ΚΟΙΝΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΤΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εισαγωγικές Εξετάσεις της 1ης Αυγούστου 2004

ΑΝΑΛΥΣΗ

1) Δείξτε ότι $0 < 1 - n\log(1+\frac{1}{n}) < 1$ $(n \in \mathbf{N})$ και ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - n\log(1+\frac{1}{n}))$ αποκλίνει.

2) α) Να βρεθεί συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x \in \mathbf{R}$ αν και μόνον αν $x \in \{0\} \cup \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$.
β) Να βρεθεί συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ η οποία να είναι συνεχής στο $x \in \mathbf{R}$ αν και μόνον αν $x \notin \mathbf{Q}$.

3) Υπάρχει συνεχής $f : [0, 1] \to [0, 1]$ και $A, B \subseteq [0, 1]$ με $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = [0, 1]$, $f(A) \subseteq B$, $f(B) \subseteq A$;

4) Δείξτε ότι για κάθε συνεχή $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ με $\int_0^1 f(x)dx = c$, $0 \le f(x) \le c^{2/3}$ ισχύει $\int_0^1 \sqrt{f(x)}dx \ge c^{2/3}$.

5) Αν $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη με $|f(x)| \le 1$, δείξτε ότι

$$\int_0^1 \sqrt{1-(f(x))^2}\,dx \le \sqrt{1-\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2}.$$

6) Έστω $I_\alpha = [-\alpha, \alpha] \times [-\alpha, \alpha]$ και $D_\alpha = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \le \alpha^2 \}$ $(\alpha > 0)$.
α) Αποδείξτε ότι $\iint_{I_a} e^{-x^2-y^2}dxdy = \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)^2$ και ότι $\lim_{\alpha\to\infty} \iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}dxdy = \pi$,
β) με χρήση της σχέσης $D_\alpha \subseteq I_\alpha \subseteq D_{2\alpha}$, αποδείξετε ότι

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

7) Είναι δυνατόν να γραφεί το $\mathbf{R}^2$ ως ένωση ξένων ανά δύο κύκλων; (όπου κύκλος σημαίνει σύνολο της μορφής $\{ x \in \mathbf{R}^2 : \| x - a \|_2 = r \}$, όπου $a \in \mathbf{R}^2$ και $r > 0$.)

8) Έστω συνάρτηση $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$. Αν $f(0,0) = 0$ και $|\partial f/\partial x| \le 2|x-y|$, $|\partial f/\partial y| \le 2|x-y|$, δείξτε ότι $|f(5, 4)| \le 1$.

ΑΛΓΕΒΡΑ - ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

1) Έστω $(\alpha, \beta) = 1$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$. Δείξτε ότι υπάρχουν $m, n \in \mathbf{N}$ τέτοια ώστε $\alpha\beta \mid \alpha^m + \beta^n - 1$.

2) Αποδείξτε ότι, για κάθε ακέραιο n, ο αριθμός $n^{37} - n$ είναι πολλαπλάσιο του 383838. (Υπόδειξη: $383838 = 2\cdot 3\cdot 7\cdot 13\cdot 19\cdot 37$)

3) Έστω ότι x,y είναι ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους, ο ένας άρτιος και ο άλλος περιττός. Έστω, επίσης, ότι a,b,c,d είναι θετικοί ακέραιοι. Αποδείξτε ότι οι αριθμοί $x^a + x^b y^c + y^d$ και $x^a - x^b y^c + y^d$ είναι πρώτοι μεταξύ τους.

4) Έστω πρώτος p, ο οποίος διαιρούμενος δια 71 δίνει υπόλοιπο 13. Αποδείξτε ότι ο p είναι αδύνατον να γραφεί στη μορφή $x^2 + 71y^2$ με $x, y \in \mathbf{Z}$.

5) Έστω $\psi(n) = \sum_{k=1}^{n} (k,n)$ $(n \in \mathbf{N})$. Δείξτε ότι αν $m, n \in \mathbf{N}$ με $(m, n) = 1$, τότε $\psi(mn) = \psi(m)\psi(n)$.

6) Έστω $(G,\cdot)$ κυκλική ομάδα τάξεως m και έστω n θετικός ακέραιος πρώτος προς τον m. Αποδείξτε ότι, για κάθε $a \in G$, η εξίσωση $x^n = a$ είναι επιλύσιμη στην G.

