ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
29 ΙΟΥΛΙΟΥ 2006

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

- ΑΝΑΛΥΣΗ
- ΑΛΓΕΒΡΑ - ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ
- ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ
- ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
- ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
- ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
- ΛΟΓΙΚΗ - ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΑΝΑΛΥΣΗ

(1) (α΄) Βρείτε μια θετική ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η $\frac{1}{f}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β΄) Εξετάστε αν οι συναρτήσεις e^{-x^2} και $\sin(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

(2) (α΄) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\alpha > 1$ τέτοιο ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

(β΄) Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τέτοια ώστε

$$|f(x)| \leq \int_0^x f(t)dt$$

για κάθε $x \in [0, 1]$. Δείξτε ότι η f είναι ταυτοτικά ίση με 0.

(3) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\ln(n^n)}, \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

(4) (α΄) Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx}, \ n \in \mathbb{N}, \ x \geq 0.$$

(β΄) Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση την σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n + 1} - \frac{x^{n+1}}{2n + 2} \right), \ x \in [0, 1].$$

(5) (α΄) Βρείτε δυο κλειστά σύνολα $A, B \subset \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $A \cap B = \emptyset$ και

$$\inf\{|a - b| : a \in A, b \in B\} = 0.$$

(β΄) Δείξτε ότι δυο οποιαδήποτε κλειστά σύνολα με τις ιδιότητες του ερωτήματος (α΄) δεν είναι φραγμένα.

(6) Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε

$$\int_0^1 f(x)x^n dx = 0$$

για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι η f είναι ταυτοτικά ίση με 0.

(7) (α΄) Έστω (a_n) μια αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a_n \to +\infty$, και (b_n) μια άλλη ακολουθία τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = \ell.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \ell.$$

(β΄) Χρησιμοποιώντας το (α΄) ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2\pi}{k}\right).$$

(8) Δείξτε ότι

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

(9) Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει $A \subset X$ μη κενό τέτοιο ώστε $f(A) = A$.

ΑΛΓΕΒΡΑ - ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Πρόβλημα 1. **α)** Αποδείξτε ότι, αν η n-οστή δύναμη (n φυσικός αριθμός) ενός ρητού αριθμού q είναι ακέραιος αριθμός, τότε ο q είναι ακέραιος.
β) Έστω ότι οι x, y, z είναι μη μηδενικοί ακέραιοι, που ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες :

$$\text{μ.κ.δ}(x, y) = \text{μ.κ.δ}(y, z) = \text{μ.κ.δ}(z, x) = d$$

και ο αριθμός xyz είναι τέλειος κύβος. Αποδείξτε ότι, υπάρχουν ακέραιοι u, v, w τέτοιοι ώστε $x = du^3$, $y = dv^3$ και $z = dw^3$.

Πρόβλημα 2 Έστω $H_1,\ H_2$ υποομάδες μιάς πεπερασμένης ομάδας G με $H_1, H_2 \neq G$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x \in G$ με $x \notin H_1 \cup H_2$.

Πρόβλημα 3 Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
α) Το πολυώνυμο $x^2 + \bar{1}$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_p[x]$ (ως $\bar{a}$ συμβολίζουμε τα στοιχεία τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_p$).
β) Δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι a, b με $p = a + b$ και $ab \equiv 1 \bmod p$.

Πρόβλημα 4 Για κάθε πρώτο αριθμό p περιγράψτε επακριβώς τις p-Sylow υποομάδες τής συμμετρική ομάδας (ομάδας μεταθέσεων) S_p. Ποιό είναι το πλήθος των παραπάνω υποομάδων;

Πρόβλημα 5 Έστω R ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Θεωρούμε τον δακτύλιο $R[x]$ των πολυωνύμων μεταβλητής x με συντελεστές από τον δακτύλιο R. Δείξτε ότι το $f(x) \in R[x]$ είναι μηδενοδύναμο, αν και μόνον αν, όλοι οι συντελεστές του είναι μηδενοδύναμα στοιχεία τού R.

Πρόβλημα 6 **α)** Έστω ότι τα πολυώνυμα $f(x), g(x)$ έχουν συντελεστές από το σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών. Υποθέτουμε ότι τα $f(x), g(x)$ είναι πρώτα μεταξύ τους πολυώνυμα στον δακτύλιο $\mathbb{Q}[x]$. Αποδείξτε ότι δεν έχουν κοινή μιγαδική ρίζα.
β) Έστω ότι το πολυώνυμο $g(x)$ έχει συντελεστές από το σώμα $\mathbb{Q}$. Υποθέτουμε ότι $g(\sqrt{2} + i\sqrt{3}) = 0$. Αποδείξτε ότι $g(-\sqrt{2} + i\sqrt{3}) = 0$.

Πρόβλημα 7. Δίδονται φυσικοί αριθμοί p, q πρώτοι μεταξύ τους. Δείξτε ότι

$$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \cdots + \left[\frac{(q-1)p}{q}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}\ ,$$

όπου ως $[x]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος τού αριθμού x.

Πρόβλημα 8. Έστω ότι p_n ο n-στός όρος τής ακολουθίας (σε αύξουσα διάταξη) όλων τών πρώτων αριθμών. Δείξτε ότι

$$p_n < 2^{2^n}\ ,\ \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}\,.$$

Υπόδειξη: Κατασκευάστε έναν πρώτο αριθμό $p > p_1 \cdots p_n$.

Πρόβλημα 9 Συμβολίζουμε ως $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ τον δακτύλιο των πολυωνύμων με μεταβλητές τα $x_1, \ldots, x_n$ και συντελεστές από τούς μιγαδικούς αριθμούς. Θεωρούμε τον ομομορφισμό δακτυλίων

$$\Phi : \mathbb{C}[x, y, z] \longrightarrow \mathbb{C}[x, y]$$

που ορίζεται ως $\Phi(f(x, y, z)) = f(x, y, iy)$.
α) Δείξτε ότι ο Φ είναι επιμορφισμός δακτυλίων και βρείτε τον πυρήνα του.
β) Δείξτε ότι το ιδεώδες $< x^2 - y^2 - 1 >$ είναι πρώτο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{C}[x, y]$.
γ) Δείξτε ότι το ιδεώδες $I =< x^2 + y^2 + 2z^2 - 1, y + iz >$ είναι πρώτο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{C}[x, y, z]$.

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ - ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

(1) Ένας 60χρονος άνδρας καπνιστής, διαβητικός και με υπέρταση προσέρχεται στα επείγοντα περιστατικά ενός νοσοκομείου με ναυτία και οπισθοστερνικό πόνο που άρχισε δύο ώρες νωρίτερα, ενώ το καρδιογράφημά του δείχνει ανύψωση του διαστήματος ST στις κατώτερες απαγωγές. Η πιθανότητα του ενδεχομένου ένας ασθενής με το συγκεκριμένο ιστορικό και κλινική εικόνα να παθαίνει έμφραγμα εκτιμάται ότι είναι 98,5%. Ο νεαρός γιατρός που τον βλέπει του προσφέρει τις πρώτες βοήθειες και παραγγέλνει μια δοκιμασία κρεατοφωσφορικής κινάσης (CPK.)

Η κρεατοφωσφορική κινάση (CPK) είναι ένα ένζυμο που βρίσκεται μέσα στα μυικά κύτταρα. Κατά τη διάρκεια ενός εμφράγματος του μυοκαρδίου συμβαίνει καταστροφή του καρδιακού μυός και η CPK που βρίσκεται στα κύτταρα του μυοκαρδίου απελευθερώνεται στην κυκλοφορία. Η δοκιμασία CPK χρησιμοποιείται για τη διάγνωση του εμφράγματος και συνίσταται στη μέτρηση της συγκέντρωσης της CPK στο αίμα. Αν η συγκέντρωσή της είναι πάνω από μια τιμή το αποτέλεσμα της δοκιμασίας θεωρείται θετικό.

Ως *ευαισθησία* της δοκιμασίας CPK ορίζεται η πιθανότητα το αποτέλεσμα της δοκιμασίας να είναι θετικό δεδομένου ότι ο ασθενής έχει υποστεί έμφραγμα του μυοκαρδίου. Η τιμή της είναι $\alpha =$0,99.
Ως *ειδικότητα* της δοκιμασίας CPK ορίζεται η πιθανότητα το αποτέλεσμα της δοκιμασίας να είναι αρνητικό δεδομένου ότι ο ασθενής *δεν* έχει υποστεί έμφραγμα του μυοκαρδίου. Η τιμή της είναι $\beta =$0,60.

