18/07/2010. Σ. Κομηνέας, Γ. Κωστάκης, Μ. Λουκάκη

ΑΛΓΕΒΡΑ-ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική τριάδα της μορφής $(p, p+2, p+4)$ όπου οι $p, p+2, p+4$ είναι πρώτοι αριθμοί.

2. Αποδείξτε ότι κάθε ημερολογιακό έτος (δίσεκτο ή μη) έχει τουλάχιστον μία 'Τρίτη και 13'.

3. Βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου (αν υπάρχουν) $x^{153} + x^{100} - x^{43} - 2$ στο $\mathbb{Z}_5[x]$.

4. Δείξτε ότι $\phi(n) = n/2 \Leftrightarrow n = 2^k$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$, όπου $\phi(n)$ είναι η συνάρτηση Euler του n.

5. 1) Βρείτε όλους τους ομομορφισμούς από την ομάδα $\mathbb{Z}_6$ στην $\mathbb{Z}_{15}$. Προσδιορίστε τον πυρήνα και την εικόνα τους.
2) Δείξτε ότι οι ομάδες $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/ < (1,0) >$ και $\mathbb{Z}$ είναι ισόμορφες.

6. Έστω p πρώτος. Δείξτε ότι
1) κάθε ομάδα G τάξης p είναι κυκλική και
2) κάθε ομάδα G τάξης p^2 είναι αβελιανή.

7. Έστω R δακτύλιος τέτοιος ώστε $x^2 = x$ για κάθε $x \in R$. Δείξτε ότι ο R είναι μεταθετικός.

8. Έστω $\mathbb{Z}[x]$ ο δακτύλιος των πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές.
1) Δείξτε ότι το σύνολο $I = \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] : 3|f(2)\}$ είναι ιδεώδες του $\mathbb{Z}[x]$.
2) Δείξτε ότι $\mathbb{Z}[x]/I \cong \mathbb{Z}_3$.

9. Έστω K πεπερασμένο σώμα με $q-1$ στοιχεία. Δείξτε ότι
1) Υπάρχει πολυώνυμο $f(x) \in K[x]$ ώστε $f(a) = 0$ και $f(r) = 1$ για κάθε $r \in K$, $r \neq a$.
2) Υπάρχει πολυώνυμο $f(x) \in K[x]$ ώστε $f(a) = 1$ και $f(r) = 0$ για κάθε $r \in K$, $r \neq a$.

ΑΝΑΛΥΣΗ

1. Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Να βρεθούν όλα τα ζεύγη $a, b \in \mathbb{R}$ για τα οποία η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} b^n$$

συγκλίνει.

3. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_0^1 f(x^n)dx \to f(0) \quad \text{καθώς } n \to +\infty.$$

4. Δείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

συγκλίνει.

5. Αν $a_n \geq 0$ δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνον αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ συγκλίνει.

6. Αν $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.

7. Έστω $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$, $n = 1, 2, \ldots$. Αποδείξτε ότι η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ σε κάποια $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

8. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $\int_a^b x^n f(x)dx = 0$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

1. Έστω $0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq 1$ και $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε κατά τμήματα τετραγωνικά πολυώνυμα παρεμβολής

$$p(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)(x - x_{i+1}), \qquad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

α) Δείξτε ότι η απαίτηση $p(x_i) = y_i,\ 1 \leq i \leq n$ ορίζει μοναδικά τους συντελεστές $a_i, b_i,\ 1 \leq i \leq n-1$.

β) Δείξτε ότι με αυτή την επιλογή των a_i, b_i το $p(x)$ είναι συνεχές.

γ) Έστω ότι δίνεται το c_1. Βρείτε μία αναδρομική σχέση γιά τους συντελεστές $c_2, \ldots, c_{n-1}$ έτσι ώστε το $p(x)$ να έχει συνεχή πρώτη παράγωγο.

2. Έστω $||\cdot||$ μία νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και η παραγώμενη από αυτή νόρμα στον $\mathbb{R}^{n,n}$. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος πίνακας και $\kappa(A)$ ο δείκτης κατάστασης του A ως προς $||\cdot||$.

