ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΡΗΤΗΣ
ΗΡΑΚΛΕΙΟ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ

29-07-1994
(Μέρος πρώτο)

Η Επιτροπή
Κ. Σκανδάλης
Α. Τερτίκας
Α. Φειδάς

1. (α) Βρείτε το όριο $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\alpha_{1,n}} + e^{\alpha_{2,n}} + \ldots + e^{\alpha_{n-1,n}}}{n}$, όπου

$$\alpha_{k,n} = \begin{cases} \frac{k}{n} & \text{για } k \text{ περιττό} \\ \frac{k}{n} + \frac{1}{n^2} & \text{για } k \text{ άρτιο} \end{cases}$$

(β) Εξετάστε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x+y)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq \frac{1}{4}\}$.

2. (α) Αφήνουμε ένα βόλο αμελητέων διαστάσεων στο σημείο $(1,0,\sqrt{2})$ της επιφάνειας $x^2+2y^2+2z^2=5$. Υποθέστε ότι το xy-επίπεδο είναι το επίπεδο του ορίζοντα. Βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα με φορά προς την οποία θα κινηθεί ο βόλος.

(β) Σχεδιάστε το σύνολο $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3+y^3-3xy=0\}$.

3. Προβολέας εγκαθίσταται στο σημείο $(0,4)$ του ορθογωνίου συστήματος xOy. Ένα ευθύγραμμο σύρμα μήκους 2 έχει σταθερό μέσο στο σημείο $(0,1)$ και περιστρέφεται περί αυτό στο επίπεδο xOy. Βρείτε τον μέσο όρο του μήκους της σκιάς του σύρματος πάνω στον άξονα των x, καθώς το σύρμα κάνει μια πλήρη περιστροφή.

4. (α) Έστω $g: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Έστω ότι $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ είναι τέτοια ώστε $g'(x_1) < 0 < g'(x_2)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ με $g'(\xi) = 0$.

(β) Ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος:
"Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε για καθε $\alpha < \beta$ και c τέτοιο ώστε $f(\alpha) < c < f(\beta)$ υπάρχει $\gamma \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο που $f(\gamma) = c$";

5. Εξετάστε αν το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+|xy|^\alpha}\,dx\,dy$ συγκλίνει για $\alpha > 1$.

6. (α) Ποιό είναι το μήκος της καμπύλης με κλίση $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\cos x}$ από $x=0$ ως $x=\frac{\pi}{2}$

(β) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ χωρίο με ομαλό σύνορο και $(0,0,0) \in \Omega$. Έστω $\vec{n}$ το μοναδιαίο κάθετο εξωτερικό διάνυσμα στο σύνορο $\partial\Omega$ του Ω. Έστω $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ το διάνυσμα θέσης και $r^2 = |\vec{r}|^2$. Αποδείξτε ότι

$$\int_{\Omega} \frac{1}{r^2}\, dx dy dz = \int_{\partial\Omega} \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^2}\, dS.$$

7. (α) Έστω $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 19 & 20 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}$. Υπολογίστε τον πίνακα $A^3 - 45A^2 + 599A$.

(β) Περιγράψτε τις κλάσεις ομοιότητας όλων των 3×3 μιγαδικών πινάκων A τέτοιων ώστε $A^3 = I$.

8. Έστω $A = (\alpha_{ij})$ πραγματικός $n \times n$ πίνακας. Αποδείξτε ότι:

(α) τάξη$(A) \leq 1$ αν και μόνο αν υπάρχουν $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\alpha_{ij} = x_i y_j$ $(i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,n)$.

(β) τάξη $(A) \leq k$ $(1 \leq k \leq n)$ αν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί $n\times n$ πίνακες $B_1, \dots, B_k$ τέτοιοι ώστε τάξη$(B_i) \leq 1$ $(i=1,\dots,k)$ και $A = B_1 + B_2 + \dots + B_k$.

9. Έστωσαν πραγματικοί $n\times n$ πίνακες A, B. Θεωρούμε τα ελάχιστα πολυώνυμα p, q των πινάκων AB, BA αντίστοιχα. Δείξτε ότι ή $p(x) = q(x)$ ή $p(x) = xq(x)$ ή $q(x) = xp(x)$. Δώστε παραδείγματα για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις.