# Πανεπιστήμιο Κρήτης

Εισαγωγικές Εξετάσεις
στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα
του Τμήματος Μαθηματικών.

Μέρος Β΄

14 Δεκεμβρίου 1996

Επιτροπή:

Γ. Κωστάκης

Μ. Παπαδημητράκης

Ν. Τζανάκης

## Ἄλγεβρα - Θεωρία Ἀριθμῶν

1) Δεῖξτε ὅτι $n^{17} \equiv n \pmod{8160}$ γιά κάθε περιττό ἀκέραιο $n$.

2) Ἔστω $G$ πολλαπλασιαστική ὁμάδα. Γιά κάθε $a, b \in G$, ὁ ἀντιμεταθέτης τῶν $a, b$ εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, τό στοιχεῖο $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$. Δεῖξτε ὅτι $[ab,c] = b^{-1}[a,c]b[b,c]$. Δεῖξτε ὅτι τό σύνολο $A$ ὅλων τῶν ἀντιμεταθετῶν καί τῶν γινομένων τους (ὁποιουδήποτε πλήθους) εἶναι ὑποομάδα τῆς $G$. Ἐπιπλέον, ἡ $A$ εἶναι κανονική ὑποομάδα τῆς $G$ καί ἡ ὁμάδα $G/A$ εἶναι ἀβελιανή. Τέλος, δεῖξτε ὅτι, ἄν ἡ $N$ εἶναι κανονική ὑποομάδα τῆς $G$, τέτοια ὥστε ἡ $G/N$ νά εἶναι ἀβελιανή, τότε ἡ $A$ εἶναι ὑποομάδα τῆς $N$.

3) Ἔστω $D$ ἀκέραια περιοχή κ $f(x_1,\ldots,x_n) \in D[x_1,\ldots,x_n]$. Ἔστω $A$ ἄπειρο ὑποσύνολο τῆς $D$. Ἄν $f(a_1,\ldots,a_n) = 0$ $\forall (a_1,\ldots,a_n) \in A^n$, τότε τό $f$ εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

4) Ἀποδεῖξτε ὅτι τό $f(x,y) = y^2 - x^3 - x$ εἶναι ἀνάγωγο πολυώνυμο τοῦ $\mathbb{C}[x,y]$. Ἄν τό $I$ εἶναι τό ἰδεῶδες τοῦ $\mathbb{C}[x,y]$, πού παράγεται ἀπό τό $f$, δεῖξτε ὅτι ὁ δακτύλιος $\mathbb{C}[x,y]/I$ εἶναι ἀκέραια περιοχή. Γιά κάθε $g(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$, ἔστω $\bar{g}$ τό στοιχεῖο (κλάση) τῆς $\mathbb{C}[x,y]/I$, πού ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τό $g$. Βρεῖτε ἕνα $g \in \mathbb{C}[x,y]$, βαθμοῦ $<3$ ὡς πρός τή μεταβλητή $x$, τέτοιο ὥστε $\bar{g} = \overline{x^5}$.

## Θεωρία Συνόλων

Ἔστω ὅτι $A_1, \ldots, A_n$ εἶναι ὁποιαδήποτε σύνολα καί $k \leq n$. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ἕνωση ὅλων τῶν τομῶν $k$ συνόλων ἀπό τά $A_1, \ldots, A_n$ ἰσοῦται μέ τήν τομή ὅλων τῶν ἑνώσεων $n-k+1$ συνόλων ἀπό τά $A_1, \ldots, A_n$.

# Διαφορική Γεωμετρία

Δίνεται ή επιφάνεια $M = \phi(\mathbb{R}^2)$, όπου ή $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ έχει τύπο, $\phi(u,v) = (u, \cosh u \cdot \cos v, \cosh u \cdot \sin v)$.

α) Γιά κάθε $p \in M$ νά δοθεί μιά βάση τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου $T_pM$.

β) Γιά κάθε $p \in M$ νά ὑπολογιστεῖ ἡ καμπυλότητα Gauss.

γ) Στό σημεῖο $p = (0,1,0) \in M$ νά ὑπολογισθοῦν οἱ κύριες καμπυλότητες καί νά βρεθοῦν οἱ κύριες διευθύνσεις ὡς πρός μία βάση τοῦ $T_pM$.

δ) Βασισμένοι στά ἀποτελέσματα τῶν ὑπολογισμῶν σας κάνετε γεωμετρική περιγραφή τῆς $M$ τοπικά γύρω ἀπό τό σημεῖο $p = (0,1,0)$ καί ἐξηγεῖστε τή σημασία τῶν κυρίων διευθύνσεων καί τῶν κυρίων καμπυλοτήτων.

