ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Λεωφ. Κνωσσού (Τ.Θ. 2208) 714 09 Ηράκλειο Κρήτης, Τηλ.: (081) 393800, 393801, 393807, 393868, Fax: (081) 393881

Εξετάσεις Εισαγωγής
στο
Μεταπτυχιακό Τμήμα
Μέρος Β΄
15 Ιουλίου 2000

Επιτροπή:

Ι. Αντωνιάδης

Μ. Κατσοπρινάκης

Α. Χατζηδήμος

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Τα θέματα που ακολουθούν καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα διαφόρων περιοχών των Μαθηματικών. Αυτό σας δίνει την δυνατότητα να ασχοληθείτε όχι μόνο με τα θέματα της περιοχής που γνωρίζετε καλύτερα, αλλά να επεκταθείτε (πράγμα που θα επιθυμούσε η Επιτροπή) και σε θέματα τουλάχιστον μιας ακόμη περιοχής.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Θέματα ΑΛΓΕΒΡΑΣ-ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Α.Γ.1 (i) Έστω G μία πεπερασμένη ομάδα. Πόσες λύσεις μπορεί να έχει η εξίσωση $x^2 = e$;

(ii) Αν η τάξη της G είναι άρτιος αριθμός τότε υπάρχει $a \in G$ τ.ω. $a^2 = e$.

(iii) Αν G αβελιανή ομάδα τάξης $2 \cdot n$ όπου n περιττός, τότε υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο τάξης 2.

(iv) Μία πεπερασμένη ομάδα με τουλάχιστον δύο στοιχεία η οποία δεν έχει γνήσιες υποομάδες πρέπει να έχει τάξη πρώτο αριθμό.

Α.Γ.2 Κάθε ομάδα τάξης 35 είναι κατ' ανάγκη κυκλική.

Α.Γ.3 Αν $R = \mathbb{Z}[X]$, ο δακτύλιος των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με συντελεστές ακεραίους και $I_1 = \langle x^2+6, 4x \rangle$, $I_2 = \langle x \rangle$:

(i) Ισχύει $I_1 = \mathbb{Z}[X]$;

(ii) είναι το I_1 κύριο ιδεώδες του R;

(iii) είναι το I_2 πρώτο ιδεώδες του R;

(iv) είναι το I_2 maximal ιδεώδες του R;

Α.Γ.4 Θεωρούμε το σώμα $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$.

(i) Ποιό είναι το ανάγωγο πολυώνυμο του $\sqrt[3]{7}$ υπέρ το $\mathbb{Q}$;

(ii) Πόσο είναι ο βαθμός της επέκτασης $[K:\mathbb{Q}]$;

(iii) Να βρείτε μία βάση της επέκτασης $K/\mathbb{Q}$.

(iv) Έστω $a := \sqrt[3]{7^2} + 3\sqrt[3]{7} + 1 \in K$.
Να υπολογίσετε το αντίστροφο του a

Α.Γ.5 (i) Αν $b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $\text{ΜΚΔ}(b,m)=1$, $a, c \in \mathbb{Z}_+$ τέτοιοι ώστε $b^a \equiv 1 \pmod{m}$ και $b^c \equiv 1 \pmod{m}$ τότε θα ισχύει και $b^d \equiv 1 \pmod{m}$, όπου $d := \text{ΜΚΔ}(a,c)$.

(ii) Αν $p \in \mathbb{P}$ τ.ω. $p \mid b^n - 1$ τότε, είτε

(1) $p \mid b^d - 1$ για κάποιο διαιρέτη d του n, $d < n$, είτε

(2) $p \equiv 1 \pmod{n}$.

Αν στην περίπτωση (2) ισχύει επιπλέον $p > 2$ και n περιττός, τότε $p \equiv 1 \pmod{2n}$.

(iii) Να παραγοντοποιήσετε το $3^{12} - 1$.

Α.Γ.6 Η γωνία δύο μη-μηδενικών διανυσμάτων $u, v \in \mathbb{R}^n$ είναι ο μοναδικός $\vartheta \in [0, \pi]$ τέτοιος ώστε
$$\cos\vartheta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Να αποδειχθεί ότι μία γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ διατηρεί τις γωνίες των διανυσμάτων τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $\langle f(u), f(v)\rangle = \lambda \cdot \langle u, v\rangle$ για κάθε $u, v \in \mathbb{R}^n$.

