ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
25 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ :

- ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
- ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Άσκηση 1. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια.

(1) $\lim y_n$, όπου $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^a}$, $a > 0$ σταθερά.

(2) $\lim z_n$, όπου $z_n = \dfrac{1 + \cos\frac{1}{n} + \cos\frac{2}{n} + \cdots + \cos\frac{n-1}{n}}{n}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[e^{-x} \cdot \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\, dt\right]$.

Άσκηση 2.

(1) Έστω $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(0) = f(2)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in [0,2]$ με $x - y = 1$ τέτοια ώστε $f(x) = f(y)$.

(2) Δείξτε ότι η εξίσωση

$$\frac{a}{x-\lambda} + \frac{b}{x-\mu} + \frac{c}{x-\nu} = 0$$

έχει λύση στα διαστήματα (λ, μ) και (μ, ν), όπου $a, b, c > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$ είναι σταθερές.

Άσκηση 3. Υπολογίστε τα παρακάτω αθροίσματα.

(1) $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$, $x \neq 1$.

(2) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n}$.

Άσκηση 4.

(1) Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx| \leq |\sin x|,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$.

(2) Έστω $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ θετική και παραγωγίσιμη τέτοια ώστε $f'(x) \geq f(x)$ για κάθε $x > 0$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Άσκηση 5.

(1) Δείξτε ότι

$$\frac{1}{10} < \int_0^1 \frac{x^9}{\left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2}}\, dx < \frac{1}{5}.$$

(2) Δείξτε ότι

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)\, dx,$$

για κάθε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχή.

Άσκηση 6. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ με

$$\mathbf{f}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right), \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Εξετάστε αν υπάρχει βαθμωτό πεδίο $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\nabla\varphi = \mathbf{f}$.

Άσκηση 7.

(1) Θωρούμε τον μετασχηματισμό $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $T(x,y) = (ax + by, cx + dy)$, όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ είναι σταθερές τέτοιες ώστε $ad - bc \neq 0$. Δείξτε ότι το εμβαδό της εικόνας του μοναδιαίου τετραγώνου μέσω του T είναι ίσο με $|ad - bc|$.

(2) Έστω $a, b > 0$. Θεωρούμε το χωρίο

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\right\}$$

και μια συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt = 1$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_E f\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right) dx\, dy.$$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Όλοι οι διανυσματικοί χώροι είναι πάνω από το $\mathbb{R}$ και όλοι οι πίνακες είναι πίνακες πραγματικών αριθμών.

Άσκηση 1. Έστω V ο διανυσματικός χώρος όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Ποια από τα υποσύνολα $V_1 = \{(p(x))^2 : p(x) \in V\}, V_2 = \{p(x^2) : p(x) \in V\}, V_3 = \{x^2 p(x) : p(x) \in V\}$ είναι υπόχωροι του V; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Άσκηση 2. Δίνονται γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα $v_1, \dots v_n$ ενός διανυσματικού χώρου V. Αν αληθεύει, αποδείξτε το, αλλιώς δώστε αντιπαράδειγμα:

(1) Κάποιο v_i είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων v_j.
(2) Κάθε v_i είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων v_j.

Άσκηση 3. Η πρώτη και δεύτερη στήλη ενός αντιστρέψιμου 4×4 πίνακα A είναι, αντίστοιχα, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$, και $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}^T$. Να υπολογιστεί η πρώτη στήλη του A^{-1}.

Άσκηση 4. Δίνεται διανυσματικός χώρος V και γραμμικές απεικονίσεις $L_1, L_2 : V \to V$. Αν $\dim V = 1$, δείξτε ότι $L_1 \circ L_2 = L_2 \circ L_1$.

Άσκηση 5. Δίνονται μη-μηδενικά διανύσματα $x_1, \dots, x_n$ του $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε τα εσωτερικά γινόμενα $x_i \cdot x_j$ είναι μηδέν αν $i \neq j$.

(1) Αποδείξτε πως υπάρχουν $c_1, c_2, \dots c_n \in \mathbb{R}$ με $(1, 1, \dots, 1) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$.
(2) Αν $x_1 = (1, 2, \dots, n)$ αποδείξτε πως το c_1 (βλ. πρώτο μέρος) είναι μικρότερο του 1.

Άσκηση 6. Για ποια $a \in \mathbb{R}$ είναι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ a & a \end{bmatrix}$ διαγωνιοποιήσιμος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Άσκηση 7. Δίνεται μια βάση $b_1, b_2, \dots, b_n$ του $\mathbb{R}^n$. Αν A είναι ένας $n \times n$ πίνακας τέτοιος ώστε

$$Ab_i = \sum_{j \geq i} j b_j$$

να υπολογίσετε την ορίζουσα του A. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Άσκηση 8. Έστω $\mathscr{S}$ το σύνολο όλων των 3×3 πινάκων A που ικανοποιούν $A^3 + 2A^2 + A = 0$, και $\mathscr{P}$ το σύνολο όλων των χαρακτηριστικών πολυωνύμων των $A \in \mathscr{S}$. Να υπολογίσετε το $\mathscr{P}$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Άσκηση 9. Δίνεται ένα σύνολο $\{x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q\}$ από $p+q$ διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα $Ax = 0$ με γενική λύση $x = c_1 x_1 + \cdots + c_p x_p$ και ένα δεύτερο ομογενές γραμμικό σύστημα $Bx = 0$ με γενική λύση $x = d_1 y_1 + \cdots + d_q y_q$. Αν τα $x_1, \dots, x_p$ καθώς και τα $y_1, \dots, y_q$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, ενώ όλα μαζί τα $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, να δείξετε ότι τα δύο συστήματα έχουν άπειρες κοινές λύσεις.