ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΡΗΤΗΣ
ΗΡΑΚΛΕΙΟ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ

30-07-1994

(Μέρος δεύτερο)

Η Επιτροπή
Κ. Σκανδάλης
Α. Τερτίκας
Α. Φειδάς

1. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^6 + 7y^2 = z^2 + 2$ δεν έχει ακέραιες λύσεις

2. Γράψετε την πολλαπλασιαστική ομάδα των διαιρετών του 1 στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_{27}$ ως ευθύ άθροισμα κυκλικών ομάδων $\mathbb{Z}_m$.

3. Να βρεθούν οι ολόμορφες συναρτήσεις $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν την συνθήκη: $\forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \leq |z|^{5/2}$.

4. (α) Έστω $C = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Αποδείξτε ότι τα σύνολα $C \times C$ και C είναι ισοπληθικά.

   (β) Βρείτε μια υπεραριθμήσιμη οικογένεια $(A_i : i \in I)$ υπεραριθμήσιμων, ξένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mathbb{R} = \bigcup_{i \in I} A_i$.

   (γ) Μπορεί μια τέτοια οικογένεια $(A_i : i \in I)$ να περιέχει υπεραριθμήσιμο πλήθος: (i) ανοικτών συνόλων;
   (ii) κλειστών συνόλων;

5. Θεωρείστε γνωστό το ακόλουθο θεώρημα:
"Αν το σημείο (α, β) του επιπέδου κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη, τότε το σώμα $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$, ως διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{Q}$, έχει διάσταση μορφής 2^n".
Αποδείξτε ότι το σημείο $(\cos\frac{\pi}{9}, 0)$ δεν κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη και συμπεράνετε ότι η γωνία $\frac{\pi}{9}$ δεν είναι κατασκευάσιμη.

6. (α) Βρείτε τις ακτίνες κύριας καμπυλότητας (ή τις κύριες καμπυλότητες k_1, k_2) μιάς ~~εκ~~ περιστροφής επιφάνειας
$$x = u\cos u, \quad y = u\sin u, \quad z = f(u).$$

   (β) Βρείτε τα ομφαλικά σημεία ενός ελλειψοειδούς $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ και δείξτε ότι τα εφαπτόμενα επίπεδα σ' αυτά τα σημεία είναι παράλληλα προς τις κυκλικές τομές του ελλειψοειδούς (δηλαδή προς εκείνα τα επίπεδα που το τέμνουν κατα κύκλους)

7. (α) Έστω $(X, \| \ \|)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα. Έστω Y κλειστός υπόχωρος του X, $Y \neq X$. Δείξτε ότι το εσωτερικό του Y είναι κενό.

(β) Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο P των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές με μια οποιαδήποτε νόρμα $\| \ \|$. Αποδείξτε ότι ο χώρος $(P, \| \ \|)$ δεν είναι πλήρης.

(Υποδ. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα του Baire)

8. (α) Βρείτε την γενική λύση του συστήματος

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(β) Βρείτε όλες τις συνεχείς $\varphi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$ για τις οποίες ισχύει:

$$t\varphi'(t) - \varphi(t) = t^2 e^t, \qquad t>0$$
$$\varphi(0) = 0.$$

9. (α) Αποδείξτε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= -u, & x\in(0,1),\ t>0 \\ u(x,0) &= \varphi(x), & x\in[0,1] \\ u(0,t) &= g(t),\quad u(1,t) = h(t) & \end{aligned}$$

έχει το πολύ μια ομαλή λύση.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε ομαλή λύση της $u_x u_y + u_{xy} = 0$ είναι μορφής $u(x,y) = \ln(f(x)+g(y))$.

10. (α) Βρείτε την μεγαλύτερη δύναμη του 24 που διαιρεί το $1994!$

(β) Αποδείξτε ότι σε ένα συνεκτικό, απλό και επίπεδο γράφημα με 6 κορυφές και 12 ακμές, κάθε επίπεδη περιοχή έχει σύνορο αποτελούμενο από τρεις ακμές.

11. Έστω ℓ_2 ο χώρος των πραγματικών ακολουθιών (x_n) με $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$.

(α) Έστω $A: \ell_2 \to \ell_2$ γραμμικός τελεστής με $\|A\| = 1$. Έστω $x_0 \neq 0$ με $Ax_0 = x_0$. Έστω ότι A^* είναι ο συζυγής τελεστής του A (δηλαδή ο τελεστής που ικανοποιεί: $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$ για κάθε $x, y \in \ell_2$, όπου $\langle\ ,\ \rangle$ το συνήθες εσωτερικό γινόμενο στον ℓ_2).

