ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
&
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εισαγωγικές Εξετάσεις Διατμηματικού Μεταπτυχιακού Προγράμματος

"ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ"

ΜΕΡΟΣ 2^o

Ηράκλειο, 23 Ιουλίου 2005.

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ: Τα προτεινόμενα θέματα εντάσσονται σε διαφορετικές περιοχές των Μαθηματικών. Η Εξεταστική Επιτροπή θα επιθυμούσε όπως ασχοληθείτε με θέματα που ανήκουν σε περισσότερες της μιας περιοχές.

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

1. Αποδείξτε ότι για $x > 0$ ισχύει
$$\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}.$$
2. Αποδείξτε ότι η σειρά
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n})\right)$$
συγκλίνει.

ΘΕΜΑ 2 Έστω η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$f_n(x) = \frac{nx}{x^2+n^2}\ , \quad x \in \mathbb{R}, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

1. Βρείτε το $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \ \ x \in \mathbb{R}$.
2. Αποδείξτε ότι η προηγούμενη σύγκλιση, είναι ομοιόμορφη στο $[-M, M], \forall M > 0$.
3. Αποδείξτε ότι η προηγούμενη σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 3 Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής, τέτοια ώστε $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

ΘΕΜΑ 4 Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x\ln x}{x-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

1. Δείξτε ότι
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(1-x)^n}{n+1}$$
ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.
2. Δείξτε ότι
$$\int_0^1 f(x)dx = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(n-1)}.$$

ΘΕΜΑ 5 Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\cos nx dx = 0,$$

υπό την προϋπόθεση ότι:

1. f είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $[0,1]$,
2. f είναι συνεχής στο $[0,1]$.

ΘΕΜΑ 6 Έστω a_n μια ακολουθία, τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} k(a_k - a_{k-1}) = 0.$$

Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$.

ΘΕΜΑ 7 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\lim_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f^*(\lambda) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (\lambda x - f(x)),\ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Αποδείξτε ότι η f^* είναι κυρτή συνάρτηση.
2. Βρείτε όλες τις f που ικανοποιούν την $f^* = f$.

ΘΕΜΑ 8 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Τα σύνολα $A_M = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \le M\}$ είναι κλειστά $\forall M \in \mathbb{R}$.
2. Για κάθε ακολουθία x_n, τέτοια ώστε $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, έχουμε $f(x) \le \liminf_{n\to+\infty} f(x_n)$.

ΘΕΜΑ 9 Θέτουμε

$$A = \left\{ x \in \ell^2 : |x(n)| \le \frac{1}{n},\ \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Δείξτε ότι το A είναι συμπαγές.

ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΡΙΘΜΩΝ - ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο Να λυθεί ως προς x η ισοτιμία $3^x + 3x \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 10)$. [Υπόδειξη: Η λύση θα είναι τής μορφής $x \equiv ; (\mathrm{mod}\ ;)$.]

ΘΕΜΑ 2ο Έστω

$$\varphi(n) := \sharp \{ m \in \mathbb{N} \mid m \leq n \text{ και } \text{μκδ}(m,n) = 1 \}$$

η *αριθμητική συνάρτηση τού Euler*.

(i) Να αποδειχθεί ότι οι φυσικοί αριθμοί $n \in \mathbb{N} \setminus \{4\}$, για τους οποίους ισχύει $\varphi(n) \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4)$, είναι είτε τής μορφής $n = p^k$ είτε τής μορφής $n = 2p^k$, όπου $k \in \mathbb{N}$ και p ένας πρώτος αριθμός με $p \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4)$.

(ii) Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει φυσικός αριθμός n με $\varphi(n) = 14$.

ΘΕΜΑ 3ο (i) Εάν ο p είναι ένας πρώτος αριθμός και ο k ένας ακέραιος, να αποδειχθεί ότι $p \mid k^p + (p-1)!\, k$.

