέστε ότι για κάθε $k = 1, \dots, n$, η ένωση οποιωνδήποτε k από τα A_i περιέχει τουλάχιστον k στοιχεία. Δείξτε ότι υπάρχουν διαφορετικά ανά δύο $\omega_i \in A_i$. (Υπόδειξη: Επαγωγή ως προς n - διακρίνετε την περίπτωση όπου κάποια k από τα A_i έχουν ένωση με ακριβώς k στοιχεία.)

(β) Δείξτε ότι το ίδιο ισχύει για μια άπειρη ακολουθία πεπερασμένων συνόλων A_i , που πληρούν την ίδια υπόθεση για τις ενώσεις οποιωνδήποτε k , για $i = 1, 2, \dots$.

10. Στο \mathbf{R} θεωρούμε τη συνήθη τοπολογία. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις υπάρχει συνεχής συνάρτηση f από το A επί του B ?

1. $A = \mathbf{R}, B = \mathbf{Q}$
2. $A = \mathbf{R}, B = [0, 1]$
3. $A = [0, 1], B = \mathbf{R}$
4. $A = (0, 1), B = \mathbf{R}$

Προβλήματα από Συνήθεις και Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

11. Αποδείξτε ότι η λύση $x(t) \equiv 0, y(t) \equiv \pi, t \in \mathbf{R}$, είναι ασταθής λύση για το πρόβλημα

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) \cos(2y(t)) \\ y'(t) &= \sin(2y(t)) \end{aligned}$$

12. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} x' &= 41x - 25y \\ y' &= 64x - 39y \end{aligned}$$

Υπόδειξη: Μια ((δεύτερη λύση)) μπορεί να βρεθεί στη μορφή $(\overline{c_1}t + \overline{c_2})e^{\lambda t}$.

13. Αποδείξτε πως η λύση του προβλήματος

$$y'(t) = t^2 y^2(t) - 1, \quad t > 0, \quad y(0) = 0,$$

ορίζεται σε όλο το διάστημα $[0, +\infty)$.

14. Να λυθεί το πρόβλημα Αρχικών-Συνοριακών Τιμών

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

με τη συνθήκη

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(\pi, t) &= 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) &= 2 \sin x - \sin 2x, & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

15. Να βρεθεί αρμονική συνάρτηση u στην ημιλωρίδα $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < \pi, y > 0\}$ που να ικανοποιεί

$$\begin{aligned} u(0, y) = u(\pi, y) &= 0, & y \geq 0 \\ u(x, 0) &= 2 \sin x - \sin 3x, & 0 \leq x \leq \pi \end{aligned}$$

και να είναι φραγμένη.

16. Αποδείξτε το μονοσήμαντο των ομαλών λύσεων του προβλήματος

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) &= 0, & t \geq 0 \\ u_t(\pi, t) + u_x(\pi, t) &= 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) &= \phi(x) & 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Προβλήματα Αριθμητικής Ανάλυσης

17. Δείξτε ότι η ακολουθία x_n , με $x_0 \in \mathbf{R}$, $x_{n+1} = \cos x_n$, $n \geq 0$, συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο του συνημιτόνου για οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbf{R}$.

18. Έστω A $n \times n$ συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας, δηλ. $A = A^T$ και $\langle Ax, x \rangle > 0$ για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbf{R}^n$.

(α) Δείξτε ότι $a_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$.

(β) Δείξτε ότι $\max_{1 \leq i \leq n} a_{ii} = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$.

(γ) Είναι ο A^{-1} θετικά ορισμένος?

19. Έστω $I = [0, 1]$ και $x_i^{(n)} = i/n$, $i = 0, \dots, n$, και $p_n \in \mathbf{P}_n$ πολυώνυμο

παρεμβολής της $f(x) = e^{2x}$ στα $x_i^{(n)}$, $i = 0, \dots, n$. Δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$.

20. Το ολοκλήρωμα $I = \int_a^b f(x) dx$ μπορεί να προσεγγισθεί με το $I_p = \int_a^b p(x) dx$ όπου f μια αρκετά ομαλή συνάρτηση στο $[a, b]$ και $p \in \mathbf{P}_2$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα $a, b, (a+b)/2$.

(α) Δώστε το I_p σαν συνάρτηση των σημείων $a, b, (a+b)/2$ και των αντιστοίχων τιμών της f .

(β) Ποιος γνωστός τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης προέκυψε στο (α)?

21. Θεωρείστε το διαμερισμό $x_i = i$, $i = 0, \dots, 3$ του $[0, 3]$ και τη συνάρτηση $f : [0, 3] \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε πολυώνυμο παρεμβολής $p_3 \in \mathbf{P}_3$ της f στα $x_i, i = 0, \dots, 3$.