7) Έστω $D_6 = \langle a,b: a^6 = 1, b^2 = 1, ba = a^5 b \rangle$ η 6^η διεδρική ομάδα (θεωρήστε δεδομένο ότι η ομάδα αυτή είναι τάξεως 12) και $H = \langle a^2 \rangle$. Αποδείξτε ότι
α) η H είναι κανονική υποομάδα της D_6,
β) η ομάδα-πηλίκο D_6/H είναι ισόμορφη με την «ομάδα των 4 του Klein», δηλαδή την $V_4 = \langle x,y: x^2 = 1 = y^2, xy = yx \rangle$.

8) Έστω ανάγωγο πολυώνυμο $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$ και z μία μιγαδική ρίζα του. Έστω ένα άλλο πολυώνυμο $g(x) \in \mathbf{Q}[x]$, του οποίου μία από τις ρίζες είναι η z. Δείξτε ότι το $f(x)$ διαιρεί το $g(x)$ στο $\mathbf{Q}[x]$.

9) Έστω R δακτύλιος χαρακτηριστικής p. Αν $\alpha \in R$ και $\alpha^n = 0$ για κάποιο $n \in \mathbf{N}$, δείξτε ότι υπάρχει $m \in \mathbf{N}$ με $(1 + \alpha)^m = 1$.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

1) Δείξτε ότι τα 1, $\sqrt{2}$ και $\sqrt{5}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του **R** πάνω στο **Q**.

2) Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας και B ένας $n \times m$ πίνακας, όπου $m < n$. Δείξτε ότι $\det(BA) = 0$.

3) Έστω A ένας 3x3 πίνακας με πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ και $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 1$. Δείξτε ότι $\det(A) \leq 1/27$.

4) Αν οι στήλες ενός $n \times n$ πραγματικού πίνακα A είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbf{R}^n$, δείξτε ότι τότε το ίδιο συμβαίνει και για τις γραμμές του.

5) Αν A $n \times n$ μιγαδικός πίνακας, δείξτε ότι $\det(I + A^*A) \neq 0$.

6) Αν οι A και B είναι 2x2 πίνακες με $ABABAB = 0$, δείξτε ότι θα είναι και $BABABA = 0$.

7) Έστω A μιγαδικός $n \times n$ πίνακας με μόνη ιδιοτιμή το 0. Δείξτε ή δώστε αντιπαράδειγμα στον ισχυρισμό ότι υπάρχει $m \in \mathbf{N}$ με $A^m = 0$.

8) Έστω $T : V \to V$ γραμμική απεικόνιση όπου V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Δείξτε ότι υπάρχει $n \in \mathbf{N}$ με $(\operatorname{Ker} T^n) \cap (\operatorname{Im} T^n) = \{0\}$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1) Έστω $I \subseteq \mathbf{R}$ ένα ανοικτό διάστημα και $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ μία κανονική, λεία καμπύλη, παραμετρισμένη με το μήκος της, με καμπυλότητα $\kappa > 0$ και στρέψη τ. Αν υπάρχει $u \in \mathbf{R}^3$, $\| u \| = 1$ και $c \in \mathbf{R}$ ώστε $\langle \gamma'(s) , u \rangle = c$ για κάθε $s \in I$, να αποδειχθεί ότι

$$\tau(s) = \pm \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \cdot \kappa(s)$$

για κάθε $s \in I$.

2) Έστω $M = \{(\cosh u \cdot \cos v, \cosh u \cdot \sin v, u) : |u| < \log(1 + \sqrt{2}), 0 < v < 2\pi\}$ και $N = \{(u \cdot \cos v, u \cdot \sin v, v) : |u| < 1, 0 < v < 2\pi\}$.

α) Να αποδειχθεί ότι τα M, N είναι λείες επιφάνειες.

β) Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $F : M \to N$ με τύπο

$$F(\cosh u \cdot \cos v, \cosh u \cdot \sin v, u) = (\sinh u \cdot \cos v, \sinh u \cdot \sin v, v)$$

είναι αμφιδιαφόριση.