## Θέματα διαφορικών εξισώσεων

1. a) Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης

$$y'' + y = x e^{x} + 2 e^{-x}$$

b) Έστω $y$ η λύση του

$$y' = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad y(0) = y_0 \neq 0, \quad x \in [0, \infty).$$

Να δείξετε ότι $\lim_{x \to +\infty} y(x)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο

2. Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in [0, s] \times [0, +\infty]$$

όπου τό $v$ ικανοποιεί τις συνθήκες:

$v(0, y) = v(s, y) = 0$, $v(x, 0) = f(x)$, $v(x, \infty) = 0$

# Πιθανότητες - Στατιστική.

1. α) Έστω E ένα τυχαίο γεγονός. Δείξτε ότι

$$P(E) = \begin{cases} \sum_y P(E|Y=y)\cdot P(Y=y) & \text{γιά } Y \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} P(E|Y=y)\cdot f_Y(y)\,dy & \text{γιά } Y \text{ συνεχή} \end{cases},$$

όπου $f_Y$ είναι ή πυκνότητα πιθανότητας τής τυχαίας μεταβλητής $Y$.

β) Μιά άλυσσίδα άποτελεῖται άπό 5 κρίκους, τό δέ όριο άντοχής $X$ σέ κιλά κάθε κρίκου κατανέμεται έκθετικά μέ παράμετρο $\lambda = 0.01$ στό διάστημα $X > 50$ (κιλά). Βρεῖτε τήν πιθανότητα νά σπάσει ή άλυσσίδα ύπό τήν έπίδραση βάρους 75 κιλών.

2. Διαθέτομε τυχαῖο δεῖγμα $X_1, \ldots, X_n$ άπό τήν άρνητική έκθετική κατανομή $E(\theta)$ μέ πυκνότητα πιθανότητας

$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \cdot \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)$, όπου $\theta \in \mathbb{R}_+$, άγνωστη παράμετρος.

α) Άν $\theta_0$ σταθερό, άναζητοῦμε όμοιομόρφως ίσχυρότατο κριτήριο $\phi$ γιά τόν έλεγχο τής στατιστικής ύποθέσεως:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{έναντι τής} \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

σέ έπίπεδο σημαντικότητος $\alpha \in (0,1)$. Ποιά ή ίσχύς τοῦ προκύπτοντος έλέγχ

β) Πῶς τροποποιεῖται ό έλεγχος άν, άντί τοῦ άκριβοῦς δείγματος $X_1, \ldots, X_n$ στήν πράξη διαθέταμε τόν άριθμό $n_1$ τῶν παρατηρήσεων, οί όποῖες εἶναι μεγαλύτερες άπό ένα δεδομένο άριθμό $\alpha$;

γ) Άν διαθέταμε ένα δεύτερο δεῖγμα μεγέθους $n'$, άνεξάρτητο τοῦ πρώτου, άπό τήν $E(\theta')$ παραμέτρου $\theta'$, ποιά έλεγχοσυνάρτηση προτείνετε γιά τόν έλεγχο τής ύποθέσεως:

$$H_0 : \theta = \theta' \quad \text{έναντι τής} \quad H_1 : \theta > \theta' \;;$$

# Αριθμητική Ανάλυση

Εστω $y:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ μια ομαλή λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)), & \forall\, t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

οπου $y_0 \in \mathbb{R}$ και $F:[a,b]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ μιά ομαλή συνάρτηση για την οποία:

$$|F(t,y_1) - F(t,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|, \quad \forall\, t \in [a,b],\ \forall\, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

Εστω $N \in \mathbb{N}$ και μιά ομοιόμορφη διαμέριση του $[a,b]$ με βήμα $h = \frac{b-a}{N}$ και κόμβους $t^m = a + mh$ γιά $m = 0, \dots, N$. Στη συνέχεια προσδιορίζουμε $\{ J^n \}_{n=0}^{N}$ με την ακόλουθη διαδικασία:

$$J^0 = w^0, \quad J^1 = w^1, \quad J^2 = w^2, \quad J^3 = w^3,$$

$$J^{n+4} = J^n + 2h\left[ F(t^{n+3}, J^{n+3}) + F(t^{n+1}, J^{n+1}) \right], \quad n = 0, \dots, N-4$$

οπου $w^0, w^1, w^2, w^3 \in \mathbb{R}$ δοθέντα. Δείξτε οτι

$$\max_{0 \leq n \leq N} |J^n - y(t^n)| \leq c \left\{ h^2 + \sum_{j=0}^{3} |J^j - w^j| \right\}$$

οπου $c$ σταθερά ανεξάρτητη των $h$, $N$.