ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Λεωφ. Κνωσού (Τ.Θ. 2208) 714 09 Ηράκλειο Κρήτης, Τηλ: (081) 234516, 393192, 393193, 393456, Fax: (081) 234516

Ἐξετάσεις Εἰσαγωγῆς

στό Μεταπτυχιακό Τμῆμα

Μέρος Α'

Παρασκευή 25 Ἰουλίου 1997

Η επιτροπή

Μ. Κατσοπρινάκης

Α. Τερσένος

Ν. Τζανάκης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Έστω
$$a_n = \begin{cases} -3-\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n=3k+1 \\ (-1)^n, & n=3k+2 \\ \frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{n}\right)^n, & n=3k+3 \end{cases}, \quad k=0,1,2,\dots$$

Βρείτε τα $\liminf a_n$, $\limsup a_n$, $\inf a_n$, $\sup a_n$.

2. Έστω ότι $a_n \to a$. Δείξτε ότι:
(i) αν $a>0$, τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_n > 0$, και ότι $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ (εδώ υποθέτουμε ότι $n \geq n_0$).
(ii) αν $a=0$ ή $a=+\infty$, τότε, δώστε παραδείγματα ακολουθιών $\{a_n\}$ τέτοια ώστε $\lim \sqrt[n]{a_n} \neq 1$.

3. Δίδεται το σύστημα:
$$(\Sigma)\begin{cases} (\lambda+2)x+3y+2\lambda z=0 \\ 2x+\lambda y+z=0 \\ 3x+4y+\lambda z=0. \end{cases}$$

Δείξτε ότι για μία και μόνο πραγματική τιμή του λ το (Σ) έχει άπειρες λύσεις και βρείτε ένα διάστημα μήκους μικρότερου από $\frac{1}{10}$, το οποίο να περιέχει την τιμή αυτή του λ.

4. (i) Έστω ότι για μία συνάρτηση $f \in C^3[a,\beta]$ αληθεύει ότι $f(a)=f(\beta)=f'(\beta)=0$.
Δείξτε ότι:
$$\int_a^\beta f'''(x)f(x)\,dx \geq 0.$$
Για ποιές από τις παραπάνω f ισχύει το "$=$";

(ii) Αν $0<t<\pi$ και $x=3\cos t$, $y=2\sin t$, τότε βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$.

5. Έστω f μία αύξουσα και συνεχής στο $[a,\beta]$ συνάρτηση. Αν
$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt, \quad x\in[a,\beta],$$
τότε δείξτε ότι για κάθε $x,y\in[a,\beta]$ με $x<y$ ισχύει ότι $\frac{F(x)}{x-a}\leq\frac{F(y)}{y-a}$

(Υποθέτουμε ότι για $x=a$, $\frac{F(x)}{x-a}=f(a)$).

6. Έστω $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $[a,x_0)\cup(x_0,\beta]$. Είναι τότε οι παρακάτω συνεπαγωγές αληθείς; (Αν ΝΑΙ, δώστε απόδειξη, αν ΟΧΙ, δώστε αντιπαράδειγμα).

(i) $\left\{\begin{array}{l}\text{Η } f \text{ είναι επιπλέον}\\ \text{και συνεχής στο } x_0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Η } f \text{ είναι}\\ \text{παραγωγίσιμη}\\ \text{και στο } x_0\end{array}\right\}$.

(ii) $\left\{\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=\ell\in\mathbb{R}\right\} \Rightarrow \left\{\quad -"- \quad\right\}$

(iii) $\left\{\begin{array}{c}f \text{ συνεχής στο } x_0\\ \text{και}\\ \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=\ell\in\mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}\left\{\quad -"- \quad\right\}\\ \underline{\text{και}}\\ f'(x_0)=\ell.\end{array}$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

1. Ἔστω ὁ γραμμικός μετασχηματισμός $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x,y) = (x-2y,\ x+y,\ 3x+2y).$$

α) Βρεῖτε τόν πίνακα τοῦ T ὡς πρός τίς βάσεις $b_1 = (1,2)$, $b_2 = (-1,1)$ τοῦ $\mathbb{R}^2$ καί e_1, e_2, e_3 τοῦ $\mathbb{R}^3$ (e_1, e_2, e_3 εἶναι ἡ standard ὀρθοκανονική βάση).

β) Ἔστω ὁ γραμμικός μετασχηματισμός $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, τοῦ ὁποίου ὁ πίνακας ὡς πρός τίς βάσεις e_1, e_2, e_3 καί b_1, b_2 εἶναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ποιός εἶναι ὁ πίνακας τοῦ $S \circ T$ ὡς πρός τή βάση b_1, b_2;

γ) Δίχως νά χρησιμοποιήσετε τόν τύπο τοῦ T, βρεῖτε τά $ST(b_1)$ καί $ST(b_2)$, ἐκπεφρασμένα συναρτήσει τῶν b_1, b_2.

δ) Ἀνάλογο ἐρώτημα μέ τό (γ) γιά τόν ἀντίστροφο τοῦ ST, ἄν ὑπάρχει.

2. Παρατηρῆστε ὅτι μία λύση τοῦ συστήματος

$$\begin{aligned} 2x - 2y - 2z + 5w &= -1 \\ x - 2y - 3z + 4w &= -9 \\ x \qquad + z + w &= 8 \\ 7x + 2y + 11z + 4w &= 73 \end{aligned}$$

εἶναι ἡ $(x,y,z,w) = (3,2,4,1)$ καί βρεῖτε τή γενική λύση.

3. Ἔστω ὁ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

α) Βρεῖτε μία βάση κάθε ἰδιοχώρου τοῦ A.

β) Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ A διαγωνοποιεῖται καί βρεῖτε ἕνα πίνακα S, μέσῳ τοῦ ὁποίου ἐπιτυγχάνεται ἡ διαγωνοποίηση (δηλ. $S^{-1}AS = $ διαγώνιος).

4. Ἔστω ὅτι A εἶναι $n \times n$ πίνακας μέ στοιχεῖα ἀπό ἕνα σῶμα K καί $c_1, \dots, c_n$ εἶναι διαφορετικά μή μηδενικά στοιχεῖα τοῦ K, τέτοια ὥστε οἱ πίνακες $A + c_i I$ νά εἶναι ἰδιόμορφοι ($i = 1, \dots, n$, I ὁ μοναδιαῖος). Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ A εἶναι ἀντιστρέψιμος.

5. Ἔστω A $n \times n$ πίνακας, λ μία ἰδιοτιμή του καί $k \in \mathbb{N}$.

α) Δεῖξτε ὅτι ἡ λ^k εἶναι ἰδιοτιμή τοῦ A^k καί ὁ ἰδιόχωρος πού ἀντιστοιχεῖ σέ αὐτή περιέχει τόν ἰδιόχωρο, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή λ τοῦ A.

β) Βασισμένοι στό (α) ἀποδεῖξτε ὅτι, ἄν $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ εἶναι οἱ ἰδιοτιμές τοῦ διαγωνοποιήσιμου $n \times n$ πίνακα A (γραμμένες λαμβάνοντας ὑπ' ὄψη τίς πολλαπλότητές τους) τότε, γιά κάθε $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ εἶναι οἱ ἰδιοτιμές τοῦ A^k, μέ τίς ἴδιες πολλαπλότητες ὅπως καί οἱ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.