ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ.
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΡΗΤΗΣ.

# ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ.

Ηράκλειο 27-7-90

Η Επιτροπή.
Ι. Αθανασόπουλος.
Π. Πάμφιλος
Μ. Πετράκης.

1. Ἔστω $F$ τό σύνολο ὅλων τῶν πινάκων τῆς μορφῆς $\alpha I_2+\beta K$ ὅπου $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$ (ρητοί), $I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ καί $K=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}$. Δείξατε ὅτι τό $F$ εἶναι σῶμα ἰσόμορφο μέ τό σῶμα $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2-x+1\rangle$, ὅπου $\mathbb{Q}$ εἶναι τό σῶμα τῶν ρητῶν καί $\langle x^2-x+1\rangle$ συμβολίζει τό ἰδεῶδες τοῦ $\mathbb{Q}[x]$ πού παράγεται ἀπό τό πολυώνυμο $x^2-x+1$.

2. Ἔστω $F$ σῶμα μέ ἄπειρο πλῆθος στοιχείων καί $V$ ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό $F$ μέ πεπερασμένη διάσταση. Δείξατε ὅτι ὁ $V$ δέν μπορεῖ νά γραφῆ σάν πεπερασμένη ἕνωση γνησίων ὑποχώρων του.

3. Γιά κάθε μία ἀπό τίς ἑπόμενες περιπτώσεις δείξατε ὅτι ὑπάρχει ἕνας ἀκριβῶς μορφισμός δακτυλίου: $\mathbb{Z}_4\to\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_{12}\to\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_{12}\to\mathbb{Z}_4$.

4. Ἐπιλύσατε τήν ἰσοτιμία $x^{1573}\equiv 3 \pmod{7657}$. (Οἱ ἀριθμοί 1573 καί 7657 δέν εἶναι πρῶτοι). (Ὑπόδειξη: Ὑπολογίσατε τό $3^{90} \pmod{7657}$).

5. Δείξατε ὅτι ἄν ὅλες οἱ γεωδαισιακές μιᾶς ἐπιφανείας εἶναι ἐπίπεδες τότε ἡ ἐπιφάνεια εἶναι μέρος σφαίρας ἤ ἐπιπέδου.

6. Δείξατε ὅτι ἡ ὁμάδα $n\times n$ πραγματικῶν μητρῶν μέ ὁρίζουσα $=1$ εἶναι μία διαφορίσιμη πολλαπλότητα.

7. Ἐάν $\alpha(t)$ εἶναι μία καμπύλη στό $\mathbb{R}^3$ ἀπείρως παραγωγίσιμη καί οἱ ἐφαπτόμενες εὐθεῖες τῆς $\alpha$ σέ ὅλα τά σημεῖα της τέμνουν μία σταθερή εὐθεία, τότε ἡ καμπύλη εἶναι ἐπίπεδη (δηλαδή, περιέχεται σέ ἕνα ἐπίπεδο τοῦ $\mathbb{R}^3$).

8. Νά βρεθοῦν ὅλες οἱ πραγματικές $7\times 7$ κανονικές μορφές πού ἀντιστοιχοῦν στό ἐλάχιστο πολυώνυμο $(x-2)^3(x^2+5)$.

9. Ἔστω $A$ $n\times n$ πραγματικός καί ἀντιστρέψιμος πίνακας, $L$ καί $\bar{L}$ κάτω τριγωνικοί πίνακες μέ μονάδες στήν διαγώνιο καί $D$, $\bar{D}$ διαγώνιοι πίνακες. Ἄν $A=LDL^T$ καί $A=\bar{L}\bar{D}\bar{L}^T$, δείξατε ὅτι $L=\bar{L}$ καί $D=\bar{D}$.

