ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
25 ΙΟΥΛΙΟΥ 2009

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ :

- ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
- ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Άσκηση 1. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια
(1) $\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n^2})^{\epsilon(n+n^2)}\right)$.
(2) $\lim_{n\to+\infty}[(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)]$, όπου $\{a_n\}$ είναι ακολουθία θετικών αριθμών και άπειροι όροι της ακολουθίας $\{a_n\}$ είναι μεγαλύτεροι από το $1/2$.

Άσκηση 2.
(1) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $\int_0^x (f(t)-e^{f(t)})dt = 0$ για κάθε $x\in[0,1]$.
Τι συμπεραίνετε για την f;
(2) Για κάθε $x>0$ συγκρίνετε τους αριθμούς e^{x^2}, $(x^2)^e$.

Άσκηση 3.
(1) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία

$$x_n = \frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\ldots+\frac{1}{2^n+5\cdot 2^n}.$$

(2) Υπολογίστε το παρακάτω όριο

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^n+n}\right).$$

Άσκηση 4.
(1) Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \le \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx \le \frac{1}{3}.$$

(2) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση στο σημείο 1 ώστε $|f(x)|\le(1-x)^2$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,2)$.
Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και $f'(1)=0$.

Άσκηση 5. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\int\int_D (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}dA$, όπου

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x\le 2, 0\le y\le \log x\}.$$

Άσκηση 6. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{αν} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{αν} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(1) Εξετάστε αν υπάρχουν οι $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$.
(2) Είναι η f συνεχής στο $(0,0)$;
(3) Είναι η f παραγωγίσιμη (διαφορίσιμη) στο $(0,0)$;

Άσκηση 7.
(1) Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{(1,1,0)}^{(1,0,0)} (e^y+ze^x)dx+(xe^y+e^z)dy+(ye^z+e^x)dz.$$

(2) Με χρήση του θεωρήματος απόκλισης του *Gauss* υπολογίστε το $\int_{\partial B}(2x^2+3y+4z)dS$, όπου

$$B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 1\}.$$

Άσκηση 8.
(1) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty.$$

Είναι η f επί ή $1-1$;
(2) Βρείτε $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε η g είναι παραγωγίσιμη παντού στο $\mathbb{R}$ αλλά η g' δεν είναι συνεχής στο 0.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Όλοι οι διανυσματικοί χώροι είναι πάνω από το $\mathbb{R}$ και όλοι οι πίνακες είναι πίνακες πραγματικών αριθμών.

Άσκηση 1. Έστω $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \text{ο πίνακας} \begin{bmatrix} 1 & x & 2 \\ 1 & y & 3 \\ 1 & z & 5 \end{bmatrix} \text{δεν είναι αντιστρέψιμος}\}$.

Α. Δείξτε ότι το V είναι επίπεδο.

Β. Βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα στο V. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Άσκηση 2. Έστω V ο διανυσματικός χώρος όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τα διανύσματα f, g, h και k του V, που δίνονται από

$$f(x) = \sin^2 x,\ \ g(x) = \cos^2 x,\ \ h(x) = \cos x,\ \ k(x) = \cos 2x.$$

Α. Είναι τα f, g, h γραμμικώς ανεξάρτητα;

Β. Είναι τα f, g, k γραμμικώς ανεξάρτητα;

Άσκηση 3. Έστω $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$. Να απαντήσετε τις παρακάτω τρεις ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Α. Είναι το V κλειστό ως προς την πρόσθεση;

Β. Είναι το V κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό με βαθμωτό;

Γ. Είναι το V υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$;

'

Άσκηση 4. Έστω V ο χώρος στηλών του $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & -2 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ και $L : V \to \mathbb{R}^2$ μία επί γραμμική απεικόνιση. Υπολογίστε τη διάσταση του πυρήνα της L.

Άσκηση 5. Δίνονται ιδιοδιανύσματα x_1, x_2, x_3, x_4 ενός 4×4 πίνακα A. Αν τα x_1, x_2, x_3, x_4 σχηματίζουν βάση του $\mathbb{R}^4$, και αν $A^2 = 0$, δείξτε ότι $A = 0$.

Άσκηση 6. Αν $A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 11 \\ 100 & 1 & 12 \\ 1000 & 1 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 1 & 11 \\ 100 & 1 & 12 \\ 1000 & 1 & 13 \end{bmatrix}^{-1}$, υπολογίστε το $A \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 7. Έστω $a \in \mathbb{R}$ μια ρίζα του πολυωνύμου $x^3 - x - 1$. Να δείξετε ότι το a^3 είναι ιδιοτιμή του $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a^3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 + a^3 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 8. Έστω V ο διανυσματικός χώρος των 2×2 πινάκων και $L : V \to \mathbb{R}$ μια γραμμική απεικόνιση. Δίνεται $A \in V$ με $L(A) = 3$. Αν ο A έχει ιδιοτιμές το $\lambda_1 = 0$ και το $\lambda_2 = 3$, υπολογίστε το $L(A^2)$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.