Το αποτέλεσμα της δοκιμασίας CPK επιστρέφει αρνητικό. Δεδομένου ότι η ευαισθησία της δοκιμασίας είναι πολύ κοντά στο 1 ο γιατρός σκέφτεται αρχικά να καθησυχάσει τον ασθενή και να τον στείλει στο σπίτι του. Ενθυμούμενος όμως το μάθημα των πιθανοτήτων που είχε παρακολουθήσει στο πρώτο έτος των σπουδών του αποφασίζει να υπολογίσει την πιθανότητα ο ασθενής να έχει υποστεί έμφραγμα δεδομένου ότι το αποτέλεσμα της δοκιμασίας είναι αρνητικό. Τι αποτέλεσμα βρήκε;

(2) Δίνονται $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ παρατηρήσεις που ικανοποιούν τις :

$$Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

όπου οι $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $N(0, \sigma^2)$. Τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι γνωστά αλλά τα β και σ^2 όχι.
α) Προσδιορίστε την εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας $(\hat{\beta}, \hat{\sigma^2})$ για το διάνυσμα (β, σ^2).
β) Ποια είναι η κατανομή της $\hat{\beta}$;
γ) Έστω τώρα $\{\mathbf{u}^i\}_{i=1,2,\ldots,n-1}$ ένα ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$, κάθετα στο $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ορίζουμε:

$$Z_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{u}_j^i Y_j, \ i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Δείχνοντας ότι οι $\{Z_i\}_{i=1,\ldots,n-1}$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $Z_i \sim N(0, \sigma^2)$, είναι ανεξάρτητες από την $\hat{\beta}$ και ότι

$$\sum_{i=1}^{n-1} Z_i^2 = n\hat{\sigma^2},$$

ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, βρείτε την κοινή κατανομή των $\hat{\beta}$ και $\hat{\sigma^2}$.
δ) Αν $x_i = 1, \ i = 1, 2, \ldots, 9$ και οι παρατηρήσεις Y_i είναι:

$$\{2,37, \ 3,63, \ 4,25, \ 2,72, \ 1,75, \ 3,28, \ 3,00, \ 3,82, \ 2,18\},$$

βρείτε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο β. Δίνεται ότι αν η τυχαία μεταβλητή X_ν ακολουθεί την κατανομή του Student με ν βαθμούς ελευθερίας, τότε:

$$P(X_8 \leq 1,86) = 0,95, \ P(X_8 \leq 2,306) = 0,975,$$

$$P(X_9 \leq 1,833) = 0,95, \ P(X_9 \leq 2,262) = 0,975.$$

(3) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N}$ και
$$\mathbb{P}(\{X = k\}) = \frac{k^{-s}}{\zeta(s)},$$
όπου $s > 1$ και
$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$
Έστω τώρα $p_1 < p_2 < \ldots$ η ακολουθία των πρώτων αριθμών και A_ℓ το ενδεχόμενο $\{p_\ell/X\}$ (η X είναι πολλαπλάσιο του p_ℓ).
α. Υπολογίστε την $\mathbb{P}(A_\ell)$.
β. Δείξτε ότι τα ενδεχόμενα $(A_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητα και συνάγετε ότι για κάθε $s > 1$:
$$\prod_{\ell=1}^{\infty}(1 - p_\ell^{-s}) = \frac{1}{\zeta(s)}.$$
γ. Έστω τώρα Y τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από την X και με την ίδια κατανομή. Ποιά είναι η πιθανότητα οι X, Y να είναι σχετικά πρώτοι;

(4) α) Έστω X τυχαία μεταβλητή. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\gamma > 0$ έχουμε:
$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq e^{-\gamma x}\mathbb{E}[e^{\gamma X}].$$
β) Σε ένα κανάλι μεταδίδεται ψηφιακά πληροφορία. Το ενδεχόμενο να συμβεί ένα λάθος στη μετάδοση ενός ψηφίου έχει πιθανότητα $p > 0$ και είναι ανεξάρτητο από το ενδεχόμενο να συμβεί λάθος σε κάποιο άλλο ψηφίο. Βρείτε ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα του ενδεχομένου ο αριθμός των λαθών σε μια σειρά από n ψηφία να είναι πάνω από $nq(q > p)$. Υπόδειξη: Θα σας βοηθήσει να ορίσετε τυχαίες μεταβλητές X_i, με $X_i = 1$ αν το ψηφίο i μεταδοθεί λάθος και 0 διαφορετικά. (Ο βαθμός σας σε αυτό το ερώτημα εξαρτάται από την ακρίβεια του φράγματος που θα βρείτε!)

