ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
&
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εισαγωγικές Εξετάσεις Διατμηματικού Μεταπτυχιακού Προγράμματος

"ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ"

ΜΕΡΟΣ 1ο

Ηράκλειο, 22 Ιουλίου 2005.

ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ 1 α. Να δείξετε ότι η κατωτέρω σειρά συγκλίνει:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}{n+1}$$

β. Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση για τις διάφορες τιμές του $x>0$ τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

ΘΕΜΑ 2 Δείξτε ότι για κάθε $x \geq 0$ και $p \geq 1$ έχουμε $(1+x)^p \leq 2^{p-1}(1+x^p)$.

ΘΕΜΑ 3 Βρείτε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) & = x + ye^z \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) & = y + xe^z \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) & = xye^z. \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 4 Υπολογίστε το ακόλουθο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{ημ}(x+y) e^{-(x+y)}\, dx\, dy$$

ΘΕΜΑ 5 Βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4,$$

υπό τη δέσμευση

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

ΘΕΜΑ 6 Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} \right).$$

ΘΕΜΑ 7 Έστω $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\int_{-1}^{1} f(s)\, ds = 1$, και

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

Αν $(\alpha,\beta,\gamma) \in S$ και σ το στοιχείο εμβαδού στην S, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_S f(\alpha x + \beta y + \gamma z)\, d\sigma.$$

ΘΕΜΑ 8 Να δείξετε ότι αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$ συγκλίνει, τότε:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = 0.$$

ΘΕΜΑ 9 Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, ώστε:

$$m \leq |f'(x)| \leq M,\ \forall x \in (0,1).$$

για κάποια $m, M \geq 0$. Αποδείξτε ότι:

$$\frac{1}{12}m^2 \leq \int_0^1 f^2(x)\ dx - \left(\int_0^1 f(x)\ dx\right)^2 \leq \frac{1}{12}M^2.$$

(Υπόδειξη: Θεωρήστε αρχικά το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \int_0^1 (f(x) - f(y))^2 dx\ dy$.)

ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΘΕΜΑ 10 Έστω $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ο γραμμικός μετασχηματισμός που ορίζεται από τον τύπο:

$$T(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}(3x - y + 5z), x + y - z, \frac{1}{2}(x + 3y - 5z)\right),\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα του T. Υπολογίστε τις διαστάσεις και προσδιορίστε μια βάση των ανωτέρω υποχώρων του $\mathbb{R}^3$.

ΘΕΜΑ 11 Θεωρήστε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z + w & = a \\ 2x + 5y + 3z & = a \\ x - z & = -b \\ y + z & = b \end{cases}$$

α. Για ποιες τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ έχει το σύστημα λύση στον $\mathbb{R}^4$;
β. Αν υπάρχει λύση ποια είναι η γενική της μορφή;

ΘΕΜΑ 12 α. Έστω $\mathbf{A}$ ένας $n \times n$ πίνακας με γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες. Να δείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τον πίνακα $\mathbf{A}^2$.
β. Αν ο $\mathbf{A}^2$ έχει n γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες, ισχύει το ίδιο και για τον $\mathbf{A}$;

ΘΕΜΑ 13 α. Δείξτε ότι το σύνολο $\mathcal{M} = \{\mathbf{I} + s\ xy^T;\ s \in \mathbb{R}\}$, όπου $\mathbf{I}$ ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας και $x, y \in \mathbb{R}^n$, είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό πινάκων.
β. Αν $x \cdot y \neq -1$, δείξτε ότι ο πίνακας $\mathbf{I} + xy^T$ είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε τον αντίστροφό του.
γ. Υπολογίστε τον αντίστροφο του $n \times n$ πίνακα

$$\begin{pmatrix} n & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

ΘΕΜΑ 14 Βρείτε όλους τους 2×2 πίνακες $\mathbf{A}$ για τους οποίους ισχύει ότι

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ΘΕΜΑ 15 Δίνεται ο $n \times n$ πίνακας

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

α. Βρείτε τις ιδιοτιμές του $\mathbf{A}$.
β. Είναι ο πίνακας $\mathbf{A}$ διαγωνιοποιήσιμος;
γ. Βρείτε τους ιδιόχωρους που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή του $\mathbf{A}$.

ΘΕΜΑ 16 Υπολογίστε τη διάσταση του διανυσματικού χώρου των $n \times n$ πινάκων, κάθε γραμμή και κάθε στήλη των οποίων έχει άθροισμα μηδέν.

ΘΕΜΑ 17 Έστω η ακολουθία πραγματικών αριθμών

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$$

που ορίζεται από τους αναγωγικούς τύπους:

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n, \qquad b_{n+1} = a_n + b_n.$$

Διαγωνιοποιήστε τον πίνακα $\mathbf{A}$ για τον οποίον ισχύει η ισότητα:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

και προσδιορίστε έναν εκπεφρασμένο τύπο για τους a_n, b_n. Δείξτε στη συνέχεια ότι

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}.$$

ΘΕΜΑ 18 Έστω ότι οι $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ είναι δυο $n \times n$ πίνακες.
α. Να δείξετε ότι οι $\mathbf{AB}$ και $\mathbf{BA}$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.
β. Να δείξετε ότι αν ο $\mathbf{AB}$ είναι αντιστρέψιμος, τότε οι $\mathbf{AB}$ και $\mathbf{BA}$ έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.
γ. Βρείτε 2×2 πίνακες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$, τέτοιους ώστε οι $\mathbf{AB}$ και $\mathbf{BA}$ να μην έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Η Επιτροπή Αξιολόγησης:

Μιχάλης Λουλάκης,
Δημήτριος Ντaής,
Αχιλλέας Τερτίκας.