γ) Είναι η F ισομετρία;

3) Έστω $\lambda : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbf{R}$ μία C^∞ συνάρτηση. Να υπολογιστεί η καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας $M = \{ (\rho \cdot \cos\theta, \rho \cdot \sin\theta, \rho + \lambda(\theta)) : \rho > 0, |\theta| < \pi/2 \}$ σε κάθε σημείο της.

4) Έστω $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ μία C^3 καμπύλη παραμετρισμένη με το μήκος της, ώστε $\kappa > 0$.

α) Να δειχθεί ότι $\tau = \dfrac{\langle \gamma' \times \gamma'', \gamma''' \rangle}{\| \gamma'' \|^2}$

β) Αν η γ είναι C^4 να αποδειχθεί ότι $\langle \gamma'' \times \gamma''', \gamma'''' \rangle = \kappa^5 \left(\dfrac{\tau}{\kappa} \right)'$.

γ) Αν η γ είναι C^4 και υπάρχει πραγματικός αριθμός $\lambda \neq 0$ ώστε $\langle \gamma' \times \gamma'', \gamma''' \rangle = \lambda \|\gamma''\|^2$ και $\langle \gamma'' \times \gamma''', \gamma'''' \rangle = 0$, να αποδειχθεί ότι η γ είναι κυκλική έλιξ.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

1) Έστω διάνυσμα $b \in \mathbf{R}^n$ και πίνακας $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1/5 & \text{όταν} \quad j \in \{i-1, i, i+1\} \\ 0 & \text{όταν} \quad j \notin \{i-1, i, i+1\} \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

α) Αν $I_n \in \mathbf{R}^{n\times n}$ είναι ο $n\times n$ μοναδιαίος πίνακας, δείξτε ότι ο πίνακας $I_n + A$ είναι αντιστρέψιμος.

β) Κατασκευάστε μία επαναληπτική μέθοδο για την προσέγγιση της λύσης του γραμμικού συστήματος $(I_n + A)x = b$. Αποδείξτε ότι η επαναληπτική μέθοδος που κατασκευάσατε συγκλίνει.

2) Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία υποθέτουμε ότι:
(i) είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, (ii) $f(\alpha)f(\beta) < 0$, (iii) έχει μία μόνο ρίζα x^* στο (α, β). Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της διχοτόμησης στην f με αρχικό διάστημα $[\alpha_0, \beta_0] = [\alpha, \beta]$ παίρνουμε μια ακολουθία προσεγγίσεων $\{\gamma_n\}_n$ της x^* η οποία συγκλίνει, με βάση τη σχετική θεωρία, στην x^*. Δείξτε ότι αν $\gamma_n \neq x^*$ για κάθε n, τότε $|\gamma_{n+1} - \gamma_n| \leq (\beta - \alpha) / 2^{n+2}$ για κάθε n.

3) Έστω $I_m = \int_0^1 x^{2m} \cos x dx$, για κάθε $m \in \mathbf{N}$. Προτείνετε μια ευσταθή μέθοδο για την προσέγγιση του I_p, όπου $p \in \mathbf{N}$ δοθέν, η οποία να μη χρησιμοποιεί κανόνες αριθμητικής ολοκλήρωσης.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1) Αποδείξτε ότι όλες ο ιδιοτιμές λ του προβλήματος $u''(x) + \lambda x^3 u(x) = 0$, $(0 < x < \pi)$, $u(0) = u(\pi) = 0$, είναι θετικές.

2) Αποδείξτε πως η λύση του προβλήματος

$$x'(t) = 4x(t) - x(t)[x^2(t) + y^2(t)],$$
$$y'(t) = 4y(t) - y(t)[x^2(t) + y^2(t)],$$

όπου $x(0) = y(0) = 1$, ορίζεται για όλους τους θετικούς χρόνους.

3) Να βρεθεί η λύση $u = u(x, t)$ του προβλήματος $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ $(-\infty < x < +\infty)$ με $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$, όπου φ και ψ γνωστές συναρτήσεις.

4) Για τη λύση $y = y(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών $y' = 4(3 - y)y$, $y(0) = 2$, να βρεθεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά $\lim y(t)$ καθώς $t \to +\infty$.

5) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $u_t = k u_{xx}$ $(0 < x < L,\ 0 < t < +\infty)$, με $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$, $u(x, 0) = 1/2 + \cos(\pi x/L) + \cos(2\pi x/L)$.

