ΚΟΙΝΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΤΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εισαγωγικές Εξετάσεις της 31ης Ιουλίου 2004

Απειροστικός Λογισμός

1) Έστω $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Θέτουμε $a_n = b_n + 1/b_n$. Δείξτε ότι

α) η ακολουθία (a_n) δεν συγκλίνει στο 0,

β) αν η (a_n) συγκλίνει στο a και η (b_n) στο b, τότε $2b = a \pm \sqrt{a^2 - 4}$.

2) Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^n}{n^n} = 1$.

3) Να βρεθεί συνάρτηση $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ η οποία να είναι συνεχής μόνο στο $x = 0$.

4) Να εξετασθούν ως προς την σύγκλιση οι σειρές

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1000}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n (1 - x^n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}},$$

όπου $x, t \in \mathbf{R}$. Της τελευταίας να βρεθεί και η τιμή για $t = 1$.

5) Να αποδειχθεί ότι $\dfrac{\sqrt{2}}{14} \le \displaystyle\int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}} dx \le \frac{\sqrt{2}}{13}$.

6) Να βρεθεί το $\int_0^a \sin x dx$, $0 < \alpha < 2\pi$, με χρήση αθροισμάτων Riemann, κάνοντας διαμέριση του $[0, \alpha]$ σε n ίσα μέρη, και παίρνοντας όριο. Δίδεται ο τύπος (δεν χρειάζεται να τον αποδείξετε)

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \ldots + \sin n\theta = \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2} \sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}, \qquad 0 < \theta < 2\pi.$$

7) Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \alpha\nu \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \alpha\nu \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο (0,0).

8) Να βρεθούν οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που είναι εγγεγραμμένο στην έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, έχει πλευρές παράλληλες προς τους άξονες και έχει το μέγιστο δυνατό εμβαδόν.

9) Να υπολογισθεί το $\int_0^1\int_0^1 e^{\max(x^2,y^2)}dxdy$.

Γραμμική Άλγεβρα

1) Έστω ότι $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

α) Βρείτε τον A^n για $n = 0, 1, 2, \ldots$ β) Υπολογίστε τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{1000}$.

2) Να επιλυθεί η εξίσωση

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \ldots & x^{n-1} \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & \ldots & 2^{n-1} \\ 1 & 2^2 & 2^4 & 2^6 & \ldots & 2^{2n-2} \\ 1 & 2^3 & 2^6 & 2^9 & \ldots & 2^{3n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & 2^{2n-2} & 2^{3n-3} & \ldots & 2^{(n-1)^2} \end{pmatrix}=0.$$

3) Να υπολογισθεί η ορίζουσα του n×n πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & & & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & & & & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4) Είναι γνωστό ότι αν A και B είναι δύο n×n αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε και ο AB είναι αντιστρέψιμος. Ισχύει το αντίστροφο; (Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα).

5) Έστω $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ γραμμική απεικόνιση με $f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$.

α) Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς μία τέτοια f.

β) Να υπολογισθεί το $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

6) Αν Α ένας n×n πίνακας, συμβολίζουμε με tr(A) το άθροισμα των στοιχείων της (κύριας) διαγωνίου του Α. Δείξτε ότι

α) $tr(AB) = tr(BA)$ για οποιουσδήποτε n×n πίνακες Α, Β,

β) $tr(TAT^{-1}) = tr(A)$ όπου Τ οποιοσδήποτε n×n αντιστρέψιμος πίνακας,

γ) δεν υπάρχουν n×n πίνακες Α, Β με $AB - BA = I_n$.

7) Έστω $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ δύο βάσεις ενός διανυσματικού χώρου V. Δείξτε ότι υπάρχει k με $1 \le k \le n$ τέτοιο ώστε το $\{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, v_k\}$ να είναι βάση του V.

8) Έστω V πραγματικός διανυσματικός χώρος με βάση $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Για ποια n είναι η οικογένεια $\{e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n, e_n + e_1\}$ βάση του χώρου V;

Καλή Επιτυχία.