(ii) Έστω p ένας περιττός πρώτος. Να αποδειχθεί η ισχύς των ισοτιμιών:

$$\left[\left(\frac{p-1}{2} \right)! \right]^2 \equiv \begin{cases} -1 \,(\mathrm{mod}\ p)\,, & \text{όταν } p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)\,, \\ \\ 1 \,(\mathrm{mod}\ p)\,, & \text{όταν } p \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\ 4)\,. \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 4ο (i) Εάν η $(G, \cdot)$ είναι μια αβελιανή (πολλαπλασιαστική) ομάδα με ουδέτερό της στοιχείο το e, a, b δυο στοιχεία τής G, και $r, s, t \in \mathbb{N}$, για τους οποίους ισχύει $\text{μκδ}(r,s) = \text{μκδ}(s,t) = \text{μκδ}(t,r) = 1$, να αποδειχθεί η συνεπαγωγή

$$\left[a^r = b^s = (ab)^t = e \right] \Longrightarrow a = b = e.$$

(ii) Παραμένει αυτό το συμπέρασμα εν ισχύ ακόμη και όταν η G είναι μη αβελιανή;

ΘΕΜΑ 5ο Μια ομάδα G καλείται *πεπερασμένως παραγόμενη* όταν παράγεται από πεπερασμένου πλήθους στοιχεία της. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Κάθε πεπερασμένως παραγόμενη υποομάδα τής $(\mathbb{Q}, +)$ είναι κυκλική.

(ii) Η ίδια η $(\mathbb{Q}, +)$ δεν είναι πεπερασμένως παραγόμενη.

(iii) Εάν (για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$) η H_n συμβολίζει την υποομάδα τής $(\mathbb{Q}, +)$ την παραγόμενη από το στοιχείο $\frac{1}{n!}$, τότε $H_1 \subsetneqq H_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq H_i \subsetneqq H_{i+1} \subsetneqq \cdots$ και

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \geq 1} H_n.$$

(Ως εκ τούτου, η εν λόγω ομάδα γράφεται ως ένωση αριθμησίμου πλήθους κυκλικών υποομάδων της, χωρίς η ίδια να είναι κυκλική.)

(iv) Το υποσύνολο των ρητών αριθμών $L := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}, \text{ όπου } a \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2),\ b \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2) \right\}$ αποτελεί μια γνήσια υποομάδα τής $(\mathbb{Q}, +)$ που δεν είναι κυκλική.

ΘΕΜΑ 6ο Έστω ότι ο n είναι ένας φυσικός αριθμός ≥ 1, το K ένα σώμα, η

$$\mathrm{GL}_n(K) := \{ \mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(K) \mid \det(\mathbf{A}) \neq 0_K \}$$

η (πολλαπλασιαστική) *γενική γραμμική ομάδα* των $(n \times n)$-πινάκων (με τις εγγραφές τους ειλημμένες από το K) και η

$$\mathrm{SL}_n(K) := \{ \mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(K) \mid \det(\mathbf{A}) = 1_K \}$$

η αντίστοιχη *ειδική γραμμική ομάδα*. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Η $\mathrm{GL}_n(K)$ είναι μη αβελιανή για οιονδήποτε $n \geq 2$.

(ii) Η $\mathrm{GL}_n(K)$ είναι πεπερασμένη εάν και μόνον εάν το σώμα K είναι πεπερασμένο.

(iii) $\mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{SL}_n(K) \cong K^\times$, όπου $K^\times$ η πολλαπλασιαστική ομάδα των μη μηδενικών στοιχείων τού K.

(iv) Εάν το σώμα K είναι πεπερασμένο με πληθικό αριθμό ίσον με q, τότε

$$|\mathrm{GL}_n(K)| = \prod_{i=0}^{n-1}\left(q^n - q^i\right) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n}\left(q^j - 1\right)$$

και

$$|\mathrm{SL}_n(K)| = \tfrac{1}{q-1}\ |\mathrm{GL}_n(K)|\,.$$

[Υπόδειξη: Για την εύρεση τής τάξεως τής ομάδας $\mathrm{GL}_n(K)$ καταμετρώνται όλοι οι *αντιστρέψιμοι* $(n \times n)$-πίνακες με τις εγγραφές τους ειλημμένες από το *πληθικού αριθμού* q σώμα K. Τι σημαίνει η αντιστρεψιμότητα ενός $(n \times n)$-πίνακα για τις γραμμές του (ή, αντιστοίχως, για τις στήλες του);]

