24/07/2011 Ν. Ευφραιμίδης, Μ. Λυδάκης, Ν. Φραντζικινάκης

Άλγεβρα-Θεωρία Αριθμών

1. Α. Υπάρχουν ισόμορφες ομάδες H και G με H γνήσια υποομάδα της G;
Β. Υπάρχουν ισόμορφες ομάδες H και G με H προσθετική και G πολλαπλασιαστική;
Γ. Δίνεται η ομάδα G, με πράξη τον πολλαπλασιασμό στο $\mathbb{C}$, και στοιχεία όλα τα $z \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $|z| = 1$. Είναι η G ισόμορφη με την πολλαπλαστική ομάδα των μη-μηδενικών πραγματικών αρθμών;

---

2. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας:
Α. Αν κάθε γνήσια υποομάδα της αβελιανής ομάδας G είναι κυκλική, είναι και η G κυκλική;
Β. Αν κάθε γνήσια υποομάδα της ομάδας G είναι αβελιανή, είναι και η G αβελιανή;

---

3. Πόσοι ομομορφισμοί $\phi : G \to \mathbb{Z}_3$ υπάρχουν, αν G είναι η συμμετρική ομάδα S_6; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

---

4. Δίνονται ακέραιοι k, l, m, n τέτοιοι ώστε οι m, n είναι άρτιοι θετικοί και $km+ln = 2$. Δίνονται επίσης ο ομομορφισμός $\phi : \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m$ με $\phi(1) = 1$, και ο ομομορφισμός $\psi : \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ με $\psi(1) = (1, 1)$.
Α. Πόσα στοιχεία έχει ο πυρήνας του ϕ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
Β. Πόσα στοιχεία έχει ο πυρήνας του ψ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

---

5. Υπολογίστε, στο $\mathbb{Z}_{11} = \{0, 1, \ldots, 10\}$, το άθροισμα

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{N}$$

όπου $N = m^n$, $m = 13^{13}$, και $n = 7^{3619}$.

---

6. Δίνεται ένας πρώτος αριθμός p και $a, b \in \mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Δείξτε ότι, αν η εξίσωση

$$x^2 + ax + b = 0$$

δεν έχει λύση στο δακτύλιο $\mathbb{Z}_p$, τότε $\forall n \in \mathbb{Z}$ η εξίσωση

$$(x-n)^3 + p(x^2 + ax + b) = 0$$

δεν έχει λύση στο δακτύλιο $\mathbb{Q}$.

1. Δεδομένου $k \in \{1, 2, 3\}$ ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με τύπο

$$f_n(x) = \frac{x^k}{x^2 + n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

A. Για ποιά k η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε όλο το $\mathbb{R}$;

B. Για ποιά k η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε όλα τα φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$;

---

2. Έστω $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

A. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$.

B. Υπολογίστε (με απόδειξη) το όριο $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$.

---

3. Να βρεθούν (με απόδειξη) όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την ταυτότητα $\int_a^b f(x)\, dx = f(b) - f(a)$ για κάθε $a, b \in \mathbb{Q}$.

---

4. Έστω (p_n) ακολουθία πολυωνύμων η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνάρτηση f σε όλο το $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο.

---

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί $f(x) = f(x + 1) = f(x + \sqrt{2})$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

---

6. Έστω A υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (διαφορετικών) στοιχείων του A η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του A.

1. Έστω P_n η πιθανότητα n άτομα, επιλεγμένα τυχαία, να έχουν γενέθλια διαφορετικές μέρες (υποθέτουμε ότι κανένα άτομο δεν έχει γενέθλια στις 29 Φεβρουαρίου).
Α. Υπολογίστε την πιθανότητα P_n.
Β. Δείξτε ότι $P_n \leq e^{-\frac{n(n-1)}{730}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

---

2. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κατανομή *Poisson* με παραμέτρους $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ αντίστοιχα. Δείξτε ότι η τυχαία μεταβλητή $X_1 + \cdots + X_n$ ακολουθεί την κατανομή *Poisson* με παράμετρο $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.
(Υπενθυμίζεται ότι $X \sim Poisson(\lambda)$ εάν $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.)