<u>Α.Γ.7</u> Εάν, α είναι καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$, με καμπυλότητα $k \neq 0$, η κεντρική καμπύλη της α είναι η καμπύλη

$$\alpha^* = \alpha + (1/k)N$$

(N είναι το κύριο κάθετο διάνυσμα της καμπύλης), που αποτελείται από τα κέντρα καμπυλότητας της α. Δείξτε ότι αν α είναι <u>κυκλική έλικα</u>

$$\alpha(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{bs}{c}\right),$$

όπου $a > 0$ και $c = (a^2 + b^2)^{1/2}$

τότε η κεντρική καμπύλη της α είναι επίσης κυκλική έλικα.

<u>Α.Γ.8</u> (i) Στον μοναδιαίο κύκλο

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$$

θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $z \sim -z$. Να αποδειχθεί ότι ο χώρος πηλίκο $S^1/\sim$ είναι ομοιομορφικός με S^1.

(ii) Αν στη σφαίρα $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ θεωρήσουμε τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim -x$, ο χώρος πηλίκο $S^2/\sim$ είναι ομοιομορφικός με S^2

ΑΝΑΛΥΣΗ (ΠΡΑΓΜ. – ΜΙΓΑΔ. – ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ κ.λ.π).

A1. (i) Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια στο $\mathbb{R}$ τις συναρτήσεις $f(x)=\sqrt[3]{x}$ και $g(x)=x^2+1$.

(ii) Έστω $f_n(x)=nx(1-x^2)^n$, $0\le x\le 1$, $n\in\mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\lim_n f_n(x)=f(x)$, $x\in[0,1]$, όπου $f(x)\equiv 0$, και εξετάστε αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[0,1]$.

A2. Έστω $f: A\to B$ μία συνάρτηση. Δείξτε ότι:

(i) f 1-1 $\Leftrightarrow$ Υπάρχει συνάρτηση $g: B\to A$ ώστε $g\circ f=I_A$.

(ii) f επί $\Leftrightarrow$ – " – – " – $g: B\to A$ – " – $f\circ g=I_B$.

(iii) Αν $A=B$ και υπάρχει φυσικός $n\ge 2$ ώστε $\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n \text{ φορές}}=I_A$, τότε υπάρχει η $f^{-1}: A\to A$.

(I_A = ταυτοτική συνάρτηση στο A, δηλαδή $I_A(x)=x$, $\forall x\in A$).

A3. Έστω $f\in C^2(\mathbb{R})$ με $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=\ell\in\mathbb{R}$. Βρείτε (αν υπάρχει) το:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[f\left(x+\frac{1}{x^2}\right)-f(x)\right].$$

A4. Έστω Ω τόπος (μη κενό, ανοιχτό, συνεκτικό χωρίο) στο $\mathbb{R}^2$ και $u=u(x,y):\Omega\to\mathbb{R}$ μία $C^2(\Omega)$ συνάρτηση, που ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace $u_{xx}+u_{yy}=0$ (δηλαδή η αρμονική στον Ω). Δείξτε ότι αν και η u^2 είναι επίσης αρμονική στον Ω, τότε u = σταθερή στον Ω.

A5. Έστω $f(z)$ αναλυτική (ολόμορφη) συνάρτηση σ' ένα τόπο $\Omega\subset\mathbb{C}$.

(i) Αν $\Omega=\{z:|z|<2\}$, τότε δείξτε ότι $\max\limits_{|z|=1}\left|f(z)-\frac{1}{z}\right|\ge 1$.

(Υποδ. $\int_{|z|=1}\left(f(z)-\frac{1}{z}\right)dz=\,;$).

(ii) Αν $\Omega=\{z:|z|<1\}$ και $|f(z)|\le\dfrac{1}{1-|z|}$, $\forall z\in\Omega$, τότε δείξτε ότι $|f''(0)|\le\dfrac{27}{2}$.

A6. Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ η σειρά Taylor μιας συνάρτησης $f(z)$, αναλυτικής στο $z_0=0$, με $a_0=1$, $a_1=-1$ και για κάθε $n\geq 2$, $3a_n+4a_{n-1}-a_{n-2}=0$. Βρείτε την $f(z)$, την ακτίνα σύγκλισης της παραπάνω δυναμοσειράς και το $\int_{z=e^{i\theta}} f(z)\,dz$ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$.

(Υπόδ. Αν $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, τότε για κατάλληλα a,b,c το $(a+bz+cz^2)f(z)$ υπολογίζεται εύκολα ---).

