ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Λεωφ. Κνωσού (Τ.Θ. 2208) 714 09 Ηράκλειο Κρήτης, Τηλ.: (081) 393801, 393807, Fax: (081) 393881

Εξετάσεις Επιλογής

για το

Μεταπτυχιακό Τμήμα.

ΜΕΡΟΣ Α.

16 Ιουλίου 1999

Επιτροπή:

Μ. Κατσοπρινάκης

Α. Κουβιδάκης

Χ. Μακριδάκης

ΜΕΡΟΣ Α

1. **i** Εστω ότι $\alpha_n, n = 1, 2, 3, \ldots$, είναι μία συγκλίνουσα ακολουθία ακεραίων αριθμών. Δείξτε ότι η α_n είναι τελικά σταθερή.

   ii Για ποιές τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ και για ποιές συγκλίνει απόλυτα;

2. Δείξτε την ισοδυναμία: $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει απόλυτα $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n$ συγκλίνει, για κάθε φραγμένη ακολουθία b_n.

3. Εστω $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$ και $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n + n\alpha_{n-1}}{n+1}, \forall n \geq 1$. Δείξτε οτι $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{(-1)^n}{n+1}, \forall n \geq 0$ και βρείτε το $\lim \alpha_n$. (Αν δεν μπορείτε να βρείτε το $\lim \alpha_n$ διαφορετικά, τοτε χρησιμοποιήστε κατάλληλα τον τύπο $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$).

4. **i** Εστω $f(x)$ μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση, η οποία έχει ένα μόνο κρίσιμο σημείο x_0 όπου και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Δείξτε ότι στο x_0 η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

   ii Δείξτε ότι το συμπέρασμα του (i) δεν ισχύει γενικά για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών χρησιμοποιόντας π.χ. την

$$f(x,y) = -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2\sqrt{(e^x + e^{-x^2})}$$

5. **i** Εστω $A(x_0, y_0, z_0)$ σημείο της επιφάνειας $xyz = a^3, a \neq 0$. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο (ϖ) της επιφάνειας αυτής στο A. Δείξτε ότι ο όγκος του τετραέδρου που σχηματίζεται απο τα επίπεδα $x = 0, y = 0, z = 0$ και (ϖ) είναι σταθερός, δηλαδή είναι ανεξάρτητος της επιλογής του σημείου A.

   ii Υπολογίστε το $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{2x+1}{y} dy dx$

6. Εστω $f(x)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

   i Για $x_0 \in \mathbb{R}$ σταθερό, θεωρούμε την ευθεία $x = x_0$ η οποία τέμνει τις συναρτήσεις $g_c(x) = cf(x)$ στα σημεία $(x_0, g_c(x_0))$, όπου το c διατρέχει το $\mathbb{R}$. Δείξτε οτι οι εφαπτόμενες των $g_c(x)$ στα A_c διέρχονται απο ένα σταθερό σημείο B (δηλαδή B ανεξάρτητο του c - εξαρτάται βέβαια απο το x_0 και την f) ή είναι παράλληλες.

ii Βρείτε τις συναρτήσεις $f(x)$ για τις οποίες το σημείο B του (i) απέχει απο το $(x_0, 0)$ απόσταση 1, όταν το x_0 διατρέχει το $\mathbb{R}$.

7. Εστω $f(x)$ μια συνεχής στο $[1, +\infty)$ συνάρτηση.

i Αν υπάρχει $x_0 > 1$ ώστε $f(x_0) \neq 0$, τότε δείξτε οτι

$$g(x) = \int_1^x \frac{f^2(t)}{t} dt > 0, \forall x \geq x_0$$

ii Δείξτε ότι υπάρχουν $x > 1$ ώστε $g(x) \geq f(x)$. (Υπόδ: όταν $f(x) \not\equiv 0$, τότε χρησιμοποιήστε το (i) και δείξτε ότι αν $g(x) < f(x), \forall x \geq x_0$, τότε $\frac{g'(x)}{g^2(x)} > \frac{1}{x}, x > x_0$ κλπ).

8. Εστω A ένας $n \times n$ πίνακας και I ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας.

i Αν $A^2 = 0$ τότε δείξτε οτι ο πίνακας $A - I$ είναι αντιστρέψιμος.

ii Αν A διαγωνοποιήσιμος, τότε δείξτε ότι και A^2 διαγωνοποιήσιμος.

9. **i** Δείξτε ότι η $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $\phi(x, y, z) = (0, x, y)$ είναι γραμμική απεικόνιση και βρείτε το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο.

ii Εστω v_1, v_2 δύο ιδιοδιανύσματα ενός $n \times n$ πίνακα A (με στοιχεία στο $\mathbb{C}$) τα οποία αντιστοιχούν στις διαφορετικές ιδιοτιμές λ_1, λ_2 αντίστοιχα. Δείξτε ότι τα v_1 και v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ότι εάν $\alpha, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, τότε το $\alpha v_1 + b v_2$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του A.

10. Εστω $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_1$ τρείς μη-μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί. Δείξτε ότι εάν $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ και $c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} + c_3 e^{\alpha_3 t} = 0$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, τότε $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. (Υπόδ: Η απόδειξη γίνεται πιο εύκολα εάν κάνετε πρώτα δύο κατάλληλες παραγωγίσεις).

11. Εστω N ένας φυσικός αριθμός, z_0 ένας μιγαδικός αριθμός και
$V_N = \{p(z) \in \mathbb{C}[z] : p(z) = (z - z_0)^m q(z), m \geq N, q(z) \in \mathbb{C}[z]\}$.

i Δείξτε ότι το V_N είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω απο το $\mathbb{C}$.

ii Εάν $\phi : V_N \to \mathbb{C}$ με $\phi(p(z)) = \frac{1}{N!} p^{(N)}(z_0)$ τότε δείξτε οτι η ϕ είναι γραμμική απεικόνιση με $Ker\phi = V_{N+1}$.

12. Εστω A, B δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία στο $\mathbb{R}$.

i Δείξτε ότι $tr(AB) = tr(BA)$

ii Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω απο το $\mathbb{R}$, $\phi : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση και A_B ο πίνακας της ϕ ως προς μια βάση B του V. Ορίζουμε τότε $tr(\phi) = tr(A_B)$. Δείξτε ότι το $tr(\phi)$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής της βάσης B.

iii Εστω V ο χώρος των 2×2 πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{R}$. Εάν P ένας σταθερός πίνακας του V και $\phi : V \to V$ με $\phi(A) = PA$, τότε δείξτε ότι η ϕ είναι γραμμική απεικόνιση με $tr(\phi) = 2trP$.