α) Αν $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος πίνακας, αποδείξτε ότι

$$\frac{||B^{-1} - A^{-1}||}{||B^{-1}||} \leq \kappa(A)\,\frac{||A - B||}{||A||}.$$

β) Αν $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $\alpha = ||A^{-1}B|| < 1$ αποδείξτε ότι

$$||(A+B)^{-1} - A^{-1}|| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\,||A^{-1}||.$$

3. Έστω $p_n(z),\ z \in \mathbb{C}$ ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ n το οποίο παρεμβάλει την $f(z) = 1/z$ στις $n-$οστές ρίζες τις μονάδας. Δείξτε ότι

α) $p_n(z) = z^{n-1}$,

β) η ακολουθία $(||p_n - f||)$ δεν συγκλίνει στο 0, όπου $||g|| = \sup_{|z|=1} |g(z)|$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Έστω η εξίσωση

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x) = E$$

όπου m, E θετικές σταθερές, η οποία παριστάνει το θεώρημα διατήρησης της ενέργειας για ένα σωμάτιο κινούμενο σε μία διάσταση. α) Παραγάγετε μία διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης από την παραπάνω σχέση. β) Βρείτε τη γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης για

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

όπου k θετική σταθερά.

2. Να βρεθεί η γενική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = \frac{1}{3}.$$

3. Δίνεται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης

$$\frac{dx}{dt} = a(x+y) - (x-y)(x^2+y^2)$$

$$\frac{dy}{dt} = -a(x-y) - (x+y)(x^2+y^2)$$

όπου a σταθερά. Γράψτε τις εξισώσεις σε πολικές συντεταγμένες (r, θ). Βρείτε και μελετήστε κάποιες στατικές και περιοδικές λύσεις του συστήματος. Σχεδιάστε κατά το δυνατόν τις λύσεις του συστήματος στο επίπεδο (x, y).

4. Έστω η συνάρτηση $u - u(x,t)$ η οποία ικανοποιεί την κυματική εξίσωση (c σταθερά)

$$c^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 \le x \le L,\ t \ge 0$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \ge 0$$

και τις αρχικές συνθήκες

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le L.$$

Βρείτε τη λύση του προβλήματος.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1. Δίνεται η λογαριθμική σπείρα $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$, $t \geq 0$.

α) Βρείτε τη συνάρτηση μήκους τόξου της γ με αρχικό σημείο το $t_0 = 0$. Υπολογίστε μετά το μήκος της.

β) Δείξτε ότι η γωνία θ μεταξύ του $\gamma(t)$ και του $\gamma'(t)$ είναι σταθερή.

γ) Υπολογίστε την καμπυλότητα και τη στρέψη της γ.

2. Δίνεται η αλυσσοειδής επιφάνεια

$$\sigma(u, v) = (\cosh u \cos u, \cosh u \sin v, u), \ \ (u, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$$

α) Βρείτε το τυπικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $N(u, v)$ της σ και την εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου της σ στο $(u_0, v_0) = (0, 0)$.

β) Βρείτε την πρώτη θεμελιώδη μορφή της σ και με τη βοήθεια αυτής δικαιολογήστε γιατί η αλυσσοειδής επιφάνεια είναι ισομετρική με ένα επίπεδο.

γ) Βρείτε την δεύτερη θεμελιώδη μορφή της σ και δείξτε ότι οι ασυμπτωτικές γραμμές της είναι οι $u = v + c$, $u = -v + c$, c σταθερά.

δ) Βρείτε τον πίνακα Weingarten $\mathcal{W}$ και τις πρωταρχικές καμπυλότητες της σ. Με τη βοήθεια αυτών υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss K και την μέση καμπυλότητα H της σ.

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Ένα δοχείο περιέχει N αριθμημένους βώλους από το 1 έως και το N. Βγάζουμε τυχαία k βώλους (χωρίς επανάθεση) και προσθέτουμε τις ενδείξεις τους. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που δείχνει αυτό το άθροισμα. Βρείτε την μέση τιμή $E(X)$.

2. Ένα καγκουρό πηδάει κάθε δευτερόλεπτο ένα μέτρο αριστερά ή δεξιά με την ίδια πιθανότητα $1/2$. Έστω ότι ξεκινάει από το σημείο 0. Αν X η τυχαία μεταβλητή που στην τιμή k δίνει την απόσταση (από το 0) που έχει διανύσει το καγκουρό μετά από k δευτερόλεπτα, βρείτε την $E(X)$.

3. Έστω οι τυχαίες μεταβλητές X, Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας την $f(x, y) = x + y$ για $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. Βρείτε
α) την πιθανότητα $P(X + Y < 1)$,
β) $E[X + Y]$.

4. Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών X, Y είναι ομοιόμορφη στον μοναδιαίο δίσκο με κέντρο το $(0, 0)$. Βρείτε την μέση απόσταση του σημείου (x, y) από το $(0, 0)$.

Καλή επιτυχία