ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Λεωφ. Κνωσσού (Τ.Θ. 2208) 714 09 Ηράκλειο Κρήτης, Τηλ.: (081) 393800, 393801, 393807, 393868, Fax: (081) 393881

Εξετάσεις Εισαγωγής
στο
Μεταπτυχιακό Τμήμα
Μέρος Α'
14 Ιουλίου 2000

Επιτροπή:

Ι. Αντωνιάδης

Μ. Κατσοπρινάκης

Α. Χατζηδήμος

A1. Έστω $\{a_n\}$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω $p(n)$ η συνεπαγωγή: $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon$.
Τι συμπέρασμα προκύπτει τότε (αν προκύπτει) για την $\{a_n\}$ από καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις (a), (b), (c);
(a) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : p(n)$. (b) $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall \varepsilon > 0, p(n)$.
(c) $\forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon > 0 : p(n)$. Ποιές από τις συνεπαγωγές:
(a) $\Rightarrow$ (b), (a) $\Rightarrow$ (c), (c) $\Rightarrow$ (a), (b) $\Rightarrow$ (a) είναι αληθείς;

A2. (i) Έστω $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \sin\frac{n\pi}{2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Βρείτε τα $\liminf a_n$, $\limsup a_n$, $\inf a_n$ και $\sup a_n$.
(ii) Δείξτε ότι: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2$.

A3. Έστω $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3x^2}$. (i) Να μελετηθεί η f και να γίνει η γραφική της παράσταση.
(ii) Αν $x_1 > 0$ και $x_n = f(x_{n-1})$, $\forall n \geq 2$, τότε βρείτε το $\lim x_n$ αν υπάρχει.
(iii) Αν στο (ii) ξεκινούσαμε με ένα $x_1 < 0$, τί θα μπορούσε να συμβεί;

A4. Δείξτε ότι $\min f(x,y) = 8$, όπου
$$f(x,y) = (x-y)^2 + \left(\sqrt{2-x^2} - \frac{9}{y}\right)^2.$$

A5. Στο χωρίο $\Omega = [0,1] \times [0,1] \sim \{(0,0)\}$ θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2+y^2)^2$.
(i) Δείξτε ότι: $\int_0^1 f(x,y)\,dy = (1+x^2)^{-1}$.
(Υποδ. Μπορείτε, αν θέλετε, να βάλετε $y = x\tan\theta$).
(ii) Βρείτε το $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx$.
(iii) Είναι η συνάρτηση f ολοκληρώσιμη στο Ω;

Γ.Α.1 (i) Να βρείτε τον βαθμό του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & \mu & 2 \\ 0 & 5 & 12-\mu & 8 \end{pmatrix}, \text{ όπου } \mu \in \mathbb{R}$$

(ii) V είναι ένας δ.χ. με εσωτ. γινόμενο

Σωστό ή λάθος; $(\|x\| = \|y\| \Rightarrow \|x+y\| = \|x-y\| \quad \forall x, y \in V)$

Αν $V = \mathbb{R}^2$ απαντήστε στο ερώτημα με στοιχειώδη γεωμετρία.

Γ.Α.2 (i) Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}$ του $\mathbb{Q}$-δ.χ. $\mathbb{R}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(ii) Στον $\mathbb{R}$-δ.χ. $V = \mathbb{R}[X]$ ορίζουμε $W := \{f(X) \in \mathbb{R}[X] \mid f(1) = 0\}$.
Να αποδείξτε ότι $W \leq V$. Εξετάστε αν ο W είναι πεπερασμένης ή άπειρης διάστασης.

Γ.Α.3 Δίνεται το σύστημα $A \cdot X = b$, όπου $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $X, b \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

(i) Να αποδειχθεί ότι $\det A = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)$

(ii) Πόσους παράγοντες έχει το παραπάνω γινόμενο.

(iii) Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το σύστημα $A \cdot X = b$ να έχει μοναδική λύση.

Γ. Α.4 (i) V είναι δ.χ. διάστασης n. $S: V \to V$ γραμμική απεικόνιση.

Αν $S^n = 0$ ενώ $S^{n-1} \neq 0$ να αποδειχθεί ότι η διάσταση του $\ker S$ είναι 1

(ii) Αν $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ τ.ω.

$A^n = 0$ ενώ $A^{n-1} \neq 0$ και $B^n = 0$ ενώ $B^{n-1} \neq 0$ να αποδείξετε ότι οι πίνακες A και B είναι όμοιοι.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