ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
27 ΙΟΥΛΙΟΥ 2007

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ :

- ΑΛΓΕΒΡΑ - ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ
- ΑΝΑΛΥΣΗ
- ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
- ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
- ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
- ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Τα προτεινόμενα θέματα εντάσσονται σε διαφορετικές περιοχές των Μαθηματικών. Η Εξεταστική Επιτροπή θα επιθυμούσε να ασχοληθείτε με θέματα που ανήκουν σε περισσότερες της μιας περιοχής.

ΑΛΓΕΒΡΑ-ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Άσκηση 1. Να υπολογίσετε όλες τις ομάδες τάξεως 6 (modulo ισομορφία).

Άσκηση 2. Να αποδείξετε ότι το ιδεώδες $\langle x^2+1\rangle$ του δακτυλίου $\mathbb{R}[x]$ είναι μέγιστο και ότι το σώμα

$$\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle$$

είναι ισόμορφο προς το σώμα των μιγαδικών αριθμών.

Άσκηση 3. Να αποδειχτεί ότι το σύνολο

$$R=\left\{\frac{a}{3^n} : a\in\mathbb{Z},\ n=0,1,2,3,\ldots\right\}$$

αποτελεί ακεραία περιοχή ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ρητών. Στη συνέχεια να βρεθούν οι μονάδες του R και να εξετασθεί αν οι αριθμοί 3 και 6 είναι ανάγωγα στοιχεία του R.

Άσκηση 4. Να αποδείξετε ότι $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})=\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{5})$. Ποιό είναι το ανάγωγο πολυώνυμο του $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ως προς το σώμα $\mathbb{Q}$, το σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ και το σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$;

Άσκηση 5.

(1) Να αποδειχτεί ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, ο $n!$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο.
(*Υπόδειξη*: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το «αξίωμα του Bertrand» σύμφωνα με το οποίο ανάμεσα στους φυσικούς αριθμούς n και $2n$, για $n>1$, υπάρχει πάντοτε ένας πρώτος p, δηλαδή $n<p<2n$.)

(2) Για ποιούς φυσικούς n, $n\geq 1$, ο αριθμός

$$n!+(n+1)!+(n+2)!$$

είναι τέλειο τετράγωνο;

Άσκηση 6. Ο κομήτης του Halley ζύγωσε αρκετά τη Γη και ήταν εμφανής κατά τα έτη 1835, 1910 και 1986. Πρόκειται να εμφανιστεί και το 2061. Να αποδειχθεί ότι:

$$1835^{1910}+1986^{2061}\equiv 0\ (\mathrm{mod}7).$$

ΑΝΑΛΥΣΗ

Άσκηση 1. Δείξτε ότι η ακολουθία
$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dx}{x}$$
συγκλίνει.

Άσκηση 2.

(1) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις σειρές
$$\sum_{n=2}^{\infty} \cos(\pi n) \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n \ln n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

(2) Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τη σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}, \quad x > 0.$$

Άσκηση 3. Έστω a_n μια ακολουθία τέτοια ώστε
$$na_n \to 0, \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a.$$
Υπολογίστε το όριο της σειράς
$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}).$$

Άσκηση 4. Έστω $A \subset \mathbb{R}$. Θέτουμε
$$B = \{x \in A : \text{το } x \text{ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του } A\}.$$
Δείξτε ότι το B είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Άσκηση 5. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, και A_n μια φθίνουσα ακολουθία (δηλαδή $A_{n+1} \subseteq A_n$) κλειστών υποσυνόλων του $[0,1]$. Δείξτε ότι
$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(A_n).$$

Άσκηση 6. Θεωρήστε γνωστό ότι κάθε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι ένωση ξένων ανά δύο ανοιχτών διαστημάτων (κάποιο από τα άκρα μπορεί να είναι άπειρο).

(1) Δείξτε ότι τα μοναδικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τα οποία είναι ταυτόχρονα ανοιχτά και κλειστά είναι το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}$.

(2) Έστω A μη κενό γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$
έχει τουλάχιστο ένα σημείο ασυνέχειας.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Άσκηση 1. Θεωρήστε την εξίσωση $f(x) := \alpha e^x - x = 0$, όπου $0 < \alpha < \dfrac{1}{e}$ δεδομένη σταθερά. Θεωρήστε επίσης δεδομένο ότι η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς δυο πραγματικές ρίζες $\rho_1 < \rho_2$ με $0 < \rho_1 < 1$ και $\rho_2 > -\ln\alpha$.

(1) Δείξτε ότι η ακολουθία (x_n): $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, όπου $\phi(x) = \alpha e^x$ συγκλίνει στη ρίζα ρ_1 για κάθε $x_0 \in [0, 1]$. Δείξτε επίσης ότι $\dfrac{x_{n+1} - \rho_1}{x_n - \rho_1} \to \rho_1$, $n \to \infty$.