(β) Υπολογίστε την κυβική spline παρεμβολής $S(x)$ στα $x_i, i = 0, \dots, 3$, τέτοια ώστε $S''(0) = S''(3) = 0$.

(γ) Ποια από τις παρακάτω τρεις προσεγγίσεις της $f(x)$ δίνει το μικρότερο σφάλμα $\max_{x \in [0,3]} |f(x) - g(x)|$? (i) $g = p_3$, (ii) $g = S$, (iii) g η γραμμική spline παρεμβολής στα $x_i, i = 0, \dots, 3$.

Προβλήματα Πιθανοτήτων-Στατιστικής

22. Δύο φίλοι, A και B , παίζουν darts (βελάκια) και ο πρώτος που θα βρεί κέντρο κερδίζει. Ο A έχει πιθανότητα p_A να βρεί κέντρο κάθε φορά που παίζει, και ο B έχει πιθανότητα p_B . Οι δε δοκιμές είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους. Βρείτε την πιθανότητα να κερδίσει ο A όταν αυτός παίζει πρώτος.

23. Έστω $X_n, n \in \mathbf{N}$, μια ακολουθία γνήσια θετικών, ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών και έστω ότι $a = \mathbf{E}[X_n]$ και $b_n = \mathbf{E}\left[\frac{1}{X_1 + \dots + X_n}\right]$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί (για κάθε n). Αν $S_n = X_1 + \dots + X_n$, βρείτε την $\mathbf{E}[S_m/S_n]$. (Διακρίνετε τις περιπτώσεις $m < n$, $m = n$, $m > n$.)

24. Ο Γιάννης ρίχνει ένα νόμισμα n φορές και η Μαρία $n+1$ φορές. Οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και κερδίζει όποιος φέρει τις περισσότερες κορώνες. Βρείτε την πιθανότητα να κερδίσει η Μαρία.

25. (α) Βρείτε την κατανομή του αθροίσματος n ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών με κατανομή Poisson με παράμετρο λ για την καθεμία. (Η τυχαία μεταβλητή X έχει κατανομή Poisson με παράμετρο λ αν παίρνει τη τιμή $n \in \mathbf{N}$ με πιθανότητα $\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$.)
 (β) Δείξτε ότι

$$e^{-n} \left(1 + \frac{n}{1} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \right) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad (n \rightarrow \infty).$$

26. (α) Αν N είναι μια τυχαία μεταβλητή με τιμές στο \mathbf{N} , δείξτε ότι

$$\mathbf{E}[N] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(N > n).$$

(β) Έστω X_1, X_2, \dots , μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, η καθεμία ομοιόμορφα κατανομημένη στο $[0, 1]$, και έστω

$$N = \min \{n \in \mathbf{N} : X_1 + \dots + X_n > 1\}.$$

Δείξτε ότι $\mathbf{E}[N] = e$.

27. Σε ένα πείραμα γενετικής ένα δείγμα από n άτομα βρέθηκε να έχει a , b και c από τρία δυνατά γονότυπα (genotypes) GG , Gg και gg αντίστοιχα. Η συχνότητα του γονιδίου G στον πληθυσμό είναι $\theta/(\theta + 1)$ όπου θ μια άγνωστη παράμετρος με τιμές στο $(0, \infty)$. Υποτίθεται ότι άτομα του ίδιου δείγματος είναι ασυσχέτιστα και ότι δύο γονίδια στο ίδιο άτομο είναι ανεξάρτητα. Βρείτε την εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας της θ . Βρείτε επίσης την εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας της $\theta/(\theta + 1)$ και εξετάστε αν αυτή είναι αμερόληπτη.

28. (α) Δείξτε ότι αν X και Y είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, η κάθε μια με την τυπική κανονική κατανομή, τότε η $X^2 + Y^2$ έχει την εκθετική κατανομή με παράμετρο $1/2$.

(β) Έστω X_1, \dots, X_n και Y_1, \dots, Y_m δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα, το πρώτο από ένα πληθυσμό με κατανομή $N(\theta_1, n)$ και το δεύτερο από ένα πληθυσμό με κατανομή $N(\theta_2, m)$. Βρείτε ένα τετράγωνο T και ένα κυκλικό δίσκο Δ , τέτοια ώστε κάθε ένα από τα T και Δ να είναι μια 95% περιοχή εμπιστοσύνης για την παράμετρο (θ_1, θ_2) , με κέντρο στο (\bar{X}_n, \bar{Y}_m) . Ποια από τις δύο περιοχές εμπιστοσύνης θα προτιμούσατε για εκτίμηση του (θ_1, θ_2) και γιατί?