A7. Έστω X, Y χώροι Banach και $T: X\to Y$ ένας γραμμικός τελεστής, που είναι συνεχής σ' ένα σημείο του χώρου X. Αν $f(t):[a,b]\to X$ μία συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη στο $t_0\in(a,b)$, τότε δείξτε ότι:

$$Tf'(t_0)=\left[Tf(t)\right]'_{t=t_0}.$$

A8. Έστω $C_0(\mathbb{R})$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα (δηλαδή κάθε $f\in C_0(\mathbb{R})$ μηδενίζεται έξω από κάποιο κλειστό διάστημα). Αν για $f,g\in C_0(\mathbb{R})$ θέσουμε $\rho(f,g)=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|$, τότε δείξτε ότι ο χώρος $(C_0(\mathbb{R}),\rho)$ <u>δεν</u> είναι πλήρης.

A9. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2, \quad g(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,dt.$$

Δείξτε ότι: (i) Οι f και g είναι παραγωγίσιμες και ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)+g'(x)=0$.

(ii) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{4}$ και $g(x)\leq\frac{\pi}{4}e^{-x^2}$

(iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$.

Α10. Έστω $A_n = \{x \in \mathbb{R} : (1+\frac{1}{n})^n \leq x \leq 3 - \frac{1}{4n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, μία ακολουθία συνόλων και
$A_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = tx\}$, $t \in \mathbb{R}$,
μία οικογένεια συνόλων. Βρείτε τα:
$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\Psi = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $Z = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} A_t$, $\Omega = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} A_t$.

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ — ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ.

Π1. (i) Οι τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες και η κάθε μία ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1. Αν $Z = \max(X, Y)$, βρείτε την $E(Z)$.
(ii) Σε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1 επιλέγεται τυχαία ένα σημείο μιας πλευράς του και έστω X η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει την απόσταση του σημείου αυτού από την απέναντι κορυφή. Βρείτε την συνάρτηση κατανομής της X.

Π2. Έστω $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία από ανεξάρτητες τ.μ. οι οποίες ακολουθούν την ίδια κατανομή, που ορίζεται από: Για κάθε $i \in \mathbb{N}$, $X_i(\Omega) = \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ και $\forall k \in X_i(\Omega)$, $P(X_i = k) = \frac{e^{-1}}{(k+1)!}$.
Για $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
(i) Καθορίστε την κατανομή της S_n.
(ii) Χρησιμοποιώντας το Κ.Ο.Θ. δείξτε ότι: $\lim_n P(S_n \leq 0) = \frac{1}{2}$.

Π3. (i) Έστω X τ.μ. με $E(X) = \mu$ $(-\infty < \mu < +\infty)$ και διασπορά σ^2 $(0 < \sigma^2 < +\infty)$. Για $x \in \mathbb{R}$, θέτουμε $V(x) = E[(X-x)^2]$.
Βρείτε την $E(V(X))$ συναρτήσει των μ και σ^2. Τι παρατηρείτε;
(ii) Η μικρή Σοφία μαζεύει φιγούρες από κουτιά Corn-Flakes. Κάθε κουτί περιέχει μία φιγούρα και με n διαφορετικές

φιγούρες η Σοφία κερδίζει ένα δώρο. Δείξτε ότι ο αναμενόμενος αριθμός κουτιών που πρέπει να αγοράσει στην Σοφία η μητέρα της ώστε να κερδίσει δώρο, είναι $E(X) = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
(Υπόδ. Γράψτε την τ.μ. X ως άθροισμα καταλλήλων τ.μ.).

Π.4. Έστω X, Y τ.μ. ορισμένες στον ίδιο δειγματοχώρο Ω και με τιμές στο σύνολο $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Έστω $A = [a_{ij}]$ ο $n\times n$ πίνακας με

$$a_{ij} = P(X=i / Y=j), \quad \forall (i,j)\in E_n^2.$$

(i) Δείξτε ότι: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$.

(ii) Αν $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ο ενδομορφισμός του οποίου ο πίνακας ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι ο A, τότε δείξτε ότι το διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$:

$$\overline{w} = \left(P(X=1), P(X=2), \ldots, P(X=n)\right)^t$$

ανήκει στην $\operatorname{Im}\varphi$.

(iii) Δείξτε ότι: X και Y ανεξάρτητες $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rank}(A) = 1$.