(5) α) Αν οι $\{X_i\}_{i=1,\ldots,n}$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν εκθετική κατανομή $\exp(\lambda)$ δείξτε (επαγωγικά ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο) ότι το άθροισμά τους ακολουθεί κατανομή $\Gamma(n, \lambda)$. Υπενθυμίζεται ότι οι πυκνότητες πιθανότητας των κατανομών $\exp(\lambda)$ και $\Gamma(n, \lambda)$ είναι αντίστοιχα:
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) \text{ και } h(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x).$$
β) Χρησιμοποιώντας το κεντρικό οριακό θεώρημα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο υπολογίστε το όριο:
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{x^n}{n!}e^{-x}\, dx.$$
γ) Δείξτε ότι η δεσμευμένη κατανομή του $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ δεδομένου ότι $X_1 + \ldots + X_n = A$ είναι ομοιόμορφη στο χωρίο:
$$S^{n-1}(A) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n, \text{ και } x_1 + \ldots + x_n = A\},$$
και συμπεράνετε ότι το άθροισμα των $\{X_i\}$ είναι επαρκής στατιστική για την εκτίμηση της παραμέτρου λ.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

(1) α) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 10\text{ημ}(x), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1.$$

β) Βρείτε τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης:

$$y(x)y''(x) + (y'(x))^2 = \frac{1}{\text{συν}^2(x)}, \qquad 0 < x < \pi/2$$

αν είναι γνωστό ότι $y(0) = 0$ και ότι το όριο $\lim_{x\downarrow 0} y'(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

(2) α) Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[0, \infty)$ που ικανοποιεί την ανισότητα:

$$f'(x) \geq \alpha(x)f(x), \ \forall x \geq 0$$

για κάποια συνάρτηση $\alpha(\cdot)$, συνεχή στο $[0, \infty)$.
Δείξτε ότι για κάθε $x_0 \geq 0$ και κάθε $x \geq x_0$ έχουμε:

$$f(x) \geq f(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} \alpha(y)dy}.$$

Δείξτε επιπλέον ότι αν γνωρίζουμε ότι η f είναι άνω φραγμένη και

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \alpha(y)\, dy = \infty$$

τότε $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \geq 0$.
β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \\ g(x) &= \frac{2}{x + \sqrt{x^2+2}} \\ h(x) &= \frac{2}{x + \sqrt{x^2+4}}. \end{aligned}$$

Δείξτε ότι για κάθε $x \geq 0$:

$$\Phi'(x) - x\Phi(x) + 1 = 0, \qquad g'(x) - xg(x) + 1 \leq 0, \qquad h'(x) - xh(x) + 1 \geq 0.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του ερωτήματος (α) ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο δείξτε ότι $h(x) \leq \Phi(x) \leq g(x)$ και άρα:

$$\frac{2}{x + \sqrt{x^2+4}} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \leq \frac{2}{x + \sqrt{x^2+2}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(3) Δίνεται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x - y + x^3 + xy^2 \\ \dot{y} &= x - y + y^3 + x^2 y. \end{cases}$$

α) Μετασχηματίζοντας την εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο δείξτε ότι το (0,0) είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας και είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.
β) Βρείτε τη λύση $(x(t), y(t))$ αν $x(0)^2 + y(0)^2 = 1$.
γ) Για ποιά σημεία $(x(0), y(0))$ του επιπέδου έχουμε $\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (0, 0)$;
δ) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσεων.
ε) Δείξτε ότι αν $x(0)^2 + y(0)^2 > 1$ η λύση μπορεί να οριστεί για κάθε $t \in [0, t_*)$, όπου:

$$t_* = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x(0)^2 + y(0)^2}{x(0)^2 + y(0)^2 - 1} \right).$$

(4) Βρείτε τη λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x), & \text{για κάθε } t > 0,\ 0 < x < L, \\ u_x(t,0) = u_x(t,L) = 0, & \text{για κάθε } t > 0, \\ u(0,x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2, & 0 \le x \le L, \end{cases}$$

και συμπεράνετε ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(5) Να βρεθεί η συνάρτηση $u : [0,\infty) \times [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ που λύνει το πρόβλημα:

$$\begin{cases} u_t + u^2 u_x = 0, & \text{για κάθε } x \ge 0,\ t > 0, \\ u(0,x) = \sqrt{x}, & \text{για } x \ge 0 \end{cases}$$

Υπόδειξη: Βρείτε χαρακτηριστικές καμπύλες $(t, g(t))$ ώστε η $u(t, g(t))$ να είναι σταθερή.