10. Έστω $n\in\mathbb{N}$ καὶ $\alpha=x_0<x_1<\cdots<x_n=\beta$ ἕνας διαμερισμὸς τοῦ $[\alpha,\beta]$. Ἂν $f\in C^2([\alpha,\beta])$ τέτοια ὥστε $f|_{[x_i,x_{i+1}]}\in\mathbb{P}_3$ (πολυώνυμα τρίτου βαθμοῦ) $i=0,1,2,\ldots,n-1$ καὶ $f(\alpha)=f(\beta)=f'(\alpha)=f'(\beta)=f''(\alpha)=f''(\beta)=0$. Δείξατε ὅτι ἐὰν $n<4$ τότε $f\equiv 0$.

11. Θεωροῦμε τὴν ἑξῆς συνάρτηση (Bessel μηδενικῆς τάξεως)

$$I_0(x):=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin t)\,dt,\quad x\in[0,1].$$

Ἔστω $p_n\in\mathbb{P}_n$ τὸ πολυώνυμο παρεμβολῆς τῆς $I_0$ στὰ σημεῖα $\frac{i}{n}$, $i=0,1,\ldots,n$. Δείξατε τὰ $p_n$ συγκλίνουν ὁμοιόμορφα στὸ $[0,1]$ πρὸς τὴν $I_0$ καθὼς τὸ $n$ τείνει πρὸς τὸ ἄπειρο. (Ὑπόδειξη: δείξατε ὅτι $\max_{0\le x\le 1}|I_0^{(j)}(x)|\le 1$, $j\in\mathbb{N}_0$).

12. Ἔστω $\frac{1}{t}$ λύση τῆς $y''(t)+\alpha(t)y(t)=0$, $t>0$, καὶ $u(t)$ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν $u''(t)+\alpha(t)u(t)=0$, $t>0$, $u(1)=1$, $u'(1)=0$. Δείξατε ὅτι $\lim_{t\to\infty}u(t)=+\infty$.

13. Ἔστωσαν τέσσερα μυρμήγκια στὶς κορυφὲς ἑνὸς τετραγώνου ΑΒΓΔ. Σὲ κάποια στιγμὴ τὸ μυρμήγκι Α ἀρχίζει νὰ κυνηγᾶ τὸ Β, τὸ Β τὸ Γ, τὸ Γ τὸ Δ καὶ τὸ Δ τὸ Α, (μὲ τὴν ἴδια ταχύτητα).
(α) Νὰ βρεθῇ ἡ τροχιὰ κάθε μυρμηγκιοῦ (Ὑποδ: θέσατε $A=(1,0)$, $B=(0,1)$)
(β) Νὰ βρεθῇ ἡ ἀπόστασις ποὺ θὰ διανύσῃ κάθε μυρμήγκι ἀπὸ τὴν κορυφὴ τοῦ τετραγώνου ἕως τὸ κέντρο ὅπου συναντιῶνται καὶ τὰ τέσσερα (Ὑποδ: Χρησιμοποιήσατε πολικὲς συντεταγμένες).

14. Θεωροῦμε ἕνα ἀνοικτό, συνεκτικὸ καὶ φραγμένο ὑποσύνολο, $\Omega$, τοῦ $\mathbb{R}^n$. Ἔστω $\varphi_1(x)>0$ λύση τῆς $\Delta\varphi_1(x)+\lambda_1\varphi_1(x)=0$, $x\in\Omega$, μὲ $\varphi|_{\partial\Omega}=0$, ὅπου $\lambda_1\in\mathbb{R}$, $\Delta:=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ καὶ $\partial\Omega$ - σύνορο τοῦ $\Omega$. Ἂν $\lambda>\lambda_1$ ἀποδείξατε ὅτι δὲν ὑπάρχει $u(x)>0$, $x\in\Omega$, λύση τῆς $\Delta u(x)+\lambda u(x)+u^3(x)=0$, $x\in\Omega$, μὲ $u|_{\partial\Omega}=0$. (Ὑπόδειξη: Χρησιμοποιήσατε τὸ θεώρημα τοῦ Gauss (ἀποκλίσεως) καταλλήλως).