Π5. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα που γεννάται από την τ.μ. X με κατανομή $\mathcal{N}(w, 1)$, όπου $w\in\mathbb{R}$ άγνωστη παράμετρος. Έστω $a, b\in\mathbb{R}$ με $a<b$. Επιθυμούμε να εκτιμήσουμε το

$$\theta = f(w) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-w)^2}{2}}\,dx.$$

(i) Δείξτε ότι $\frac{n_1}{n}$, όπου n_1 ο αριθμός των παρατηρήσεων που ανήκουν στο $[a,b]$ είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής του θ.

(ii) Συμπεράνετε από το (i) ένα αμερόληπτο εκτιμητή ομοιόμορφα ελαχίστης διασποράς για το θ.

Π.6. Πόσες ανεξάρτητες παρατηρήσεις ενός γεγονότος E αγνώστου πιθανότητας p είναι αναγκαίες για να διακρίνουμε, με κινδύνους α και $\beta = 1 - \varepsilon$ δεδομένους, τις δύο υποθέσεις $H_0: p = p_0$ και $H_1: p = p_1$, όπου p_0, p_1 δύο δεδομένοι πραγματικοί αριθμοί στο $[0,1]$.

Π.7. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα (από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές) από μία κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας:

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 0 & , \ x \leq -1 \\ \dfrac{\theta - 1}{x^{\theta}} & , \ x > 1 \end{cases},$$

όπου $\theta \in (1, +\infty)$ είναι η παράμετρος της κατανομής. Έστω $q(\theta) = \dfrac{1}{\theta - 1}$.

(i) Βρείτε την εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας της $q(\theta)$.

(ii) Αποδείξτε ότι η εκτιμήτρια του (i) είναι επίσης η αμερόληπτη εκτιμήτρια ομοιόμορφα ελαχίστης διασποράς της $q(\theta)$.

(iii) Αποδείξτε ότι η εκτιμήτρια του (i) είναι συνεπής καθώς επίσης και ασυμπτωτικά κανονική, δηλαδή αν

$$d_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

είναι η εκτιμήτρια του (i), τότε υπάρχουν σταθερές a_n, b_n, ώστε η

$$a_n\left[d_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) - b_n\right]$$

να τείνει κατά κατανομή σε μία τυπική κανονική κατανομή (δηλαδή με παραμέτρους $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$) και βρείτε τα a_n, b_n.

Συνήθεις και Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Ιούλιος 15, 2000

Δ1.: Να αποδειχτεί ότι η μηδενική λύση του συστήματος ($x(t) \equiv 0,\ y(t) \equiv 0$)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + 8\sin y \\ \frac{dy}{dt} &= 2 - e^x - 3y - \cos y \end{aligned} \tag{1}$$

είναι ευσταθής.

Δ2.: Να θεωρηθεί το πρόβλημα οριακών τιμών

$$\begin{array}{ll} y'' + \gamma^2 y = 0 & y \in [0. L] \\ y'(0) = y'(L) = 0 & \gamma \in I\!R,\ \gamma \ \textit{σταθερό στο} \ [0, L] \end{array} \tag{2}$$

α) Να αποδειχτεί ότι το πρόβλημα (2) ανήκει στην κατηγορία των προβλημάτων Sturm-Liouville και να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυχνότητές του.
β) Εάν το γ **δεν** είναι σταθερό να προταθεί ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών για την αντιμετώπιση του προβλήματος.

Δ3.: Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x). \tag{3}$$

Δ4.: Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$\begin{array}{lll} u_t - u_{xx} = \sin x & \textit{στο} & (0,T) \times (0,\pi) \\ u(0,x) = \sin x & \textit{για} & x \in (0,\pi) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & \textit{για} & t \in (0,T) \end{array} \tag{4}$$

Δ5.: Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 1, \quad a \in I\!R \setminus \{0\}. \tag{5}$$

Δ6.: Να αποδειχτεί ότι η λύση του προβλήματος

$$\begin{array}{lll} \Delta u - u = f(x) & \textit{στο} & \Omega \in I\!R^n \ (x = (x_1, \ldots, x_n)) \\ u = \phi & \textit{στο} & \partial\Omega \end{array} \tag{6}$$

είναι μοναδική.