Αποδείξτε ότι $A^* x_0 = x_0$.

(Υποδ. Θεωρείστε γνωστό ότι $\|A^*\| = \|A\|$. Γράψτε το $A^* x_0 = x_0 + y$ όπου $y \in \ell_2$ είναι κάθετο στο x_0)

(β) Έστω $B: \ell_2 \to \ell_2$ ο τελεστής με $B(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_2, x_3, \dots x_{n+1}, \dots)$. Αποδείξτε αρχικά ότι $\|B\| = 1$ καθώς και ότι καθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| < 1$ είναι ιδιοτιμή του B. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι ο B^* δίδεται από $B^*(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ και ότι ο B^* δεν έχει καμμία ιδιοτιμή.

12. Έστω $Q_n(f) = w_0 f(x_0) + \dots + w_{n-1} f(x_{n-1})$ ο τύπος ολοκλήρωσης Newton-Cotes σε ένα διάστημα της μορφής $[-a, a]$ με n κόμβους.

(α) Αποδείξτε ότι αν για δύο κόμβους x_i, x_j ισχύει $x_i = -x_j$, τότε $w_i = w_j$.

(β) Αποδείξτε ότι το Q_n ολοκληρώνει ακριβώς κάθε περιττή και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[-a, a]$.

13. Θεωρούμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(α) Έστω $\hat{\underline{x}}$ η υπολογισθείσα λύση του γραμμικού συστήματος $A\underline{x} = \underline{b}$, C ο υπολογισθείς αντίστροφος του A, $\underline{r} = \underline{b} - A\hat{\underline{x}}$ και $R = I - CA$. Αποδείξτε ότι αν γιά μιά φυσική νόρμα έχουμε ότι $\|R\| < 1$, τότε ισχύει:

$$\|\underline{x} - \hat{\underline{x}}\| \leq \frac{\|C\| \cdot \|\underline{r}\|}{1 - \|R\|}.$$

(β) Έστω LU η παραγοντοποίηση του πίνακα A που προέκυψε με τη χρήση απαλοιφής του Gauss με μερική οδήγηση και P ο αντίστοιχος πίνακας αντιμετάθεσης για τον οποίο ισχύει $LU = PA$. Υποθέτοντας ότι ο A είναι τριδιαγώνιος, δώστε τον μέγιστο αριθμό των μη-μηδενικών στοιχείων στην i-στη $(i = 1, \dots, n)$ γραμμή του L και του U. Δικαιολογήστε εν συντομία τις απαντήσεις σας.

14. (α) Έστωσαν οι τυχαίες μεταβλητές S, T τις οποίες υποθέτουμε ανεξάρτητες και ισόνομες εκθετικές με $\lambda=1$, δηλαδή $f_T(t)=e^{-t}$, $t>0$. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(S^2-2T^2>ST)$.

(β) Μια μηχανή λειτουργεί ικανοποιητικά εφόσον λειτουργούν τουλάχιστον τρεις από τους πέντε κυλίνδρους της. Υποθέτουμε ότι οι κύλινδροι είναι πανομοιότυποι και λειτουργούν ανεξάρτητα ο ένας απ' τον άλλο. Επίσης υποθέτουμε ότι η διάρκεια ζωής T ενός κυλίνδρου ακολουθεί την εκθετική κατανομή με $\lambda=1$. Θέτουμε σε συνεχή λειτουργία την εν λόγω μηχανή και έστω X η διάρκεια της ικανοποιητικής λειτουργίας της. Βρείτε την συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X.

15. Έστω στοχαστικό δείγμα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών από την κατανομή Bernoulli(p), $p\in\Pi\equiv(0,1)$, δηλαδή $P(X_1=x)=p^x(1-p)^{1-x}$, $x\in\{0,1\}$. Μας ενδιαφέρει η εκτίμηση της $\theta\equiv q(p)=\dfrac{p}{1-p}$.

(α) Βρείτε την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\theta}_n$ της $\theta\in\Theta\equiv(0,+\infty)$.

(β) Βρείτε την ασυμπτωτική κατανομή της $\hat{\theta}_n$, δηλαδή το κατά κατανομή όριο της ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)$.

(γ) Δείξτε ότι η στατιστική $T:=\sum_{i=1}^{n} X_i$ ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p. Δείξτε επίσης ότι ότι η T είναι επαρκής και πλήρης για την παράμετρο $p\in\Pi$.

(δ) Δείξτε ότι δεν υπάρχει αμερόληπτη εκτιμήτρια της $\theta\in\Theta$.