ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εισαγωγικές εξετάσεις για το Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα - Μέρος 1ο

Προβλήματα Απειροστικού Λογισμού

1. Έστω $f(x,y)=x^{2n}y^{2m}$, για $x^2+y^2\leq 1$ (m,n είναι θετικοί ακέραιοι).

Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της f στο άνω σύνολο.

2. Δίνεται $f:(0,1]\to \mathbf{R}$ με

$$f(x)=\frac{1}{2-\log x}.$$

Έστω $a_0=a\in(0,1]$, και $a_{n+1}=f(a_n)$ για $n\geq 0$. Δείξτε ότι η a_n συγκλίνει σε όριο ανεξάρτητο του a.

3. (α) Υπολογίστε το

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\ dx\ dy.$$

(β) Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx$.

4. (α) Έστω $f:[0,1]\to \mathbf{R}$ συνεχής τέτοια ώστε για κάθε συνεχή συνάρτηση ϕ να έχουμε

$$\int_0^1 f(x)\phi(x)\ dx=0.$$

Δείξτε ότι η f είναι ταυτοτικά 0.

(β) Αν $f:[0,1]\to \mathbf{R}$ συνεχής, $f(0)=1$, και για κάθε συνεχή συνάρτηση ϕ με $\int_0^1 \phi(x)\ dx=0$ έχουμε

$$\int_0^1 f(x)\phi(x)\ dx = 0,$$

τι μπορείτε να συμπεράνετε για την f?

5. Έστω ακολουθία a_n με $0 < a_n < 1$ και

$$4a_{n+1}(1-a_n) \geq 1$$

για κάθε n.

Δείξτε $a_n \to 1/2$.

6. (α) Έστω $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ με $0 \leq f(x) \leq x^2$, για $x \in [0,1]$. Δείξτε ότι $f'(0)$ υπάρχει και υπολογίστε το.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, αλλά με την f' να είναι ασυνεχής στο 0.

7. Έστω $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ και υποθέστε ότι

$$f(x) + f'(x) \to 0,$$

όταν $x \to \infty$.

Δείξτε ότι $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Προβλήματα Γραμμικής Άλγεβρας

8. (α) Αν $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ και κάποιος από τους A, B είναι μη ιδιάζων τότε οι πίνακες AB και BA είναι όμοιοι.

(β) Βρείτε δύο (ιδιάζοντες) πίνακες $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ τέτοιους ώστε οι AB και BA να μην είναι όμοιοι.

9. (α) Δίδεται

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 : \ x_1 + 2x_2 = x_3 + 2x_4\}.$$

(i) Δείξτε ότι W είναι διαν. υπόχωρος του $\mathbf{R}^4$.
(ii) Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του W.
(iii) Να βρεθεί βάση του W που να περιέχει τα $(1, 0, 1, 0)$ και $(0, 1, 0, 1)$.

(β) Να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα του ενδομορφισμού

$$(x_1, x_2, x_3) \to (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_2 - x_3)$$

του $\mathbf{R}^3$.

10. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{array}{ccccc} nx_1 & -x_2 & \cdots & -x_n & = & b_1 \\ -x_1 & +nx_2 & \cdots & -x_n & = & b_2 \\ & & \cdots & & & \\ -x_1 & -x_2 & \cdots & +nx_n & = & b_n \end{array}$$

11. Έστω $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Αν $a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \neq 0$ τότε ο πίνακας A με στοιχεία $A_{ij} = a_i b_j$, $i, j = 1, \ldots, n$, είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Να βρεθεί ένας διαγώνιος πίνακας όμοιος με τον A.

12. (α) Αν a και b είναι δύο ενδομορφισμοί ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης δείξτε ότι $\mathrm{rank}(a + b) \leq \mathrm{rank}(a) + \mathrm{rank}(b)$.

(β) Έστω K σώμα, V ένας K-διανυσματικός χώρος διάστασης n, και

$$\phi, \sigma \in \mathrm{End}_K(V)$$

τέτοια ώστε

$$\phi + \sigma = 1_V.$$

(i) Δείξτε ότι $\operatorname{rank}(\phi) + \operatorname{rank}(\sigma) \geq n$.

(ii) Αν στην παραπάνω ανισότητα ισχύει η ισότητα δείξτε ότι $\phi\sigma = \sigma\phi = 0$, $\phi^2 = \phi$ και $\sigma^2 = \sigma$.

Καλή επιτυχία. Γ. Αντωνιάδης, Μ. Κολουντζάκης, Α. Τερτίκας

Ηράκλειο, 27 Ιουλίου 2001