(v) Οι ομάδες $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_3)$ και $\mathfrak{S}_4$ (=: συμμετρική ομάδα σε τέσσερα σύμβολα) είναι δυο μη ισόμορφες ομάδες τάξεως 24. [Διευκρίνιση: Θεωρείται ως γνωστό το ότι κάθε στοιχείο τής $\mathfrak{S}_4$ έχει τάξη $1, 2, 3$ ή 4, καθώς και το ότι η $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_3)$ παράγεται από τους πίνακες

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [1]_3 & [1]_3 \\ [0]_3 & [1]_3 \end{pmatrix} \ \ \text{και} \ \ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} [1]_3 & [0]_3 \\ [1]_3 & [1]_3 \end{pmatrix}.$$

Για την απόδειξη αρκεί π.χ. ο προσδιορισμός ενός στοιχείου τής $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_3)$ τάξεως ≥ 5. Βεβαίως, ευπρόσδεκτη θα είναι και οιαδήποτε άλλη ορθή, εναλλακτική απόδειξη.]

ΘΕΜΑ 7ο (i) Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος, τέτοιος ώστε $\mathbb{Z} \subseteq R \subseteq \mathbb{Q}$. Να αποδειχθεί ότι ο R είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών.

(ii) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $R := \{0\} \cup \left\{ \frac{a}{2^n} \;\middle|\; a \text{ περιττός ακέραιος και } n \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{Q}$ (ως προς τις συνήθεις πράξεις) είναι ένας δακτύλιος τού είδους που περιεγράφη στο (i), να προσδιορισθεί η πολλαπλασιαστική ομάδα $R^\times$ των αντιστρεψίμων στοιχείων του και να εξετασθεί για καθένα των στοιχείων $2\ (= \frac{1}{2^{-1}})$ και $6\ (= \frac{3}{2^{-1}})$ το κατά πόσον είναι ή δεν είναι πρώτο εντός τού δακτυλίου R.

ΘΕΜΑ 8ο Έστω ότι ο m είναι ένας φυσικός αριθμός ≥ 2 με $\sqrt{m} \notin \mathbb{Z}$ και ότι ο p είναι ένας πρώτος αριθμός που πληροί τις ακόλουθες συνθήκες: $p < m, \quad p \mid m+1, \quad p^2 \nmid m+1$. Εάν

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b\sqrt{m} \\ -b\sqrt{m} & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

και

$$I := \left\{ \begin{pmatrix} x & (py+x)\sqrt{m} \\ -(py+x)\sqrt{m} & x \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{Z} \right\},$$

να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το σύνολο R αποτελεί έναν *μεταθετικό* υποδακτύλιο τού $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ με μοναδιαίο (ως προς τις συνήθεις πράξεις).

(ii) Ο R είναι (συν τοις άλλοις) και ακεραία περιοχή.

(iii) Το σύνολο I είναι ένα ιδεώδες τού R.

(iv) Το I δεν είναι κύριο ιδεώδες. (Ως εκ τούτου, ο R δεν είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών.) [Υπόδειξη: Για τα (ii) και (iv) συνιστάται η μελέτη των ιδιοτήτων των οριζουσών των πινάκων που θα εξετασθούν.]

ΘΕΜΑ 9ο (i) Εάν ο n είναι ένας περιττός ακέραιος αριθμός ≥ 1, $\varphi \in \mathbb{R}$ και $c = \cos\varphi$, να εκφρασθεί το $\cos n\varphi$ ως πολυώνυμο τού c με ακεραίους συντελεστές.

