ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
28 ΙΟΥΛΙΟΥ 2006

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

- ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
- ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

(1) Υπολογίστε την απόσταση της έλλειψης

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

από την ευθεία $x + y = 7$.

(2) (α΄) Εξετάστε ως προς τη διαφορισιμότητα τη συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2), & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(β΄) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_E (x^2+y^2)\;dx\;dy$$

όπου E είναι το εσωτερικό της έλλειψης με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

(3) (α΄) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x(1-x)^n\;dx.$$

(β΄) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Θέτουμε

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}.$$

Δείξτε ότι

$$\iint_A f(x+y)\;dx\;dy = \int_{-1}^1 f(t)\;dt.$$

(4) Δίνεται η ακολουθία:

$$x_n = \ln(n) + \alpha\ln(1+n) + \beta\ln(2+n),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(α΄) Ποια σχέση πρέπει να πληρούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ακολουθία x_n να συγκλίνει;

(β΄) Βρείτε τα α, β ώστε η $S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$ να συγκλίνει και υπολογίστε το όριό της.

(5) (α΄) Έστω $p > 2$. Υπολογίστε το

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^p - x^p\right].$$

(β΄) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

(6) (α΄) Αποδείξτε τις παρακάτω ανισότητες για $x > 0$:

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}.$$

(β΄) Οι ακολουθίες $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ορίζονται ως εξής:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{2}{x_n}\left(1 + \frac{x_n}{2} - \sqrt{1+x_n}\right),\ n \geq 2,$$
$$y_n = 4^n x_n,\ n \geq 1.$$

Δείξτε ότι η $\{y_n\}$ συγκλίνει.

(7) Υπολογίστε τα παρακάτω όρια

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{p-1}}{n^p+k^p},\ \text{όπου } p>0, \text{ και } \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\int_0^{x+\frac{\ln x}{x}} e^{\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

(8) Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$|xf(x)-\sin x|\leq x^4.$$

(α΄) Αν η f είναι συνεχής στο 0, βρείτε το $f(0)$.
(β΄) Αν η f είναι συνεχής στο 0, δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και υπολογίστε την $f'(0)$.
(γ΄) Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο 0, υπολογίστε την $f''(0)$.

(9) Ποιο είναι μεγαλύτερο το e^π ή το π^e;

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

(1) Ο πίνακας

$$\Pi_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2a+1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 1+a & -1 & a^2+4a+1 \end{pmatrix}$$

ορίζει ένα γραμμικό μετασχηματισμό $\mathbf{P}_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ μέσω της σχέσης

$$\mathbf{P}_a(\mathbf{x}) = \Pi_a \mathbf{x}.$$

(α΄) Βρείτε μια βάση για τον πυρήνα του $\mathbf{P}_a$ για κάθε τιμή του $a \in \mathbb{R}$.
(β΄) Βρείτε μια βάση για την εικόνα του $\mathbf{P}_3$.
(γ΄) Βρείτε όλα τα διανύσματα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ για τα οποία $\mathbf{P}_3(\mathbf{x}) = \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$.

(2) Διαγωνιοποιήστε τον πίνακα

$$\mathbf{A} = \frac{\pi}{4} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

και υπολογίστε τον πίνακα

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \mathbf{A}^{2n+1}.$$

(3) Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο

$$V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής συνάρτηση}\}$$

(οι πράξεις ορίζονται ως η πρόσθεση συναρτήσεων και ο πολλαπλασιασμός συνάρτησης με σταθερά). Έστω

$$W_1 = \{f \in V : \ f \text{ σταθερή συνάρτηση}\}$$

και

$$W_2 = \left\{ f \in V : \int_0^1 f(x)dx = 0 \right\}.$$

(α΄) Δείξτε ότι οι W_1, W_2 είναι γραμμικοί υπόχωροι του V.
(β΄) Δείξτε ότι $V = W_1 \oplus W_2$.

(4) (α΄) Δείξτε ότι ένας $(2n) \times (2n)$ πραγματικός πίνακας με αρνητική ορίζουσα έχει τουλάχιστο μια πραγματική ιδιοτιμή.
(β΄) Έστω A ένας πραγματικός τετραγωνικός πίνακας τέτοιος ώστε $A^2 = -I$. Υπολογίστε την ορίζουσα του A.

(5) Έστω $\mathscr{P}$ ο $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος όλων των πολυωνύμων πραγματικής μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $T : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ με τύπο

$$T(p)(x) = p(x+1), \ p \in \mathscr{P}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της T.

(6) Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως

$$\varphi(x,y,z) = (3x+2y+4z, 2x+2z, 4x+2y+3z).$$

Βρείτε την απεικόνιση φ^n, για κάθε φυσικό αριθμό n (με φ^n συμβολίζουμε την σύνθεση της απεικόνισης φ με τον εαυτό της n φορές).

(7) (α΄) Δείξτε ότι κάθε 2×2 πίνακας $\mathbf{A}$ με μηδενική ορίζουσα μπορεί να γραφεί ως $\mathbf{A} = \mathbf{x}\mathbf{y}^\top$, όπου $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^2$.
(β΄) Βρείτε πίνακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ώστε $\mathbf{A}^2 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{B}^2 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{C}^2 \neq \mathbf{0}$, αλλά $\mathbf{AB} = \mathbf{BC} = \mathbf{CA} = \mathbf{0}$.
(γ΄) Εξετάστε αν υπάρχουν 2×2 πίνακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ώστε $\mathbf{A}^2 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{B}^2 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{C}^2 \neq \mathbf{0}$, αλλά

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BC} = \mathbf{AC} = \mathbf{0}.$$

(8) Έστω V διανυσματικός χώρος διάστασης n και $\varphi : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση (γραμμικός μετασχηματισμός) με την ιδιότητα $\varphi^n = 0$ και $\varphi^{n-1} \neq 0$ (αν k ένας φυσικός αριθμός, με φ^k συμβολίζουμε τη σύνθεση της απεικόνισης φ με τον εαυτό της k φορές). Δείξτε ότι υπάρχει ένα $x \in V$ τέτοιο ώστε το σύνολο

$$\{x, \varphi(x), \varphi^2(x), \ldots, \varphi^{n-1}(x)\}$$

να είναι βάση του διανυσματικού χώρου V.