ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Λεωφ. Κνωσού (Τ.Θ. 2208) 714 09 Ηράκλειο Κρήτης, Τηλ: (081) 234516, 393192, 393193, 393456, Fax: (081) 234516

Εξετάσεις Εισαγωγής στο Μεταπτυχιακό Τμήμα

Μέρος Α΄

Παρασκευή 17 Ιουλίου 1998

Η επιτροπή

Κ. Αθανασόπουλος.

Μ. Κατσοπρινάκης.

Σ. Φίλιππας.

1) A. Έστω $a \geq 0$. (i) Βρείτε μία ακολουθία $a_n \geq 0$, $n=1,2,3,\ldots$, έτσι ώστε $\inf \frac{a_n}{n} = a$ και $a_{m+n} \leq a_m + a_n$, $\forall\, m,n \in \mathbb{N}$.

(ii) Δείξτε ότι γενικά για κάθε ακολουθία $\{a_n\}$ όπως στο (i) ισχύει ότι $\lim \frac{a_n}{n} = a$.

B. Δείξτε ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1} = \frac{1}{2}$ (Υπόδ. $n^4+n^2+1 = n^4+2n^2+1-n^2 \ldots$)

2) Έστω $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos t + x^2)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε

(i) ότι η f είναι άρτια συνάρτηση,

(ii) $f(x)+f(-x) = f(x^2)$, (iii) $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2\pi \ln|x|, & |x|>1. \end{cases}$

3) A. Έστω g μία συνεχής στο $[a,b]$ συνάρτηση, οπότε η εξίσωση $y'' + g(x)y' - y = 0$ έχει λύσεις. Έστω $y(x)$ μία τέτοια λύση με $y(x)<0$ για $a \leq x < b$ και $y(b)=0$. Δείξτε ότι η $y(x)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $[a,b]$ (Υποδ. Κριτήρια ακροτάτων).

B. Ένας δρομέας διανύει μία διαδρομή 10 Km σε 30 min. Δείξτε ότι υπάρχει υποχρεωτικά ένα τμήμα της διαδρομής μήκους 5 Km το οποίο ο δρομέας διήνυσε σε 15 min ακριβώς. (Υποδ. $f(x)$ = χρόνος για να πάει ο δρομέας από το x στο $x+5$ κλπ).

4) A. Αν $a>0$, $c>0$ και $b^2>ac$, τότε δείξτε ότι:

$$\max\{ax^2+2bxy+cy^2 : x,y \in \mathbb{R} \text{ με } x^2+y^2=1\} = \frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$$

B. Αν $f(x,y)$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^2$ συνάρτηση και $xf_x + yf_y = 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, τότε δείξτε ότι f = σταθερά. (Τι συμβαίνει αν $x=0$, $y=0$, κλπ).

5) A. Έστω $f(x,y)$ συνεχής στο $\mathbb{R}^2$ συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_0^a \int_0^a \frac{f(x,y)}{f(x,y)+f(y,x)}\,dx\,dy = \frac{1}{2}a^2, \quad \forall\, a>0.$$

B. Έστω $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{k}{k^2+\lambda^2}$. Διαμερίζοντας το $[0,1]\times[0,1]$ σε n^2 ίσα τετράγωνα, δείξτε ότι

$$L=\int_0^1\int_0^1 \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$ και βρείτε το L.

6) Έστω $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ μία μη-μηδενική αναλυτική συνάρτηση (δηλαδή η f αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο κάθε σημείο x_0 του $(-1,1)$, π.χ. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, όταν $x_0=0$).

(i) Αν $f(0)=0$, τότε δείξτε ότι υπάρχει $\delta>0$ ώστε $f(x)\neq 0$ για $0<|x|<\delta$ (Υπόδ. Αν $x_n\to 0$ και $f(x_n)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, τότε δείξτε, π.χ. με επαγωγή(1), ότι όλοι οι συντελεστές $a_n=0$ στο παραπάνω ανάπτυγμα της f, (1) ή με εις άτοπο απαγωγή).

(ii) Αν I είναι ένα κλειστό υποδιάστημα του $(-1,1)$, τότε δείξτε ότι το σύνολο των σημείων του I στα οποία η f μηδενίζεται είναι πεπερασμένο.

(iii) Ισχύουν τα (i) και (ii) αν η f είναι μία C^∞ μόνο συνάρτηση;

7) Έστω $A=[a_{ij}]$ ένας $n\times n$ πίνακας, με $a_{ij}\in\mathbb{R}$.

(i) Αν $a_{ij}=0$ ή 1 μόνο, είναι αλήθεια ή όχι ότι $\det A=0, 1$ ή -1;

(ii) Αν $a_{ij}\in\mathbb{Z}$ και $\det A=$ περιττός αριθμός, είναι αλήθεια ή όχι ότι τότε τουλάχιστον $n-1$ από τους a_{ij} είναι άρτιοι αριθμοί;

8) Αν ο πίνακας A της άσκησης 7 είναι συμμετρικός και $a_{ii}=1$, $\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\le 2$, $\forall\, i=1,2,\dots,n$, τότε δείξτε ότι $0\le\det A\le 1$. (Υπόδ. Δείξτε ότι όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μη-αρνητικές. Αν δεν τα καταφέρετε, υποθέστε το και λύστε την άσκηση).

9) Έστω $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$.

(i) Αν $\lambda_1\neq\lambda_2,\overline{\lambda_2}$, τότε δείξτε ότι ο A είναι όμοιος με τον πίνακα $\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$.

(ii) Αν $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, τότε δείξτε ότι ο A είναι όμοιος είτε με τον $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ ή με τον $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

(iii) Αν $\lambda_1 = a+ib$, $\lambda_2 = a-ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, τότε δείξτε ότι ο A είναι όμοιος με τον $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

10) Έστω $T: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ ο γραμμικός τελεστής που ορίζεται από τις $T(e_1) = e_{2n}$, $T(e_2) = e_{2n-1}$, ..., $T(e_{2n}) = e_1$, όπου $\{e_1, e_2, \ldots, e_{2n}\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^{2n}$.

(i) Είναι ο T 1-1, επί, συμμετρικός, ορθογώνιος, διαγωνοποιήσιμος;

(ii) Βρείτε μία βάση κάθε ιδιόχωρου του T.

(iii) Βρείτε το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του T.

11) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$, με $\dim V = n$, $v \in V$ και $f: V \to \mathbb{C}$ μία γραμμική απεικόνιση. Έστω $T: V \to V$ ο τελεστής με τύπο $T(x) = f(x)v$.

(i) Αν $\{e_1, \ldots, e_n\}$ μία βάση του V και $A = [a_{ij}]$ ο πίνακας του T ως προς αυτή την βάση, τότε δείξτε ότι

$$\frac{a_{ij}}{f(e_j)} = \frac{a_{ik}}{f(e_k)}, \quad \forall \ 1 \leq i, j, k \leq n$$

με $f(e_j) f(e_k) \neq 0$.

(ii) Δείξτε ότι:

$$\operatorname{Tr} T = f(v).$$

Καλή Επιτυχία