Δ7.: Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$\begin{array}{lll} u_t - u_{xx} = 0 & \sigma\tau o & (0,T)\times(0,\pi) \\ u(0,x) = \cos x + \cos 2x & \gamma\iota\alpha & x \in (0,\pi) \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 & \gamma\iota\alpha & t \in (0,T) \end{array} \tag{7}$$

Δ8.: Να αποδειχτεί ότι η λύση του προβλήματος

$$\begin{array}{lll} u_{tt} - u_{xx} = f(t,x) & \sigma\tau o & \Omega = (0,T)\times(0,l) \\ u(0,x) = \phi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x) & \gamma\iota\alpha & x \in [0,l] \\ u(t,0) = \mu_1(t),\ u(t,l) = \mu_2(t) & \gamma\iota\alpha & t \in (0,T) \end{array} \tag{8}$$

είναι μοναδική.

Αριθμητική Ανάλυση

Ιούλιος 15, 2000

1.: Δίνονται τα $n+1$, ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, σημεία $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 0(1)n$. Με βάση αυτά ορίζονται τα πολυώνυμα (ή συντελεστές παρεμβολής) του Lagrange ($L_i(x)$, $i = 0(1)n$) από τις σχέσεις

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \ i, j = 0(1)n, \tag{1}$$

όπου δ_{ij} το δέλτα του Kronecker.
α) Να αποδειχτεί ότι τα πολυώνυμα $L_i(x)$, $i = 0(1)n$, δίνονται από τις εκφράσεις

$$L_i(x) = \prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right), \ i = 0(1)n. \tag{2}$$

β) Να αποδειχτεί ότι για τα πολυώνυμα του Lagrange ισχύει

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \sum_{i=0}^{n} x_i L_i(x) = x. \tag{3}$$

2.: Δίνεται η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$x^2 + cx + d = 0, \ \ c, d \in \mathbb{R} \ \ \mu\epsilon \ c > 0 \ \kappa\alpha\iota \ c^2 > 4d. \tag{4}$$

Για την εύρεση καθεμιάς από τις δυο πραγματικές και άνισες ρίζες της (4) προτείνεται αλγόριθμος της μορφής

$$x_{n+1} = \alpha x_n^2 + \beta x_n + \gamma, \ \ n = 0, 1, \ldots \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

α) Να βρεθούν τα β και γ σα συναρτήσεις των α, c και d ώστε αν με κατάλληλη επιλογή του x_0 ο αλγόριθμος (5) συγκλίνει, τότε να συγκλίνει σε μια από τις ρίζες της (4).
β) Να βρεθούν διαστήματα για το α, συναρτήσει των c και d, τέτοια ώστε με κατάλληλη επιλογή του x_0 ο αλγόριθμος (5) να συγκλίνει στη μικρότερη ή στη μεγαλύτερη ρίζα, αντίστοιχα, της (4).

3.: α) Να εξηγηθεί με οποιοδήποτε τρόπο πώς μπορεί να προκύψει ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2), \tag{6}$$

όπου

$$x_i = x_0 + ih \ \ \kappa\alpha\iota \ \ f_i = f(x_i), \ \ i = 0, 1, 2. \tag{7}$$

β) Για πολυώνυμα μέχρι και ποιου βαθμού είναι ο προσεγγιστικός τύπος (6) ακριβής; Να δικαιολογηθεί πλήρως η οποιαδήποτε απάντηση.

4.: α) Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι αντιστρέψιμος και ο πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$||A - B|| < \frac{1}{||A^{-1}||}, \tag{8}$$

όπου $||.||$ συμβολίζει μια φυσική norm (νόρμα) πίνακα, δηλαδή norm που παράγεται από μια διανυσματική norm στο $\mathbb{C}^n$, τότε και ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος.
β) Αν $||I - A|| < 1$, όπου $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, I ο μοναδιαίος πίνακας και $||.||$ μια φυσική norm στον $\mathbb{C}^{n,n}$, να αποδειχτεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος.

5.: Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, συμμετρικός ($A^T = A$) και θετικά ορισμένος ($x^T A x > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$), και $b \in \mathbb{R}^n$ γνωστό διάνυσμα.
α) Να αποδειχτεί ότι τα διαγώνια στοιχεία του A είναι θετικά.
β) Να γίνει ένα βήμα της απαλοιφής του Gauss χωρίς οδήγηση και να αποδειχτεί ότι ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας της κάτω δεξιά γωνίας, που προκύπτει μετά το πρωτο βήμα της απαλοιφής, είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.
γ) Να δοθεί περιληπτικά ένας αλγόριθμος που θα περιγράφει την απαλοιφή του Gauss για την αριθμητική επίλυση του δοθέντος συστήματος.