ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Λεωφ. Κνωσού (Τ.Θ. 2208) 714 09 Ηράκλειο Κρήτης, Τηλ: (081) 234516, 393192, 393193, 393456, Fax: (081) 234516

Ἐξετάσεις Εἰσαγωγῆς

στό Μεταπτυχιακό Τμῆμα

Μέρος Β΄

Σάββατο 26 Ἰουλίου 1997.

Ανάλυση

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=\operatorname{Arctan}(\sinh 2x)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$. Είναι η f άρτια ή περιττή συνάρτηση;

2. (i) Βρείτε τα σημεία (x,y,z) της επιφάνειας $x^2+y^2-z^2=2$ στα οποία το εφαπτόμενο επίπεδο είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{a}=(1,1,1)$.

(ii) Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_D (2x+y)\,d\sigma$, όπου D είναι το τρίγωνο με κορυφές: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

3. (i) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta\ , \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{1+|z+2|^2}{z}\,dz .$$

(ii) Δίνεται η ακέραια συνάρτηση (δηλ. ολόμορφη σ' όλο το $\mathbb{C}$) $f(z)$ και έστω ότι οι συναρτήσεις $F(z)=f(z+1)-f(z)$ και $G(z)=f(z+i)-f(z)$ είναι σταθερές. Δείξτε ότι $f(z)=az+b$, $a,b\in\mathbb{C}$.

4. Έστω $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ένας θετικά ορισμένος τελεστής, δηλαδή $\langle \vec{x}, T\vec{x}\rangle>0$, $\forall\, \vec{x}\in\mathbb{R}^n-\{\vec{0}\}$. Δείξτε ότι ο T είναι αντιστρέψιμος.

5. Έστω X και Y δύο τοπολογικοί χώροι και $f:X\to Y$ μία συνάρτηση.
Δείξτε ότι οι παρακάτω προτάσεις (i) και (ii)

είναι ισοδύναμες.

(i) Για κάθε G ανοικτό υποσύνολο του Y, το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

(ii) Για κάθε F κλειστό υποσύνολο του Y, το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Γνωρίζετε ποιά ιδιότητα της f εκφράζουν οι (i) και (ii);

6. Έστω $C[-1,1]$ ο χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο $[-1,1]$.
Αν, για $f, g \in C[-1,1]$, θέσουμε

$$\rho(f,g) = \int_{-1}^{1} |f(x)-g(x)|\,dx,$$

τότε δείξτε ότι:

(i) Ο $(C[-1,1], \rho)$ είναι μετρικός χώρος.

(ii) Ο χώρος αυτός <u>δεν</u> είναι πλήρης.

(<u>Υποδ.</u> Για το (ii) θεωρείστε, αν θέλετε, την ακολουθία των συναρτήσεων:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < -\frac{1}{n} \\ nx, & -\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n} \\ +1, & \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$).

7. Δείξτε ότι κάθε διαχωρίσιμος χώρος Hilbert είναι (γραμμικά) ισομετρικός με τον χώρο

$$\ell^2 := \left\{ \{x_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}.$$

ΑΛΓΕΒΡΑ - ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Ἔστω $(G,\cdot)$ ὁμάδα καί H κανονική ὑποομάδα της μέ πεπερασμένο δείκτη στήν G. Δεῖξτε ὅτι, γιά κάθε $g \in G$ ὑπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ὥστε $g^k \in H$. Ἄν ὁ δείκτης εἶναι 15, ποιές εἶναι οἱ πιθανές τιμές τοῦ k;

2. Ἄν $m, n \in \mathbb{Z}$ καί $(m,n)=1$, δεῖξτε ὅτι $(2m+n, 7m+3n)=1$.

3. Τά στοιχεῖα τοῦ $\mathbb{Z}_7$ συμβολίζομε μέ $\hat{a}$, $a \in \mathbb{Z}$. Ποιά ἀπό τά $\frac{1}{\hat{2}}, \frac{1}{\hat{3}}, \dots, \frac{1}{\hat{6}}, \frac{1}{\hat{7}}$ ἔχουν νόημα; Ὅσα δέν ἔχουν, ἐξηγῆστε γιατί. Ὅσα ἔχουν, ποιό εἶναι τό νόημά τους; (Τί συμβολίζουν;)

4. Ἐκτελέστε τή διαίρεση (πηλίκο - ὑπόλοιπο)
$$x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 3 \ : \ 3x+1 \quad \text{στό } \mathbb{Z}_7[x]$$
(γιά ἁπλοποίηση τοῦ συμβολισμοῦ δέν χρησιμοποιοῦμε τό ^, ὁπότε γράφομε π.χ. m ἀντί γιά $\hat{m}$).