(ii) Εάν ο $p \geq 3$ είναι ένας πρώτος αριθμός και το $\varphi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\cos p\varphi = \frac{p}{p+1}$, να αποδειχθεί ότι το $\cos\varphi$ αποτελεί θέση μηδενισμού ενός αναγώγου πολυωνύμου $f(\mathrm{X}) \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ βαθμού p. [Διευκρίνιση: Η εφαρμογή τού κριτηρίου αναγωγιμότητας τού Eisenstein (χωρίς την παράθεση τής αποδείξεώς του) είναι επιτρεπτή.]

ΘΕΜΑ 10ο (i) Εάν τα K και L είναι δυο σώματα με $K \subseteq L$ και $a, b \in L$, και εάν υποτεθεί ότι μκδ$(m,n) = 1$, όπου $m := [K(a) : K]$, $n := [K(b) : K]$, να αποδειχθούν οι ισότητες

$$[K(a,b) : K] = mn, \qquad K(a) \cap K(b) = K.$$

(ii) Να προσδιορισθεί στοιχείο $u \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5})$ και να υπολογισθεί ο βαθμός $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}\right) : \mathbb{Q}\right]$.

<u>ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ 1ο</u> Έστω $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ η καμπύλη η οριζόμενη μέσω τού τύπου

$$\beta(s) := (e^s \cos s, e^s \sin s, e^s).$$

(i) Να υπολογισθούν τα *στοιχεία Frenet* κ, τ, T, N, B (καμπυλότητα, στρέψη και πρωτεύοντα διανύσματα, αντιστοίχως) τής β.

(ii) Να προσδιορισθούν το κέντρο καμπυλότητος και η εξίσωση τού εγγυτάτου επιπέδου της.

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u> Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα ανοικτό διάστημα και έστω $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μια κανονική, λεία καμπύλη παραμετρούμενη από το μήκος τόξου, η οποία έχει καμπυλότητα $\kappa > 0$ και στρέψη τ. Εάν υπάρχουν $u \in \mathbb{R}^3$ και $c \in \mathbb{R}$, ούτως ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\langle \gamma'(s), u \rangle = c, \quad \forall s \in I,$$

να αποδειχθεί ότι

$$\tau(s) = \pm \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \kappa(s), \quad \forall s \in I.$$

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u> Έστω

$$M := \left\{ (\cosh u \cdot \cos v, \cosh u \cdot \sin v, u) \mid 0 < v < 2\pi, \ \ |u| < \log(1+\sqrt{2}) \right\}$$

και έστω

$$N := \{ (u \cdot \cos v, u \cdot \sin v, v) \mid 0 < v < 2\pi, \ \ |u| < 1 \}.$$

(i) Να αποδειχθεί ότι οι M και N είναι λείες επιφάνειες.

(ii) Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $F : M \longrightarrow N$ η οριζόμενη μέσω τού τύπου

$$F((\cosh u \cdot \cos v, \cosh u \cdot \sin v, u)) := (\sinh u \cdot \cos v, \sinh u \cdot \sin v, v)$$

είναι μια αμφιδιαφόριση.

(iii) Να εξετασθεί το κατά πόσον η ως άνω F είναι ή δεν είναι ισομετρία.

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u> Να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$M := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 - z^2 = 1 \right\}$$

είναι μια επιφάνεια δημιουργούμενη εκ περιστροφής και να υπολογισθεί η καμπυλότητα τού Gauss σε κάθε σημείο τής M.

<u>ΘΕΜΑ 5ο</u> Έστω $\lambda : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ μια $\mathcal{C}^\infty$-συνάρτηση. Να υπολογισθεί η καμπυλότητα Gauss τής επιφανείας

$$M := \left\{ (\rho \cdot \cos\theta, \rho \cdot \sin\theta, \rho + \lambda(\theta)) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \rho > 0, \ \ |\theta| < \tfrac{\pi}{2} \right\}$$

σε κάθε σημείο της.

ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΘΕΜΑ 1 Βρείτε τη γενική λύση της Διαφορικής Εξίσωσης

$$ty''(t) - y'(t) - (t-1)y(t) = 0.$$

ΘΕΜΑ 2 Αποδείξτε ότι η μηδενική λύση του προβλήματος

$$x' = -x + 2x^2 + y^2,$$

$$y' = -2y + x^2 + 2y^2,$$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθής λύση.