(6) Η συνάρτηση $u : [0,\infty) \times \mathbb{R}$ έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι και δευτέρας τάξεως που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x)$$

για κάθε $t > 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι για κάθε $t_0 > 0$ και κάθε $t \in [0, t_0]$:

$$\int_{|x-x_0| \le ct} (u_t^2 + c^2 u_x^2)(t_0 - t, x)\, dx \le \int_{|x-x_0| \le ct_0} (u_t^2 + c^2 u_x^2)(0,x)\, dx.$$

και συμπεράνετε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x), & \forall t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R} \\ u_t(0,x) = g(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση. Αν $f(x) = g(x) = 0$ για κάθε x με $|x| \le 1$, μέχρι ποιά στιγμή T μπορούμε να εγγυηθούμε ότι $u(T, 0) = 0$;

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

(1) Βρείτε την παραγοντοποίηση LU του πίνακα:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & 1 & a & a^2 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a & a^2 & a^3 & 1 \end{pmatrix}$$

και χρησιμοποιήστε την για να λύσετε το σύστημα εξισώσεων

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 1-a^4 \\ 0 \\ 0 \\ a-a^5 \end{pmatrix}$$

για οποιοδήποτε $a \in \mathbb{R}$.

(2) Η εξίσωση $x - x^3 = 0$ έχει τρεις προφανείς ρίζες, -1,0 και +1. Θέλουμε να διερευνήσουμε πώς εξαρτάται η σύγκλιση της μεθόδου του Νεύτωνα από την αρχική συνθήκη του αλγορίθμου.

α) Δείξτε ότι αν $x_0 > 1/\sqrt{3}$ τότε $x_n \to 1$, ενώ αν $x_0 < -1/\sqrt{3}$ τότε $x_n \to -1$.

β) Δείξτε ότι $x_n \to 0$ αν και μόνο αν $|x_0| < 1/\sqrt{5}$.

γ) Εξηγήστε τι συμβαίνει αν $1/\sqrt{5} \leq |x_0| \leq 1/\sqrt{3}$.

(3) Δίνεται η διαφορική εξίσωση:

$$y'(x) = -\lambda y(x), \qquad y(0) = 1,$$

όπου $\lambda > 0$.

α) Βρείτε την ακολουθία $y_k(h)$ που παράγει η μέθοδος Euler σαν συνάρτηση του βήματος h. Για ποιές τιμές του h συγκλίνει η y_k;

β) Έστω $\hat{y}(x,h)$ η προσεγγιστική λύση της εξίσωσης με τη μέθοδο του Euler. Υπολογίστε τα όρια:

$$\lim_{h\to 0} \hat{y}(x,h) - e^{-\lambda x}, \qquad \text{και } \lim_{h\to 0} \frac{\hat{y}(x,h) - e^{-\lambda x}}{h}.$$

(4) Στο χώρο $\mathbf{X}$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle P, Q \rangle = \int_a^b P(x)Q(x)\, dx.$$

Έστω τώρα $\mathcal{C}_n$ ο υπόχωρος του $\mathbf{X}$ που αποτελείται από τα πολυώνυμα βαθμού το πολύ n. Μια βάση του $\mathcal{C}_{n+1}$ είναι η $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n+1}\}$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Gram-Schmidt μπορεί κανείς να κατασκευάσει ένα πολυώνυμο P_{n+1} βαθμού $(n+1)$, ορθογώνιο σε κάθε πολυώνυμο βαθμού το πολύ n. Δηλαδή,

$$\text{Για κάθε } Q \in \mathcal{C}_n: \qquad \langle P_{n+1}, Q \rangle = \int_a^b P_{n+1}(x)Q(x)\, dx = 0.$$

α) Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ιδιότητα του P_{n+1} δείξτε ότι το πολυώνυμο αυτό έχει πραγματικές, διακριτές ρίζες $z_0, z_1, \ldots, z_n$ που βρίσκονται όλες στο διάστημα (a,b).