5. Θεωρῆστε τήν ὁμάδα $(\mathbb{R},+)$ καί τήν ὑποομάδα της $\mathbb{Z}$. Δεῖξτε ὅτι ἡ ὁμάδα $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ὡς σύνολο, μπορεῖ νά ταυτισθεῖ μέ τό διάστημα $[0,1)$. Συμπεράνατε ἀπ' αὐτό ὅτι ἡ πράξη τῆς $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ "μεταβιβάζεται" στό $[0,1)$, καί βρεῖτε τά ἀποτελέσματα τῶν πράξεων
$$0.3 + 0.9, \quad 0.3 + 0.7, \quad 0.2 + 0.35 \quad \text{στήν ὁμάδα } [0,1).$$

6. Ἀποδεῖξτε ὅτι $\forall\, k \in \mathbb{N}$ ὁ ἀριθμός $521 \cdot 12^k + 1$ εἶναι σύνθετος, ὡς ἑξῆς:

   Ἄν k περιττός, τότε ὁ ἀριθμός διαιρεῖται διά 13

   Ἄν $k \equiv 2 \pmod 4$ " " " " 5

   Ἄν $k \equiv 0 \pmod 4$ " " " " 29

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ – ΛΟΓΙΚΗ

1. Ἔστω $\mathcal{C}$ οἰκογένεια συνόλων. Ἐν γένει, συμβολίζομε μέ $\wp(X)$ τό δυναμοσύνολο τοῦ συνόλου X. Ἀποδεῖξτε ὅτι
$$\bigcap_{X\in\mathcal{C}} \wp(X) = \wp\Big(\bigcap_{X\in\mathcal{C}} X\Big) \quad .$$

2. Ἔστω $f: X \longrightarrow Y$ τυχοῦσα συνάρτηση καί $y \in \mathrm{Im} f$. Τό $f(f^{-1}(y))$ παριστάνει στοιχεῖο ἤ σύνολο καί ποιό; Ἀποδεῖξτε τόν ἰσχυρισμό σας.
Τί ἀνάλογο μποροῦμε νά ποῦμε γιά τό $f^{-1}(f(x))$ ὅταν $x \in X$;

3. Ἕνας μιγαδικός ἀριθμός λέγεται ἀλγεβρικός ἄν εἶναι ρίζα πολυωνύμου μέ ἀκέραιους συντελεστές. Ἀποδεῖξτε ὅτι τό σύνολο τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμήσιμο.

4. Ἔστω ὅτι p, q εἶναι δύο προτάσεις. Ὁ ἰσχυρισμός $p \Rightarrow q$ εἶναι ἤ ὄχι ὁ ἴδιος μέ τόν $\sim q \Rightarrow \sim p$; ($\sim$ σημαίνει ἄρνηση). Ἀποδεῖξτε τόν ἰσχυρισμό σας.

Διαφορικές Εξισώσεις

1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = \sin x \quad \text{στο} \quad (0,T)\times(0,\pi),$$

$$u(0,x) = u_t(0,x) = 0 \quad \text{για} \quad x \in [0,\pi],$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \quad \text{για} \quad t \in [0,T].$$

(Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε την μέθοδο Φουριέ (Fourier))

2. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$x(1+y^2)\,dx - y(1+x^2)\,dy = 0, \quad y(0) = 2$$

3. Αποδείξτε ότι εάν η $y(x) \in C^2(0,1) \cap C^0[0,1]$ είναι τέτοια ώστε

$$y''(x) + xy'(x) - y(x) = 1 \quad \text{για} \quad x \in (0,1)$$

και

$$y(0) = y(1) = 0,$$

τότε $y(x) \leq 0$ για $x \in [0,1]$

Πιθανότητες

Εστω ότι η απόκλιση X της βολής ενός σκοπευτή από το κέντρο στόχου είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = 2(1-x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Ο σκοπευτής κερδίζει το στοίχημα αν η απόκλιση της βολής από το κέντρο του στόχου δεν είναι μεγαλύτερη από το 1/2. Να υπολογισθεί ο αριθμός n των βολών που απαιτούνται έτσι ώστε η πιθανότητα να κερδίσει ο σκοπευτής το στοίχημα να είναι τουλάχιστο 0,98.

Αριθμητική Ανάλυση

Εστω $f \in C^4[0,1]$.

α) Δείξτε οτι υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο $p \in \mathbb{P}_3$ τέτοι ώστε

$$p(0) = f(0), \quad p'(0) = f'(0),$$
$$p(1/2) = f(1/2), \quad p(1) = f(1).$$

β.) Αποδείξτε οτι

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{24} x^2 (x-1)(x-1/2) f^{(4)}(\xi)$$

για κάποιο $\xi = \xi(x) \in (0,1)$.

(Υπόδειξη: μπορείτε να ακολουθήσετε την τεχνική που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της διαφοράς $f-q$ όπου το q είναι το πολυώνυμο παρεμβολής)

Θέμα Στατιστικής

Έστω στοχαστικό δείγμα $X_1, \dots, X_n$, ανεξαρτήτων καί ισονόμων τυχαίων μεταβλητών, από τήν κατανομή μέ πυκνότητα:

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1} 1(0<x<1), \quad \theta \in \Theta \equiv (0,+\infty).$$

(α) Βρήτε τήν επαρκή καί πλήρη στατιστική γιά τήν παράμετρο $\theta \in \Theta$.

(β) Βρήτε τήν μοναδική αμερόληπτη εκτιμήτρια ελαχίστης διασποράς $\tilde{\theta}_n$ της παραμέτρου θ, εφόσον $n \geq 3$.

(γ) Βρήτε τήν εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφανείας $\hat{\eta}_n$ της $\eta := \frac{1}{\theta}$.

(δ) Βρήτε τήν ασυμπτωτική κατανομή καί υπολογίστε τήν ασυμπτωτική απόδοση της $\hat{\eta}_n$.

(ε) Βρήτε τήν ασυμπτωτική κατανομή της $\tilde{\theta}_n$.

(ζ) Βρήτε τόν ομοιόμορφα πλέον ισχυρό έλεγχο της $H: \theta \leq 1$ vs $K: \theta > 1$, επιπέδου σημαντικότητος $\alpha \in (0,1)$.