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

1) Βενζίνη αποθηκεύεται σε μία δεξαμενή μία φορά την εβδομάδα. Έστω X_1 η ποσότητα της βενζίνης (ως ποσοστό της δεξαμενής), που αποθηκεύεται την εβδομάδα και X_2 η ποσότητα που καταναλώνεται. Επειδή υπάρχουν περιορισμένες ποσότητες ανεφοδιασμού, η ποσότητα X_1 διαφέρει από βδομάδα σε βδομάδα. Η μελέτη των δεδομένων αρκετών εβδομάδων έδωσε την εξής συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 3x_1 & \gamma\iota\alpha \quad 0 \le x_2 \le x_1 \le 1 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

α) Να βρεθεί η πιθανότητα η X_2 να είναι μεταξύ 0,2 και 0,4 για μια συγκεκριμένη βδομάδα.

β) Να βρεθεί η δεσμευμένη πιθανότητα της X_2 να είναι μικρότερη από 0,2 δεδομένου ότι η X_1 παίρνει την τιμή 0,5.

2) Μία εταιρεία συσκευασίας ζάχαρης έχει τρία εργοστάσια που δέχονται πρώτη ύλη. Η ποσότητα ζάχαρης που μπορεί να συσκευασθεί από ένα εργοστάσιο ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 4 τόνους. Αν τα εργοστάσια λειτουργούν ανεξάρτητα, να βρεθεί η πιθανότητα 2 από τα 3 εργοστάσια να επεξεργαστούν πάνω από 4 τόνους σε μια μέρα. Πόση ποσότητα ζάχαρης πρέπει να εισαχθεί σε ένα εργοστάσιο έτσι ώστε η πιθανότητα το εργοστάσιο να ξεμείνει από πρώτη ύλη να είναι μόνο 0,05;

3) Έστω X μία τυχαία μεταβλητή. Ένας εκτιμητής της διασποράς σ^2 δίνεται από τη σχέση $\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ όπου $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι ο εκτιμητής της μέσης τιμής μ.

α) Να δειχθεί ότι ο πιο πάνω εκτιμητής της διασποράς είναι αμερόληπτος.

β) Έστω ένα δείγμα από την πιο πάνω τυχαία μεταβλητή μεγέθους n = 101. Ο εκτιμητής της διασποράς για τα δεδομένα αυτά υπολογίσθηκε ότι είναι $s^2 = 1$. Να κατασκευαστεί 95% διάστημα εμπιστοσύνης της διασποράς σ^2.

γ) Δίνεται ότι για μεγάλο δείγμα η κατανομή χ^2_{n-1} μπορεί να προσεγγιστεί από την κανονική κατανομή N((n-1), 2(n-1)). Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση αυτή να βρεθεί το 95% διάστημα εμπιστοσύνης της διασποράς σ^2. Να γίνει σύγκριση των δύο διαστημάτων.

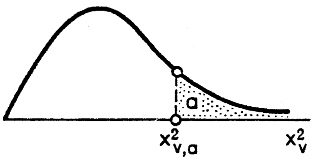
4) Έστω μία θετική τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει την διάρκεια ζωής ενός ηλεκτρικού συστήματος. Το σύστημα αποτελείται από δύο εξαρτήματα τα οποία είναι συνδεδεμένα παράλληλα έτσι ώστε $X = \max\{X_1, X_2\}$. Οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν εκθετική κατανομή που δίνεται από τις $f_{X_1}(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$ και $f_{X_2}(x) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}$ αντίστοιχα ($x \ge 0$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$).

α) Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X.

β) Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X.

γ) Να υπολογιστεί η ροπογενήτρια της X και, χρησιμοποιώντας την ροπογενήτρια, να υπολογιστεί η $E[X^2]$.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3: Κριτικές τιμές της κατανομής χ^2



ν	α									
	.995	.990	.975	.950	.900	.100	.050	.025	.010	.005
1	$0.0^{4}393$	$0.0^{3}157$	$0.0^{3}982$	$0.0^{2}393$	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	[illegible].23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

Πηγή: P. Newbold (1984), "Statistics for Business and Economics", Prentice-Hall Inc.