Προβλήματα Άλγεβρας - Γεωμετρίας

29. (α) Κάθε αβελιανή ομάδα τάξης 143 είναι κυκλική.

(β) Αν $N \trianglelefteq G$ και $m = [G : N]$ τότε $a^m \in N \quad \forall a \in G$.

(γ) Αν G ομάδα τάξης πρώτου αριθμού p και $\phi : G \rightarrow G'$ ομομορφισμός ομάδων να

αποδειχθεί ότι ο ϕ είναι ο τετριμμένος ομομορφισμός ή μονομορφισμός.

(δ) Αν $H_1 \trianglelefteq G$ και $H_2 \trianglelefteq G$ και $H_1 \cap H_2 = \{1\}$, να αποδειχτεί ότι για κάθε $a \in H_1$

και κάθε $b \in H_2$ ισχύει $ab = ba$. Είναι αυτό ισοδύναμο με το $H_1 H_2 = H_2 H_1$?

(ε) Αν $G = \langle g \rangle$ και $|G| = n$, $t \in \{0, \dots, n-1\}$, πόσο είναι η τάξη του g^t ?

30. (α) Είναι το $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 5x + 6 \rangle$ σώμα?

(β) Είναι το $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 6x + 6 \rangle$ σώμα?

(γ) Έστω $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Να βρείτε έναν υποδακτύλιο του R που να μην είναι ιδεώδες του R .

(δ) Βρείτε ένα μέγιστο (maximal) ιδεώδες του R .

(ε) Βρείτε ένα μη τετριμμένο γνήσιο ιδεώδες του R που να μην είναι πρώτο.

31. (α) Έστω $a = \sqrt{2^{1/3} - i}$. Να βρεθεί ένα πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές που να μηδενίζεται στο a .

(β) Αν L/K πεπερασμένη επέκταση σωμάτων και $p(x) \in K[x]$ ανάγωγο υπεράνω του K , τέτοιο ώστε $\deg p$ δε διαιρεί το $[L:K]$, να αποδειχτεί ότι το $p(x)$ δεν έχει ρίζες στο L .

(γ) Αν L επέκταση του σώματος K και $a \in L$ αλγεβρικό στοιχείο ως προς το σώμα K , περιττού βαθμού, να αποδειχτεί ότι το a^2 είναι αλγεβρικό στοιχείο, επίσης περιττού βαθμού ως προς το K , και ότι $K(a) = K(a^2)$.

32. Κάποιος είχε στην τσέπη του 15 νομίσματα, 20-δραχμα, 50-δραχμα, και 100-δραχμα. Αν το συνολικό ποσό ήταν 690 δραχμές πόσα νομίσματα είχε από κάθε είδος?

33. Να υπολογιστούν οι ρίζες του πολυωνύμου $2x^{219} + 3x^{74} + 2x^{57} + 3x^{44}$ στο σώμα \mathbb{Z}_5 .

34. Ένα ιστορικό για την Κρήτη γεγονός έγινε σε έτος του οποίου όλα τα ψηφία είναι περιττοί αριθμοί ενώ το πρώτο και το τελευταίο ψηφίο είναι μεταξύ τους διαφορετικά. Το άθροισμα των τριών τελευταίων ψηφίων του, αν αυξηθεί κατά 1 γίνεται πολλαπλάσιο του 7 ενώ το δεύτερο ψηφίο είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα του τρίτου και του τέταρτου κατά 5. Ποιο είναι το έτος και τι έγινε τότε?

35. Στον τοπολογικό χώρο γινόμενο $[0, 1] \times S$, όπου S ο μοναδιαίος κύκλος, έστω η σχέση ισοδυναμίας $(0, x) \sim (0, y)$ ($\forall x, y \in S$). Ναδειχθεί ότι ο χώρος πηλίκο είναι ομοιομορφικός με το μοναδιαίο δίσκο.

36. Έστω $\phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ η συνάρτηση με τύπο

$$\phi(x, y) = (x - x^3/3 + xy^2, y - y^3/3 + yx^2, x^2 - y^2),$$

και $N = \phi(\mathbf{R}^2)$.

- (α) Ναδειχθεί ότι το N είναι λεία επιφάνεια.
- (β) Ναβρεθούν οι συντελεστές της 1ης και της 2ης θεμελιώδους μορφής.
- (γ) Ναυπολογιστούν οι κύριες καμπυλότητες, η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα στο τυχόν σημείο του N .

Καλή επιτυχία. Γ. Αντωνιάδης, Μ. Κολουντζάκης, Α. Τερτίκας

Ηράκλειο, 28 Ιουλίου 2001