15. Ἔστω $f\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ ὅπου $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, ἀνοικτό, συνεκτικό, καὶ φραγμένο. Ἂν $f(x,y)=0$ $\forall(x,y)\in\partial\Omega$ καὶ $f(x_0,y_0)=0$ γιὰ κάποιο $(x_0,y_0)\in\Omega$, ἀποδείξατε ὅτι ὑπάρχει $(\xi,\eta)\in\Omega$ οὕτως ὥστε $\left(\Delta f:=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$ $\Delta f(\xi,\eta)=0$.

16. Ἔστω $f(x,y)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Ἐὰν $f(x,y)=0$ γιὰ κάθε $x^2+y^2=1$, τότε, ἀποδείξατε ὅτι ὑπάρχει σημεῖο $(\xi,\eta)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$ οὕτως ὥστε

$$\sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)\right]^2+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\right]^2} > \frac{3}{\pi}\iint_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\,dx\,dy.$$

17. Ἀποδείξατε ὅτι

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+(\varepsilon\varphi\theta)^r}\,d\theta=\sigma\tau\alpha\vartheta.$$

γιὰ κάθε $r\in\mathbb{R}$. Νὰ εὑρεθῇ καὶ ἡ σταθερά.

18. Ἔστω $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ ἡ συνάρτηση ποὺ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\varphi(x)=\begin{cases}2x & x\in[0,\tfrac12]\\ 2-2x & x\in[\tfrac12,1]\\ 0 & x\in\mathbb{R}-[0,1]\end{cases}.$$

Ἔστω $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ μία πυκνὴ ἀκολουθία στὸ $\mathbb{R}$ (π.χ. μία ἀρίθμηση τῶν ρητῶν). Ὁρίζομε

$$f_n(x):=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\varphi\left(2^n(x-r_i)\right)$$

Νὰ ἀποδειχθοῦν τὰ ἑξῆς:

(α) $\forall\, n\in\mathbb{N}$ ἡ συνάρτηση $f_n$ εἶναι συνεχὴς καὶ $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$

(β) Ἐὰν $(\alpha,\beta)$, $\alpha<\beta$ εἶναι ἕνα ἀνοικτὸ διάστημα ἡ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ δὲν συγκλίνει ὁμοιόμορφα στὸ $(\alpha,\beta)$.

(γ) Κάθε σύνολο $E$ πάνω στὸ ὁποῖο ἡ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ὁμοιόμορφα στὸ $0$, εἶναι πουθενὰ πυκνό (δηλ. ἡ κλειστὴ θήκη $E$ δὲν ἔχει ἐσωτερικό).

19. Ἔστω

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \cdots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

ἕνας ἄπειρος πίνακας κάθε γραμμὴ τοῦ ὁποίου εἶναι φραγμένη ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι μποροῦμε νὰ "σβήσουμε" μερικὲς (ἐνδεχομένως ἄπειρες τὸ πλῆθος) ἀπὸ τὶς στῆλες αὐτοῦ τοῦ πίνακος οὕτως ὥστε ὁ νέος πίνακας ποὺ θὰ προκύψῃ νὰ εἶναι ἕνας ἄπειρος πίνακας τοῦ ὁποίου κάθε γραμμὴ νὰ εἶναι συγκλίνουσα ἀκολουθία.

20. Ἔστω $f:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$ συνεχὴς συνάρτησις
(i) Γιὰ κάθε $n\in\mathbb{N}$ θέτομε $F_n:=\{x\in[\alpha,\beta]:\ \exists\ x'\geq x+\frac{1}{n}$ μὲ $f(x')=f(x)\}$.
Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ $F_n$ εἶναι κλειστὸ σύνολο
(ii) Ἔστω $E=[\alpha,\beta]\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n^c\right)$ [μὲ $F_n^c$ συμβολίζομε τὸ συμπλήρωμα τοῦ $F_n$).
Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ $f$ εἶναι 1-1 στὸ $E$ καὶ ὅτι $f(E)=f([\alpha,\beta])$.