(2) Θεωρήστε την ακολουθία (y_n), $n \geq 0$, που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα για την προσέγγιση των ριζών της f. Αποδείξτε ότι αν $y_0 < -\ln\alpha$, τότε $y_n \to \rho_1$ και ότι αν $y_0 > -\ln\alpha$, τότε $y_n \to \rho_2$. Τι θα συμβεί αν $y_0 = -\ln\alpha$;

Άσκηση 2. Θεωρήστε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ \beta & \gamma & 1 \end{pmatrix},$$

όπου α, β, γ είναι πραγματικές σταθερές. Θεωρήστε ακόμη την επαναληπτική μέθοδο

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x^{(k+1)} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} = b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

για τυχαίο $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$. Προσδιορίστε όλες τις τιμές των σταθερών α, β, γ, ώστε η ακολουθία $(x^{(k)})_{k=0,1,2,\ldots}$ να συγκλίνει για οποιαδήποτε $x^{(0)}$ και $b \in \mathbb{R}^3$ στη λύση x του γραμμικού συστήματος. Αν $\alpha = \gamma = 0$, μπορείτε πάντα να βρείτε τη λύση με δύο το πολύ επαναλήψεις;

Άσκηση 3. Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και η παραγόμενη από αυτήν φυσική νόρμα πίνακα στον $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(1) Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι πίνακες, με A αντιστρέψιμο και B μη αντιστρέψιμο, δείξτε ότι $\dfrac{1}{\|A - B\|} \leq \|A^{-1}\|$.

(2) Έστω $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τέτοιος ώστε $\|I - C\| < 1$. Δείξτε ότι ο C αντιστρέφεται.

(3) Δείξτε ότι αν $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\|D\| < 1$, τότε ο $I - D$ αντιστρέφεται και $\|(I - D)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \|D\|}$.

Άσκηση 4. Έστω $s_1(x) = 1 + c(x + 1)^3$, όπου c είναι μια πραγματική σταθερά. Υπολογίστε το πολυώνυμο $s_2(x)$ έτσι ώστε η συνάρτηση

$$s(x) := \begin{cases} s_1(x) & \text{αν} \quad -1 \leq x < 0 \\ s_2(x) & \text{αν} \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

να είναι κυβική spline ως προς το διαμερισμό $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ του διαστήματος $[-1, 1]$ με συνθήκες στα άκρα $s''(-1) = s''(1) = 0$.

Άσκηση 5. Έστω $I := \displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\, dx$ και T η προσέγγιση του I που δίνει ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου για έναν ομοιόμορφο διαμερισμό πλάτους h του [-1,1]. Δείξτε ότι $|T - I| \leq \dfrac{h^2}{4}$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Άσκηση 1. Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα, και $\gamma : I \to \mathbb{R}$ μια C^∞ καμπύλη παραμετρισμένη με το μήκος της (δηλαδή $\|\gamma'\| = 1$) με καμπυλότητα $k > 0$ και στρέψη τ. Να αποδειχτεί ότι το $\gamma(I)$ βρίσκεται πάνω σε μια σφαίρα τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει μια C^∞ συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$f \cdot \tau = \left(\frac{1}{k}\right)' \quad \text{και} \quad f' + \frac{\tau}{k} = 0.$$

Άσκηση 2. Να αποδειχτεί ότι το σύνολο

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

είναι επιφάνεια εκ περιστροφής (με άξονα περιστροφής τον κάθετο) και να υπολογιστεί η καμπυλότητα Gauss της M σε κάθε σημείο της.

Άσκηση 3. Έστω $M \subset \mathbb{R}^3$ μια C^∞ επιφάνεια και $\gamma : I \to M$ μια C^∞ καμπύλη παραμετρισμένη με το μήκος της, όπου $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα. Έστω $k > 0$ η καμπυλότητα της γ και τ η στρέψη της. Αν για κάθε $s \in I$ η κανονική καμπυλότητα της M στο σημείο $\gamma(s) \in M$ κατά τη διεύθυνση του $\gamma'(s) \in T_{\gamma(s)}M$ μηδενίζεται, να αποδειχθεί ότι η καμπυλότητα Gauss της M στο $\gamma(s)$ δίνεται από τον τύπο

$$k(\gamma(s)) = -(\tau(s))^2.$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Να λυθεί με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_x + 2yu_y = 0, \quad \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \\ u(0,y) = y \end{cases}.$$

Άσκηση 2. Θεωρήστε το μη ομογενές πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t = \kappa \cdot u_{xx} + f(x,t), \quad \kappa > 0,\ 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = g(t),\ u(L,t) = h(t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}.$$

(1) Οι συνοριακές συνθήκες αυτού του προβλήματος είναι Dirichlet ή Neumann;
(2) Αποδείξτε το μονοσήμαντο των λύσεων του προβλήματος.