ΘΕΜΑ 3 Αποδείξτε ότι η λύση του προβλήματος

$$y'(t) = (1+t^2)y^2(t) - 1, \quad t > 0,$$

$$y(0) = 0$$

ορίζεται σε όλο το διάστημα $[0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4 Βρείτε τη λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= \sin x - \sin 2x, \quad 0 < x < \pi, \\ u_t(x,0) &= 0, \quad 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 5 Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων του προβλήματος

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \quad t \geq 0, \\ 2u_t(\pi,t) + u_x(\pi,t) &= 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) &= \phi(x), \quad 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑΤΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ και ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1 Έστω ότι οι X, Y είναι τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\{-1, 1\}$ για τις οποίες:

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}, \text{ και } \mathbb{P}(Y = 1|X) = \frac{1}{2} - \frac{X}{6}.$$

α. Γράψτε την από κοινού κατανομή των X, Y.
β. Ποια είναι η πιθανότητα το τριώνυμο $P(z) = z^2 + Xz + Y$ να έχει πραγματικές ρίζες;
γ. Δεδομένου ότι το $P(z)$ έχει πραγματικές ρίζες, υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της μεγαλύτερης από αυτές.

ΘΕΜΑ 2 Ένα εστιατόριο διαθέτει N πιάτα στον κατάλογό του και κάθε φορά που το επισκέπτεσθε διαλέγετε ένα από αυτά στην τύχη (ανεξάρτητα από τι έχετε διαλέξει τις άλλες φορές διαλέγετε κάθε πιάτο με πιθανότητα $1/N$.) Δείξτε ότι ο αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων μέχρι να δοκιμάσετε όλα τα πιάτα του καταλόγου είναι:

$$N \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.$$

ΘΕΜΑ 3 Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κοινή κατανομή ομοιόμορφη στο διάστημα $[0, e]$.
α. Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διακύμανση της $\ln(X_1)$.
β. Χρησιμοποιώντας το κεντρικό οριακό θεώρημα (ή διαφορετικά) υπολογίστε το όριο:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_1 X_2 \cdots X_n \geq 1).$$

γ. Ποια κατανομή ακολουθεί η $Y_1 = 1 - \ln(X_1)$;

ΘΕΜΑ 4 Ελέγξτε την υπόθεση τα δεδομένα:

$$\{+0.04, -1.85, +0.23, +0.16, +1.17, -1.21, -0.36, +1.75, -0.11\}$$

να προέρχονται από κανονική κατανομή $\mathcal{N}(-1, 1)$, έναντι της υπόθεσης να προέρχονται από κανονική κατανομή $\mathcal{N}(1, 1)$, με επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.001$. Υπολογίστε την ισχύ του ελέγχου σας. (Θα χρειαστείτε τον πίνακα για την αθροιστική τυποποιημένη κανονική κατανομή που επισυνάπτεται.)

ΘΕΜΑ 5 α. Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κατανομή Poisson με παραμέτρους λ, μ αντίστοιχα, βρείτε την κατανομή της $X + Y$. Υπενθυμίζεται ότι αν $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, τότε

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

β. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, ισόνομες, τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κατανομή Poisson με παράμετρο $\theta \geq 0$. Υπολογίστε την

$$\mathbb{P}_\theta(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n | S_n = k_1 + k_2 + \cdots + k_n),$$

όπου $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ και συμπεράνετε ότι η S_n είναι επαρκής για την εκτίμηση της θ. Δείξτε ότι η S_n είναι και πλήρης.
γ. Υπολογίστε την $\mathbb{E}_\theta(X_1^2 | S_n)$. (Υπόδειξη: Η $g(S_n) = \mathbb{E}_\theta(X_1^2 - X_1 | S_n)$ έχει για κάθε $\theta \geq 0$ την ίδια αναμενόμενη τιμή με την $(S_n^2 - S_n)/n^2$.)

ΘΕΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1 Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) := e^{-x} - x = 0$ έχει μόνο μια πραγματική ρίζα ρ, με $\rho \in (0,1)$, στην οποία συγκλίνει η ακολουθία (x_n) που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα για οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$. Δείξτε ακόμη ότι:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \rho}{(x_n - \rho)^2} = -\frac{1}{2(1 + e^{\rho})}.$$

ΘΕΜΑ 2 α. Έστω ότι ο $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας A αναλύεται σε γινόμενο $A = LU$, όπου L είναι ένας $n \times n$ κάτω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο και U άνω τριγωνικός. Δείξτε ότι μια τέτοια ανάλυση είναι μοναδική.
β. Έστω $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ η ακριβής λύση του συστήματος $Ax = b$, όπου A είναι ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας και $b \in \mathbb{R}^n$. Έστω τώρα $x^* \in \mathbb{R}^n$ μια προσέγγιση του x και $r = Ax^* - b$. Δείξτε ότι για κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$ (και αντίστοιχη φυσική νόρμα πινάκων) ισχύει:

$$\frac{\|x - x^*\|}{\|x\|} \le \kappa(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}, \qquad \text{όπου } \kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Πώς ερμηνεύετε αυτή την ανισότητα;

ΘΕΜΑ 3 Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1, \\ (x-1)^4, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

α. Προσεγγίστε την f στο διάστημα [0,2] με μια τμηματικά πολυωνυμική συνάρτηση $p(\cdot)$ της μορφής:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1, \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Προσδιορίστε τα a, b, c, d υποθέτοντας ότι $p \in C^1([0,2])$ και ότι $p(0) = f(0), p'(0) = f'(0), p(1) = f(1), p(2) = f(2), p'(2) = f'(2)$.
β. Συμπίπτει η συνάρτηση $p(\cdot)$ με την παρεμβάλουσα κυβική spline $s(\cdot)$ της f στα σημεία $\{0,1,2\}$ με συνοριακές συνθήκες $s'(0) = f'(0), s'(2) = f'(2)$;

ΘΕΜΑ 4 Προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x) = e^{-x}$ στο διάστημα [0,1] με τον σύνθετο τύπο του τραπεζίου ως προς έναν ομοιόμορφο διαμερισμό με βήμα h. Δείξτε ότι η τάξη της μεθόδου είναι 2.

ΘΕΜΑ 5 Θεωρήστε το κατωτέρω πρόβλημα αρχικών τιμών για ένα 2×2 σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων με αγνώστους $p(t), q(t)$:

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -2q(t), & t \ge 0 \\ \dot{q}(t) = \frac{1}{2}p(t), & t \ge 0 \\ p(0) = 1, & q(0) = 0. \end{cases}$$

α. Δείξτε ότι ισχύει ο νόμος διατήρησης $p^2(t) + 4q^2(t) = 1, \forall t \geq 0$.
β. Θεωρήστε τις προσεγγίσεις (p^n, q^n), $n \geq 0$, που παράγει η μέθοδος του Euler για το παραπάνω σύστημα και σταθερό $h > 0$. Δείξτε ότι $(p^n)^2 + 4(q^n)^2 \to \infty$, καθώς $n \to \infty$.
γ. Θεωρήστε τις προσεγγίσεις (p^n, q^n), $n \geq 0$, που παράγει η μέθοδος του τραπεζίου για το παραπάνω σύστημα και σταθερό $h > 0$. Δείξτε ότι $(p^n)^2 + 4(q^n)^2 = 1,\ \forall n \geq 0$, δηλαδή η μέθοδος του τραπεζίου ικανοποιεί το διακριτό ανάλογο του συνεχούς νόμου διατήρησης του ερωτήματος (α).
δ. Τι μπορούμε να πούμε για την ποσότητα $(p^n)^2 + 4(q^n)^2$ για τις προσεγγίσεις που παράγει η πεπλεγμένη μέθοδος Euler;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Η Επιτροπή Αξιολόγησης:

Μιχάλης Λουλάκης,
Δημήτριος Ντaής,
Αχιλλέας Τερτίκας.