21. Ἔστω $H$ ἕνας (διαχωρίσιμος) χῶρος Hilbert καὶ $\{e_n:n\in\mathbb{N}\}$ μία ὀρθοκανονικὴ βάση τοῦ $H$. Θεωροῦμε τὸ σύνολο
$$K:=\{x\in H:\ \sum_{n=1}^{\infty}(1+\tfrac{1}{n})^2|\langle x,e_n\rangle|^2\leq 1\}$$
Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ $K$ εἶναι κλειστό, κυρτό, φραγμένο ἀλλὰ δὲν ὑπάρχει στοιχεῖο τοῦ $K$ μὲ maximum norm.
(Ὑπόδειξη: Θεωρήσατε τὸν τελεστὴ $T:H\to H$ ὅπου $Tx=\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})\langle x,e_n\rangle e_n$)

22. Ἔστω $Y$ καὶ $Z$ κλειστοὶ ὑπόχωροι ἑνὸς χώρου Banach, $X$. Ἐὰν ὁ $Z$ εἶναι πεπερασμένης διαστάσεως νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ $Y+Z:=\{y+z:\ y\in Y,\ z\in Z\}$ εἶναι κλειστὸς ὑπόχωρος τοῦ $X$.

23. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ (Ὑπόδειξη: Νὰ θεωρήσετε τὸ μιγαδικὸ ὁλοκλήρωμα $\int_C\frac{e^{iz}}{z}dz$ πάνω σὲ κατάλληλες καμπύλες $C$ καὶ νὰ ἐφαρμόσετε τὴν θεωρία τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων.)

24. Ἔστω $f(z)$ ἀναλυτικὴ συνάρτησις σ' ὅλο τὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο καὶ $|f(z)|\leq|z|^n$ $\forall\ z\in\mathbb{C}$ καὶ $n$ κάποιος φυσικός. Ἀποδείξατε ὅτι ὑπάρχει σταθερὰ $c$, μὲ $|c|\leq 1$, οὕτως ὥστε $f(z)=cz^n$.

25. Ἔστω $Y$ πυκνὸ ὑποσύνολο ἑνὸς τοπολογικοῦ χώρου $(X,\tau)$ (δηλ. $\overline{Y}=X$). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\overline{Y\cap A}=\overline{A}$ γιὰ κάθε ἀνοικτὸ σύνολο $A\subset X$.

26. Ἔστω $(A,<)$ ἕνα ὁλικὰ διατεταγμένο σύνολο τὸ ὁποῖο εἶναι καλῶς διατεταγμένο ὡς πρὸς τὴν $<$ (δηλ. κάθε μὴ κενὸ ὑποσύνολο τοῦ $A$ ἔχει ἕνα ἐλάχιστο στοιχεῖο). Ἔστω $\overset{*}{<}$ ἡ ἀντίστροφη διάταξη τῆς $<$ καὶ τοῦ $A$ (δηλ. $x\overset{*}{<}y \Leftrightarrow y<x$). Ἔστω ὅτι τὸ διατεταγμένο $(A,\overset{*}{<})$ εἶναι ἐπίσης καλὰ διατεταγμένο σύνολο. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ $A$ εἶναι πεπερασμένο.

27. Ἔστω A τό σύνολο ὅλων τῶν συναρτήσεων ἀπό τό $\mathbb{R}$ στό $\mathbb{R}$ καί B τό σύνολο ὅλων τῶν συνεχῶν συναρτήσεων ἀπό τό $\mathbb{R}$ στό $\mathbb{R}$. Νά βρεθοῦν οἱ πληθικοί ἀριθμοί τῶν συνόλων A καί B. Ἀποδείξατε ὅτι τά σύνολα A καί B δέν εἶναι πληθικῶς ἰσοδύναμα.

28. Ἔστω $\nu$ δεδομένα σημεῖα στό ἐπίπεδο μέ ἀπόσταση ἀνά δύο μεγαλύτερη ἤ ἴση πρός τήν μονάδα. Ἀποδείξατε ὅτι ~~δέν~~ ὑπάρχουν τό πολύ $3\nu$ ζεύγη αὐτῶν τῶν σημείων μέ ἀπόσταση ἴσον τῆς μονάδος.

