ΚΟΙΝΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΤΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εισαγωγικές Εξετάσεις της 25ης Ιουλίου 2003

Απειροστικός Λογισμός

1) Ποιες από τις ακόλουθες ανισώσεις είναι αληθείς για κάθε a, b με $a \geq b$;
α) $a^3 + b^4 \geq 0$, β) $a^4 + b^3 \geq 0$, γ) $a^3 + b^3 \geq 0$, δ) $a^4 - b^4 \geq 0$, ε) $a^3 - b^3 \geq 0$.
Να αιτιολογήσετε την κάθε περίπτωση (αληθή ή μη).

2) (i) Έστω $a_n = \dfrac{1}{n^3 - \sqrt{n}\sin^2(n+1)}$. Να βρεθεί $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n| \leq 0{,}001$.
(ii) Να βρεθεί $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x-3| < \delta$ να ισχύει $|x^3 - 27| < 0{,}01$.
(Σημείωση: δεν ζητάμε τα *βέλτιστα* n_0 και δ.)

3) (i) Έστω $b \neq 0$ και n άρτιος. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^n + b^n = (x+b)^n$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$. (Υπόδειξη: Εξετάστε τη συνάρτηση $f(x) = x^n + b^n - (x+b)^n$)
(ii) Έστω $b \neq 0$ και n περιττός. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^n + b^n = (x+b)^n$ έχει λύσεις μόνο τις $x = 0$ και $x = -b$.

4) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές $\sum \dfrac{3^n n!}{n^n}$ και $\sum \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^5}}$.

5) (i) Να σχεδιαστούν στο $[0, 2\pi]$ τα γραφήματα των συναρτήσεων
$f(x) = \max_{0 \leq t \leq x}(\sin 2t)$ και $\varphi(x) = \max_{0 \leq t \leq x}(\sin t + \cos t)$.
(ii) Να επιλυθεί στο $[0, 2\pi]$ η εξίσωση
$$\sin^2 x \cos x + \cos^2 x \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6) Να βρεθεί η τιμή του $\int_0^1 x^3 dx$ με χρήση αθροισμάτων Riemann, κάνοντας διαμέριση του [0,1] σε n ίσα μέρη, και παίρνοντας όριο.

7) Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα (i) $\int \dfrac{dx}{1+\sin^2 x}$ (θέτοντας t = tanx)
και (ii) $\int_0^1 \log x dx$.

8) Δίνεται (και θεωρήστε το ως γνωστό) ότι η σειρά Taylor της $\log(1 + x)$ είναι $x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \ldots$ (με διάστημα σύγκλισης το $-1 < x \leq 1$). Με χρήση αυτού

(i) να βρεθεί η σειρά Taylor, και το διάστημα σύγκλισης, της $\log\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$,

(ii) να βρεθεί κατά προσέγγιση η τιμή του log3.

9) Να υπολογισθεί η μέγιστη τιμή του $x + y + z$ αν τα x, y, z είναι θετικά με

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

10) Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dy.$

Γραμμική Άλγεβρα

1) Να επιλυθεί η εξίσωση

$$\det\begin{bmatrix} x+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & x+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{bmatrix}=0$$

όπου ω είναι μία (οποιαδήποτε) κυβική ρίζα της μονάδας.

2) Αν $A\in M_3(\mathbb{Z})$ μη-ιδιάζων πίνακας, να αποδείξετε ότι ο A^{-1} ανήκει στον $M_3(\mathbb{Z})$ ακριβώς τότε όταν $\det A = \pm 1$.

3) Να επιλυθεί το σύστημα

$$\left\{\begin{matrix} ax+\ y+z=4 \\ x+by+z=3 \\ x+2by+z=4 \end{matrix}\right\}$$

για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων a και b ($a, b\in\mathbb{R}$).

4) Δίνονται δύο ευθείες στον $\mathbb{R}^3$ με εξισώσεις

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4} \text{ και } \frac{x-3}{\lambda}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}$$

αντίστοιχα. Για ποιες τιμές του λ οι δύο ευθείες τέμνονται;

5) Έστω $v_1, v_2, \ldots, v_n$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα ενός K-διανυσματικού χώρου V. Θέτουμε $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$ όπου ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$).
Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $v_1 - v, v_2 - v, \ldots, v_n - v$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ακριβώς όταν $\sum_{m=1}^{n} \lambda_m \neq 1$.

6) Δίνεται η συνάρτηση

$$\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^3$$
$$f(x) \mapsto (f(0), f(1), f(0)+f(1)).$$

Να αποδείξετε ότι η φ είναι $\mathbb{R}$-γραμμική και να προσδιορίσετε τους $\mathbb{R}$-διανυσματικούς χώρους Im(φ) και Ker(φ).

7) Έστω ότι μία γραμμική απεικόνιση $\varphi : V \to V$ ενός $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου V επαληθεύει την ισότητα

$$(\varphi - I_v)\circ(\varphi - 2I_v)\circ(\varphi - 3I_v) = 0,$$

όπου I_v ταυτοτική απεικόνιση του V.

(i) Να βρεθούν οι δυνατές χαρακτηριστικές τιμές της φ και

(ii) Να αποδειχθεί ότι

$$V = \mathrm{Ker}(\varphi - I_v) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi - 2I_v) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi - 3I_v).$$

8) Δίνονται οι ακολουθίες (u_n) και (v_n), με $u_1 = v_1 = 1$ και

$$u_{n+1} = 3u_n + v_n, \quad v_{n+1} = u_n + 3v_n \quad (n \in N)$$

Να εκφράσετε τα u_n και v_n μέσω κλειστού (και όχι αναδρομικού) τύπου.

Καλή Επιτυχία