17/07/2010. Σ. Κομηνέας, Γ. Κωστάκης, Μ. Λουκάκη

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,2]$ με $f(0) = 2$, $f(1) = 1$ και $\int_0^1 f(x)dx < \epsilon$.

2. Δίνεται ακολουθία (a_n) με $a_n = n^n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι

$$\frac{5}{4} \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}$$

για κάθε $n = 2, 3, \ldots$. Εξετάστε την ακολουθία $(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n})$ ως προς τη σύγκλιση.

3. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0,1]$ ώστε

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}\sin\xi.$$

4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/3} \tan x dx.$$

5. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^{x^2} \sin(\sqrt{s})ds.$$

6. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in [3,4]$ ώστε $4^4 - 3^3 = e^{x\ln x}(\ln x + 1)$.

7. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\theta v}$ της σύνθετης συνάρτησης $f = f(u,v)$ που ορίζεται από τις ισότητες

$$f(u,v) = g(x,y) = xe^{\frac{x}{y}},\ x = u^2 + v^2,\ y = uv.$$

8. Εξετάστε αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ της συνάρτησης

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}, \ (x,y) \neq (0,0),$$

$$f(0,0) = 0$$

στο σημείο $(0,0)$.

9. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^3 \int_y^3 e^{x^2} dxdy.$$

Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

1. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση με $f(1,1,1) = (1,0,1)$, $f(1,0,1) = (1,0,0)$ και $f(0,0,1) = (0,0,1)$.
α) Βρείτε τον πίνακα A της f.
β) Βρείτε βάση για την εικόνα της f. Είναι η f επί;
γ) Βρείτε βάση για τον πυρήνα της f. Είναι η f $1-1$;
δ) Είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος;

2. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας πάνω από το σώμα $\mathbf{F}$ με $A^2 = \mathbf{O}$. Δείξτε ότι η τάξη του πίνακα είναι μικρότερη ή ίση του $n/2$.

3. Έστω A ένας $n \times n$ μιγαδικός πίνακας ώστε το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του είναι ίσο με s. Δείξτε ότι το s είναι ιδιοτιμή του A.

4. Έστω A ένας $n \times n$ μιγαδικός πίνακας ώστε $A^3 = A$. Δείξτε ότι

$$Rank A + Rank(A - I) + Rank(A + I) = 2n.$$

5. 1) Για ποιά a, b είναι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & b \end{bmatrix}$$

διαγωνοποιήσιμος;
2) Υπολογίστε τον A^{1000} όπου A ο παραπάνω πίνακας με $a = 1$ και $b = 2$.

6. Έστω $\mathbb{R}[x]$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και $\mathbb{R}_2[x]$ ο υπόχωρος των πολυωνύμων βαθμού ≤ 2. Αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$, δείξτε ότι
1) τα $1, ax+b, (ax+b)^2$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ και
2) τα $1, ax+b, (ax+b)^2, (ax+b)^3, \cdots$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}[x]$.

7. Έστω $f : V \to V$ γραμμική απεικόνιση, όπου V είναι n-διάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος. Έστω $\{v_1, v_2, \cdots, v_{n+1}\}$ ιδιοδιανύσματα της f κάθε n από τα οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Δείξτε ότι $f(v) = \lambda v$ για κάθε $v \in V$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

8. Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \dots & n \\ 4 & 4 & 4 & 4 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ n & n & n & n & \dots & n \end{bmatrix}$$

Καλή επιτυχία