ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Λεωφ. Κνωσού (Τ.Θ. 2208) 714 09 Ηράκλειο Κρήτης, Τηλ: (081) 234516, 393192, 393193, 393456, Fax: (081) 234516

Εξετάσεις Εισαγωγής στο Μεταπτυχιακό Τμήμα

Μέρος Β'

Σάββατο 18 Ιουλίου 1998

ΑΝΑΛΥΣΗ (Πραγμ.- Μιγ. - Συναρτ.)

Α1) Έστω $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^2+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ και $f(x)=0$, $x \in \mathbb{R}$.

(i) Δείξτε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
(ii) -"- -"- $f_n' \to f'$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
(iii) Για κάθε διάστημα $[a,b]$ είναι η σύγκλιση $f_n \to f$ ομοιόμορφη ή όχι;

Α2) Α: Έστω $u = u(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία C^2 συνάρτηση, που ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace $u_{xx}+u_{yy}=0$ (δηλ. u αρμονική). Δείξτε ότι $u(0,0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta$, $\forall\, r>0$.

Β: Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση και $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ μία C^∞ συνάρτηση τέτοια ώστε:
$\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\} \subset B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|<1\}$ και $\int_B \varphi(x)\,dx = 1$.
Αν $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k=1,2,3,\dots$, είναι η συνάρτηση με τύπο:

$$f_k(x) = \int_B f\left(x+\frac{t}{k}\right)\varphi(t)\,dt,$$

τότε δείξτε ότι: (i) f_k είναι C^∞ συνάρτηση $\forall\, k=1,2,3,\dots$,
(ii) $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x)$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

Α3) Α: Έστω $a \in D(0,1)$, όπου $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z|<1\}$.
(i) Δείξτε ότι: $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \gtreqless 1 \Leftrightarrow |z| \gtreqless 1$, αντίστοιχα.

(ii) Αν f ολόμορφη συνάρτηση στον τόπο Ω και $\overline{D(0,1)} \subset \Omega$, τότε δείξτε ότι: $(1-|a|^2)|f(a)| \le \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})|\,d\theta$.

Β: Έστω f μία ολόμορφη συνάρτηση στον $D(0,1)$ με $\mathrm{Re}\, f(z) = u(z)$ και $\mathrm{Im}\, f(z) = v(z)$. Δείξτε ότι:

$$f'(0) = \frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})e^{-i\theta}\,d\theta, \quad \forall\, r \in (0,1).$$

A4) Έστω $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος Hilbert και $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία ορθοκανονική ακολουθία στον H.

(i) Για κάθε $x \in H$, δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle^2 \leq \|x\|^2$.

(ii) Για κάθε $x \in H$, δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$ συγκλίνει σ' ένα $y \in H$. Πότε ισχύει ότι $y = x$;

(Υποδ:
(i) $\| x - \sum_{n=1}^{m} \langle x, e_n\rangle e_n \|^2 \geq 0$ κ.λ.π.
(ii) Δείξτε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς είναι βασική στον H κ.λ.π.).

A5) Ένα βασικό Θεώρημα λέει ότι:
Έστω (X, ρ_1), (Y, ρ_2) δύο μετρικοί χώροι και $C(X,Y)$ ο χώρος των φραγμένων συνεχών συναρτήσεων $f: X \to Y$, με απόσταση $\rho(f,g) = \sup_{x\in X} \rho_2(f(x), g(x))$. Αν ο χώρος Y είναι πλήρης, τότε και ο $C(X,Y)$ είναι πλήρης.
Αποδείξτε το Θεώρημα αυτό.

A6) Έστω $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών η οποία έχει την εξής ιδιότητα:
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε
$$(\forall n \geq n_0 \text{ και } \forall m \in \mathbb{N} \text{ με } n \leq m \leq (1+\delta)n) \Rightarrow a_m - a_n \geq -\varepsilon.$$
Δείξτε ότι αν
$$\sigma_n = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1} \to 0, \text{ τότε και } a_n \to 0$$
(Υποδ: εξετάστε αν θέλετε το $\limsup a_n$ και το $\liminf a_n$.).

ΑΛΓΕΒΡΑ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

ΑΓ-1. Εστωσαν $a, \beta \in \mathbb{C}$ που ικανοποιούν τις ισότητες

$$a^3 + 6a^2 + 1 = 0 \quad \text{και} \quad \beta = a^7 + 6a^6 + a^4 + a^3 + 7a^2 + 2.$$

(α) Δείξτε ότι το $x^3 + 6x^2 + 1$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του a πάνω στο $\mathbb{Q}$.

(β) Δείξτε ότι $\beta \neq 0$.

(γ) Μπορείτε να υπολογίσετε το $\frac{1}{\beta}$ στο $\mathbb{Q}[a]$;

ΑΓ-2. Εστω F ένα σώμα, $G \leq Aut(F)$, $a \in F$ και

$$K = \{ y \in F : \gamma(y) = y \text{ για καθε } \gamma \in G \}.$$

(α) Να αποδειχθεί ότι το a είναι αλγεβρικό πάνω στο K τότε και μόνον τότε όταν το σύνολο $G(a) = \{ \gamma(a) : \gamma \in G \}$ είναι πεπερασμένο.