Για την αριθμητική ολοκλήρωση μιας συνάρτησης f χρησιμοποιούμε τον προσεγγιστικό τύπο:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i),$$

όπου τα $x_0, x_1, \ldots, x_n$ είναι διακριτά σημεία στο διάστημα $[a,b]$, ενώ τα βάρη $\{\lambda_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ είναι έτσι επιλεγμένα ώστε ο παραπάνω τύπος να είναι ακριβής για κάθε $Q \in \mathcal{C}_n$.

β) Δείξτε ότι ο παραπάνω προσεγγιστικός τύπος είναι ακριβής για όλα τα πολυώνυμα $Q \in \mathcal{C}_{2n+1}$ αν και μόνο αν επιλέξουμε τα σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_n$ να είναι οι ρίζες του πολυωνύμου P_{n+1} του προηγούμενου ερωτήματος.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Πρόβλημα 1 Βρείτε όλα τα σημεία τής επιφανείας πού ορίζεται από την εξίσωση $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ στα οποία το εφαπτόμενο επίπεδό της περιέχει την ευθεία $y = z = 2 - x$.

Πρόβλημα 2 Βρείτε τίς κύριες καμπυλότητες σε κάθε σημείο τού γραφήματος τής συνάρτησης $z = x^2 - y^2$.

Πρόβλημα 3 Έστω $\alpha(s)$ μιά κανονική C^∞ καμπύλη στον χώρο $\mathbb{R}^3$ παραμετρισμένη ως προς το μήκος τόξου. Σε κάθε τιμή τής παραμέτρου s αντιστοιχούμε το επίπεδο E_s που διέρχεται από το σημείο $\alpha(s)$ και έχει ως κάθετο διάνυσμα το δευτερεύον κάθετο διάνυσμα (δικάθετος) $\vec{b}_\alpha(s)$ τής καμπύλης στο παραπάνω σημείο (θεωρούμε ότι $\alpha''(s) \neq 0$ για κάθε s). Υποθέτουμε οτι υπάρχει ένα σημείο P_0 τού $\mathbb{R}^3$ που ανήκει σε όλα τα παραπάνω επίπεδα E_s, γιά κάθε τιμή τού s. Δείξτε τότε ότι η καμπύλη $\alpha(s)$ είναι μια επίπεδη καμπύλη.

Πρόβλημα 4 Έστω $\gamma : (1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ η κανονική C^∞ καμπύλη

$$\gamma(t) = (\frac{1}{t}, 0, \int_0^{\ln t} \sqrt{1 - e^{-2w}}\, dw)$$

α) Είναι η γ παραμετρισμένη ως προς το μήκος τόξου (δηλ. παραμέτριση μοναδιαίας ταχύτητας); Αν όχι ποιά είναι η αναπαραμέτρησή της ως προς το μήκος τόξου;
β) Να υπολογιστεί η (επίπεδη) καμπυλότητα τής γ.
γ) Να περιγραφεί με τύπο η επιφάνεια M που προκύπτει από την περιστροφή τής γ γύρω από τον κάθετο άξονα (z-άξονα).
δ) Να ευρεθεί η πρώτη θεμελιώδης μορφή τής M (αναφορικά με την στάνταρτ παραμέτρισή της ως επιφάνειας εκ περιστροφής με γενέτειρα γ και άξονα περιστροφής τον κάθετο).
ε) Να υπολογισθεί η καμπυλότητα Gauss σε κάθε σημείο τής M.

ΛΟΓΙΚΗ - ΘΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

(1) Για κάθε φυσικό (θετικό ακέραιο) k, βρείτε μια πρόταση ϕ_k χωρίς μή λογικά σύμβολα τέτοια ώστε

για κάθε δομή $\mathscr{A}$ με σύμπαν A

$\mathscr{A} \models \phi_k$ (η πρόταση ϕ_k ικανοποιείται στη δομή $\mathscr{A}$)

αν και μόνο αν

το σύνολο A έχει ακριβώς k στοιχεία

(2) Δείξτε ότι το σύνολο των γνήσιων τοπικών ακρότατων μιας πραγματικής συνάρτησης είναι το πολύ αριθμήσιμο.

(3) Έστω X ένα άπειρο σύνολο. Δείξτε ότι υπάρχουν ξένα ανά δύο υποσύνολα $A_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε:
- $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
- Το A_n είναι ισοπληθικό με το X για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(4) Έστω X ένα σύνολο και $R \subset X \times X$ μια σχέση μερικής διάταξης. Δείξτε ότι υπάρχει μια σχέση ολικής διάταξης $R' \subset X \times X$ τέτοια ώστε $R \subset R'$.