---

3. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $[1, 2]$ (η κατανομή τους δεν είναι γνωστή). Εάν $k \leq n$, υπολογίστε την μέση τιμή

$$\mathbb{E}\Big(\frac{\sum_{i=1}^{k} X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\Big).$$

---

4. Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κοινή ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, e]$.
Α. Δείξτε ότι η τυχαία μεταβλητή $Y = \ln X_1$ έχει μέση τιμή $\mu = 0$.
Β. Χρησιμοποιώντας το κεντρικό οριακό θεώρημα (ή διαφορετικά) υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n \geq 1), \qquad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n \geq 2^n).$$

---

5. Ένας μεθυσμένος περπατάει σε επίπεδη επιφάνεια κάνοντας βήματα μήκους ενός μέτρου, ένα κάθε δευτερόλεπτο, και σε τυχαία κατεύθυνση το καθένα (η γωνία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, 2\pi)$). Εάν υποθέσουμε ότι δεν θα βρεί εμπόδια στην πορεία του, ποιά είναι η αναμενόμενη τιμή του *τετραγώνου* της απόστασης του από το σημείο εκκίνησης σε μία ώρα;

1. Βρείτε το διάστημα $(0, a)$ στο οποίο ορίζεται η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\dot{y} = 3ct^2y^3, \quad y(0) = 1,$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ ως συνάρτηση του c.

---

2. Θεωρήστε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y, \\ \dot{y} &= x + y - 2xy. \end{aligned}$$

Προσδιορίστε τα στάσιμα σημεία καθώς και την ευστάθεια τους. Στη συνέχεια σχεδιάστε το πορτρέτο φάσεων.

---

3. Βρείτε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 2e^t.$$

---

4. Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$u_t + uu_x = -u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

όπου

$$u(x, 0) = -x/2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

---

5. Επιλύστε την εξίσωση διάχυσης

$$u_t = u_{xx}$$

σε πεπερασμένο χωρίο ($x \in [0, L], t > 0$) με αρχική συνθήκη $u(x, t = 0) = f(x)$ και συνοριακές συνθήκες $u_x(x = 0, t) = A$, $u(x = L, t) = B$.

---

6. Βρείτε την λύση της εξίσωσης

$$u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

με αρχική συνθήκη

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = g(x) = \cos(x).$$

1. Θεωρούμε τον αραιό πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \gamma_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta_n \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

όπου $|\alpha_1| > |\gamma_1|$, $|\alpha_n| > |\beta_n|$ και $|\alpha_i| \geq |\beta_i| + |\gamma_i|$, $i = 2, \dots, n-1$.
A. Δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ότι μπορεί να αναλυθεί μονοσήμαντα στη μορφή $A = LU$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ell_{n-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & \beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & u_{n-1} & \beta_n \\ 0 & \dots & 0 & 0 & u_n \end{pmatrix},$$

όπου $u_1 = \alpha_1$, $\ell_i = \dfrac{\gamma_i}{u_i}$, $i = 1, \dots, n-1$, $u_i = \alpha_i - \ell_{i-1}\beta_i$, $i = 2, \dots, n$.
B. Έστω ότι $\alpha_i = 2$, $i = 1, \dots, n$, και $\beta_i = \gamma_i = -1$, $i = 2, \dots, n-1$, $\gamma_1 = \beta_n = -1$. Δείξτε ότι,

$$\ell_i = -\frac{i-1}{i}, \; i = 1, \dots, n-1,$$

και βρείτε μια ανάλογη έκφραση για τα u_i. Στη συνέχεια δείξτε ότι $\det(A) = n+1$

---

2. Θεωρούμε την εξίσωση $x + \ln x = 0$, της οποίας η ρίζα $\rho \approx 0.5$.Ποιες απο τις παρακάτω επαναληπτικές μεθόδους μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και γιατί;

$$I. \; x_{n+1} = -\ln x_n, \quad II. \; x_{n+1} = e^{-x_n}, \quad III. \; x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + e^{-x_n})$$

Ποια απο τις παραπάνω προτείνετε ως καλύτερη και γιατί;

---

3. Έστω σημεία x_i, $i = 0, 1, \dots, n+1$, ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους και y_i, $i = 0, \dots, n+1$. Έστω q το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange βαθμού n ως προς τα σημεία $\{(x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, n\}$. Επίσης έστω r το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange βαθμού n ως προς τα σημεία $\{(x_i, y_i) : i = 1, \dots, n+1\}$. Θέτουμε

$$p(x) = \frac{(x - x_0)r(x) - (x - x_{n+1})q(x)}{x_{n+1} - x_0}.$$

Δείξτε ότι το p είναι το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange βαθμού $n+1$ ως προς τα σημεία $\{(x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, n+1\}$