Άσκηση 3. Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} 3 \cdot u_{tt} + u_{xx} - 4 \cdot u_{xt} = 0, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = x \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}.$$

(1) Το παραπάνω πρόβλημα είναι παραβολικού, υπερβολικού ή ελλειπτικού τύπου (διακαιολογήστε την απάντησή σας).
(2) Βρείτε τη λύση του προβλήματος.

Άσκηση 4. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y' + 5y = 5 \cdot e^{-2t} \cdot \cos t.$$

Άσκηση 5. Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

(1) Να υπολογιστούν οι 2 πρώτες Picard προσεγγίσεις $y_1(t)$, $y_2(t)$ αν $y_0(t) = 1$.
(2) Να βρεθεί η $y_n(t)$. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 6. Θεωρούμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{cases} x' = (x+y)(x-1) \\ y' = (x-y)(x+1) \end{cases}.$$

(1) Να προσδιοριστούν τα σημεία ισορροπίας και να προσδιοριστεί ο τύπος και η ευστάθειά τους.
(2) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης.

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Άσκηση 1.

(1) Επιλέγουμε τυχαία δυο υποσύνολα του $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Βρείτε την πιθανότητα τα δυο σύνολα να είναι ξένα.

(2) Έστω X, Y δυο ανεξάρτητες, θετικές, ακέραιες τυχαίες μεταβλητές, τέτοιες ώστε

$$\mathbb{P}[X = k] = \mathbb{P}[Y = k] = \frac{1}{2^k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Να υπολογιστεί η πιθανότητα η X να διαιρεί την Y.

Άσκηση 2.

(1) Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας f_X. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f_X(\mu - x) = f_X(\mu + x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\mathbb{E}[X] = \mu$.

(2) Θεωρήστε μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες, τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots$ με τιμές στο διάστημα $[0, \infty)$ και πυκνότητα πιθανότητας:

$$f(x) = \frac{\alpha}{(1 + x)^{\alpha+1}}, \ x \geq 0,$$

όπου α είναι μια θετική σταθερά.
Είναι φανερό ότι η $Y_N = \max\{X_1, \ldots, X_N\}$ είναι αύξουσα ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και θέλουμε να προσδιορίσουμε την τάξη μεγέθους της καθώς το $N \to \infty$. Δείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left[Y_N \leq xN^{\frac{1}{\alpha}}\right] = e^{-x^{-\alpha}}, \ \forall x > 0,$$

και συμπεράνετε ότι η $N^{-\frac{1}{\alpha}} Y_N$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ αν } x \leq 0 \\ e^{-x^{-\alpha}} & , \text{ αν } x > 0. \end{cases}$$

Άσκηση 3. Σε μια ακολουθία δοκιμών Bernoulli, έστω X ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία, και Y ο αριθμός των δοκιμών από την πρώτη μέχρι τη δεύτερη επιτυχία. Σταθεροποιούμε ένα φυσικό αριθμό n. Να βρεθεί η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X δεδομένου ότι $X + Y = n$.

Άσκηση 4. Σε ένα κουτί τοποθετούμε 2^m νομίσματα. Ένα από αυτά είναι ελαττωματικό και έχει δύο όψεις με κεφαλή, ενώ τα υπόλοιπα έχουν μια όψη με κεφαλή και μια με γράμματα. Επιλέγουμε ένα νόμισμα στην τύχη και το στρίβουμε m φορές.
Δεδομένου ότι το αποτέλεσμα και των m ρίψεων είναι κεφαλή:
α) βρείτε την πιθανότητα να έχουμε επιλέξει το ελαττωματικό νόμισμα, και
β) βρείτε την πιθανότητα p_m να φέρουμε κεφαλή αν στρίψουμε ακόμη μια φορά το νόμισμα που εκλέξαμε. Ποιό είναι το όριο της p_m καθώς $m \to \infty$;

Άσκηση 5. Σε ένα τυχαίο δείγμα n γεννήσεων (n μεγάλο), ο αριθμός των αγοριών είναι c. Ελέγξτε σε επίπεδο σημαντικότητας α, ότι η πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι είναι ίση με την πιθανότητα να γεννηθεί κορίτσι.

Άσκηση 6. Δυο παίκτες Α, Β παίζουν το εξής παιχνίδι: ξεκινώντας από τον Α ρίχνουν εναλλάξ ένα ζάρι μέχρι είτε ο Α να φέρει έξι (οπότε κερδίζει ο Α), είτε ο Β να φέρει άσο ή δύο (οπότε κερδίζει ο Β).

(1) Ποιά είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου το παιχνίδι να τελειώσει σε μία ή δύο ζαριές;
(2) Ποιά είναι η πιθανότητα να έχει κερδίσει ο Α δεδομένου του παραπάνω ενδεχομένου;
(3) Ποιά είναι η πιθανότητα να κερδίσει ο Α;
(4) Ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός ζαριών μέχρι να ολοκληρωθεί το παιχνίδι;