29. Διαλέγομε τυχαῖα καί ἀνεξάρτητα 3 σημεῖα πάνω στήν περιφέρεια ἑνός κύκλου. Ποιά εἶναι ἡ πιθανότητα τό τρίγωνο πού ὁρίζεται ἀπό τά 3 σημεῖα νά περιέχει τό κέντρο τοῦ κύκλου;

30. Δύο σημεῖα εὑρίσκονται στίς θέσεις 0 καί 1 τῆς εὐθείας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τό καθένα διαλέγει τυχαῖα μία ἀπό τίς κατευθύνσεις δεξιά ἤ ἀριστερά καί κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα ἕως ὅτου συναντήσει τόν ἑπόμενο ἀκέραιο ἀριθμό. (Τά σημεῖα ξεκινοῦν τήν ἴδια χρονική στιγμή καί κινοῦνται μέ τήν ἴδια ταχύτητα). Στίς θέσεις αὐτές ἐπαναλαμβάνεται ὅτι ἔγινε στήν ἀρχή τῆς κινήσεως. Τό ἴδιο συμβαίνει ὅταν φθάσουν στόν ἑπόμενο ἀκέραιο κ.ο.κ.. Ἀποδείξατε ὅτι μέ πιθανότητα 1 τά σημεῖα κάποτε θά συναντηθοῦν. (Ὑπόδειξη: Γιά κάθε $k=1,2,3,\dots$ θεωρήσατε τό παραπάνω πρόβλημα τροποποιημένο κατά τό ὅτι τά δύο σημεῖα στήν ἀρχή τῆς κινήσεως εὑρίσκονται στίς θέσεις δύο ἀκεραίων πού ἀπέχουν κατά $k$. Συμβολίσατε μέ $P_k$ τήν πιθανότητα σ' αὐτό τό πρόβλημα τά δύο σημεῖα κάποτε νά συναντηθοῦν. Βρῆτε μία σχέση πού συνδέει τά $P_k, P_{k-2}, P_{k+2}$.)

31. Ἔστω $X_1,\dots,X_n,\dots$ ἀνεξάρτητες καί ἰσόνομες τυχαῖες μεταβλητές μέ κοινή συνάρτηση κατανομῆς $F:\mathbb{R}\longrightarrow[0,1]$, γνήσια μονότονο καί συνεχή συνάρτηση. Ἡ συνάρτηση

$$\mathbb{F}_n(x) := \frac{1}{n}\#\{X_i\le x,\ i=1,\dots,n\} \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1(X_i\le x),\quad x\in\mathbb{R}$$

καλεῖται ἐμπειρική συνάρτηση κατανομῆς (τοῦ δείγματος $X_1, \ldots, X_n$) καί ἀποτελεῖ μία ἐκτιμήτρια τῆς $F$.

(α) Βρῆτε τήν κατανομή τῆς τυχαίας μεταβλητῆς (τ.μ.)

$$S_n(x) := n\,\mathbb{F}_n(x) \quad \text{γιά } x \text{ σταθερό.}$$

(β) Δεῖξτε ὅτι ἡ κατανομή τῆς τμ. $\mathcal{S}_n := \sup\{S_n(x), x \in \mathbb{R}\}$ δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν $F$.

(γ) Δεῖξτε ὅτι γιά τυχόν $x \in \mathbb{R}$ σταθερό,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n}\,|\mathbb{F}_n(x) - \mathbb{F}(x)| \le \tfrac{1}{2}\Phi^{-1}(1-\alpha)\right) \ge 1 - 2\alpha, \quad \alpha \in [0, \tfrac{1}{2}].$$

Σημ. (i) $\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$, $x \in \mathbb{R}$ εἶναι ἡ συνάρτηση κατανομῆς τῆς τυπικῆς κανονικῆς.

(ii) Ἡ τ.μ. $U_i := F(X_i)$ ἀκολουθεῖ τήν ὁμοιόμορφη, στό $[0,1]$, κατανομή: $P(U_i \le u) = P(X_i \le F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u$, $u \in [0,1]$.

⟷