(β) Αν το a είναι αλγεβρικό πανω στο K, βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμό του πάνω στο K.

(Υπόδειξη: Αρχίστε απο το ευθύ του (α). Εστω ότι το a είναι αλγεβρικό πάνω στο K....

ΑΓ-3. Εστωσαν G, H δυο αβελιανές ομάδες και $f: G \to H$ ένας επιμορφισμός. Αν η H είναι ελεύθερη αβελιανή, δείξτε ότι

$$G \cong H \oplus \ker f.$$

(Υπόδειξη: Θεωρείστε μία βάση της H και πάρτε τυχαίες προεικόνες των στοιχείων της.

ΑΓ-4. Να ευρεθούν όλες οι ομάδες τάξεως 35.

ΑΓ-5. (α) Εστω G μία υποομάδα της προσθετικής ομάδας των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Αν η G είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι ισχύει ένα από τα επόμενα:

(i) $G = \{0\}$, (ii) $G = \mathbb{R}$ ή (iii) $G = \lambda\mathbb{Z}$ για κάποιο $\lambda > 0$.

(β) Στο $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$ θεωρούμε τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών. Αν H είναι μία υποομάδα της S^1 που είναι κλειστό σύνολο, να αποδειχθεί ότι ισχύει ένα από τα επόμενα: (i) $H=\{1\}$, (ii) $H=S^1$ ή (iii) η H είναι πεπερασμένη κυκλική. (Υπόδειξη: Για το (β) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το (α)).

ΑΓ-6. Είναι ο κύκλος $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ και η σφαίρα $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ ομοιομορφικοί χώροι;

ΑΓ-7. Έστω X ένας μετρικοποιήσιμος χώρος και $f:[0,+\infty)\to X$ μια συνεχής, 1-1 και επί απεικόνιση. Να αποδειχθεί ότι η f είναι ομοιομορφισμός τότε και μόνον τότε όταν

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{f[n,+\infty)}=\emptyset .$$

ΑΓ-8. Έστω $M\subset\mathbb{R}^3$ μια λεία επιφάνεια, $p\in M$ και $N(p)$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην M στο σημείο p. Έστω $v\in T_pM$ και $w\in\mathbb{R}^3_p$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο v και σχηματίζει γωνία ϕ με το $N(p)$, $0\leq\phi<\frac{\pi}{2}$. Έστω $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$, $\varepsilon>0$, η καμπύλη κατά την οποία το επίπεδο που παράγουν τα v,w τέμνει την M, με $\gamma(0)=p$, $\dot\gamma(0)=v$. Δείξτε ότι η καμπυλότητα της γ στο p είναι ίση με

$$\frac{\mathrm{II}_p(v)}{\cos\phi}$$

όπου $\mathrm{II}_p:T_pM\to\mathbb{R}$ είναι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της M στο σημείο p.

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ - ΛΟΓΙΚΗ

Σ1) Έστω

$$A_n = \begin{cases} \{0,2,4,6,\ldots\}, & n = \text{άρτιος} \\ \{0,3,6,\ldots,\frac{3(n-1)}{2}\}, & n = \text{περιττός} \end{cases}$$

Αποδείξτε ή όχι ότι:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n+k}\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n+k}\right);$$

(Υποδ: Εκφράστε και δείξτε τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας συναρτήσει των $X = \{0,2,4,6,\ldots\}$ και $Y = \{0,3,6,9,\ldots\}$).

Σ2) A. Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διατυπώστε μαθηματικά την φράση «Η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$».

B. Έστω I ένα διάστημα και $f_n : I \to \mathbb{R}$ μία ακολουθία συναρτήσεων.

(i) Τι σημαίνει για την ακολουθία f_n το επόμενο κριτήριο:

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in I$, με $m, n \geq n_0$ να ισχύει ότι

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

(ii) Γράψτε την ΑΡΝΗΣΗ του παραπάνω κριτηρίου.

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ — ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Π1) Μία κάλπη περιέχει n άσπρες σφαίρες $(n \geq 3)$ και n μαύρες σφαίρες όλες του ίδιου μεγέθους. Ένας παίκτης τραβά τις $2n$ αυτές σφαίρες, την μία μετά την άλλη, χωρίς επανάθεση. Ο παίκτης αυτός κερδίζει 1 δώρο σε κάθε τράβηγμα όπου η σφαίρα που τραβά είναι χρώματος διαφορετικού από εκείνο της σφαίρας του προηγουμένου τραβήγματος.

(i) Ποιά είναι η πιθανότητα να κερδίσει ο παίκτης τουλάχιστον 3 δώρα;

(ii) Για κάθε $k \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ συμβολίζουμε με X_k την τ.μ. που είναι ίση με 1 αν ο παίκτης κερδίσει 1 δώρο στο k-οστό τράβηγμα και 0 αλλιώς.
Καθορίσατε τις κατανομές των τ.μ. X_k

(iii) Ποιό είναι, κατά μέσο, το τελικό κέρδος του παίκτη;

Π2) Θεωρούμε ένα δίσκο D κέντρου O, του οποίου η ακτίνα r είναι άγνωστη. Επιλέγουμε στην τύχη και κατά τρόπο ανεξάρτητο τα σημεία $M_1, \ldots, M_n$ στην επιφάνεια του D και σημειώνουμε με X την μεγαλύτερη παρατηρούμενη τιμή των OM_i (σε μέτρα (m)), δηλαδή $X = \sup\{OM_1, \ldots, OM_n\}$.

(i) Υπολογίσατε συναρτήσει των n, r, x τις πιθανότητες:
$$P(X \leq x) \quad \text{και} \quad P(X > x).$$

(ii) Μέσω της X κατασκευάστε τα πιο ισχυρά tests για τον έλεγχο των υποθέσεων: (α) $H_1: r \geq 10$ m
(β) $H_2: r \leq 8{,}25$ m

σε επίπεδο σημαντικότητας (ε.σ.) $a = 0{,}01$.

Εφαρμογή: Για $n = 10$ και $X = 8{,}10$ m ελέγξατε σε ε.σ. $a = 0{,}01$ τις υποθέσεις H_1 και H_2.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1Δ

Δίδεται ή εξίσωση τής θερμότητας $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ στό $[0,1]$ μέ συνοριακές τιμές $\frac{\partial u}{\partial x}(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(1) = 0$ καί $u(x,0) = f(x)$, όπου $f(x)$ γνωστή συνεχής συνάρτηση. Εστω $u(x,t)$ ή λύση τής παραπάνω εξίσωσης.

(i) Θέτοντας $u(x,t) = \lambda(t)\cdot\varphi(x)$ γράψτε καί μελετήστε τις εξισώσεις πού προκύπτουν γιά τά λ, φ.

(ii) Γράψτε έναν τύπο γιά τήν λύση $u(x,t)$.

(iii) Δείξτε ότι καθώς $t \to \infty$:

$$u(x,t) \to \int_0^1 f(x)\,dx .$$

ΘΕΜΑ 2Δ

Νά λυθεί ή ΜΔΕ :

$$u_t + u_x = u^2 , \qquad x \in \mathbb{R} , \ t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x) < 0 , \qquad x \in \mathbb{R}$$

όπου $f(x)$ δοθείσα αρνητική συνάρτηση.
Τί συμβαίνει όταν $f(x) > 0$;

(Υποδ: Μπορείτε νά χρησιμοποιήσετε τήν αλλαγή μεταβλητών $(x,t) \longmapsto (y,t)$ μέ $y = x - t$)

ΘΕΜΑ 3Δ

Δίδεται η εξίσωση

$$\dot{x} = f(x, t) \qquad (1)$$

στη λωρίδα $\Lambda = \{(x,t) : a \le x \le b,\ -\infty < t < \infty\}$, όπου η $f(t,x)$ είναι συνεχής με συνεχείς πρώτους παραγώγους στην Λ, και T-περιοδική ως προς t δηλ. $f(t,x) = f(t+T,x)$. Εάν

$$f(t,a) > 0, \qquad f(t,b) < 0 \qquad -\infty < t < \infty$$

Δείξτε ότι:

(i) κάθε λύση $x(t)$ της (1) με $x(0) = x_0$, $a \le x_0 \le b$ ορίζεται στο $[0, T]$ και παίρνει τιμές μεταξύ a και b.

(ii) Η (1) επιδέχεται T-περιοδική λύση.

ΘΕΜΑ 4Δ

Δίδεται ότι η $x(t)$ ικανοποιεί την

$$x'' + e^{-t}x' = x \sin t, \qquad t > 0$$

με $x(0) = x(R) = 0$, όπου $R > 0$.

Δείξτε ότι $R > \pi$ εκτός εάν $x \equiv 0$.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΑΑ-1. Εστω $p \in \mathbb{P}_3$ με $p(x_j) = e^{x_j}$, $x_j = j+1$, $j = 0,1,2,3$.
Δείξτε ότι η συνάρτηση
$$g(x) = e^x - p(x)$$
έχει στο διάστημα $[1,4]$ ακριβώς τέσσερεις ρίζες.

ΑΑ-2. Εστω $\ell_{-2}, \ell_{-1}, \ell_0, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{P}_4$ τα πολυώνυμα Lagrange που αντιστοιχούν στα σημεία
$$-2, -1, 0, 1, 2.$$
Δηλαδή,
$$\ell_\alpha(\beta) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \alpha = \beta \\ 0, & \text{αν } \alpha \neq \beta, \end{cases}$$
όπου $\alpha, \beta \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
Αν
$$\omega(x) = 4\,\ell_{-2}(x) + \ell_{-1}(x) + \ell_1(x) + 4\,\ell_2(x),$$
δείξτε ότι
$$\int_{-2}^{2} \omega(x)\,dx = \frac{16}{3}$$